Ing. MACS 1/L3 MIM — **Analyse Numérique I**
Sup'Galilée — **Année 2017-2018**

Partiel du 15 janvier 2018

durée : 1h30.

Sans documents et sans appareils électroniques

Le barême est donné à titre indicatif

Exercice 1 (9 points)

Soient $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ Une formule de quadrature élémentaire est donnée par :

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \tag{1}$$

avec $\forall j \in [\![0,n]\!]$ $w_j \in \mathbb{R}$ et $x_j \in [a,b]$, les x_j étant distincts deux à deux. Cette formule permet d'approcher l'intégrale de f entre a et b.
Par exemple la formule de quadrature élémentaire de Simpson est donnée par

$$\mathcal{Q}^{\text{simpson}}(f,a,b) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right). \tag{2}$$

Q. 1 ***a.*** *Rappeler la définition du degré d'exactitude pour la formule de quadrature* (1).

b. *Démontrer que la formule de quadrature élémentaire* (1) *à* $n+1$ *points a pour degré d'exactitude* k *si et seulement si*

$$(b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i x_i^r = \frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}, \quad \forall r \in [\![0,k]\!]. \tag{3}$$

c. *En déduire qu'il existe une unique formule de quadrature élémentaire* (1) *à* $n+1$ *points de degré d'exactitude* n *au moins.* □

On note $t_i = (x_i - a)/(b-a)$, $\forall i \in [\![0,n]\!]$, et on suppose les poids w_i donnés par

$$w_i = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j}dx, \quad \forall i \in [\![0,n]\!] \tag{4}$$

Q. 2 *Montrer alors que la formule* (1) *a pour degré d'exactitude* n *au moins.* □

On rappelle que la formule de quadrature (1) est dites **symétrique** si

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad w_i = w_{n-i}. \tag{5}$$

Q. 3 ***a.*** *Montrer que si la formule* (1) *est* ***symétrique*** *et exacte pour les polynômes de degré* $2m$ *alors elle est nécessairement exacte pour les polynômes de degré* $2m+1$.

b. *Démontrer que la formule de Simpson* (2) *a pour degré d'exactitude* 3. □

Pour la suite on suppose que $g \in \mathcal{C}^0([\alpha,\beta];\mathbb{R})$.

Q. 4 *Expliquer le principe d'une méthode de quadrature* ***composée*** *associée à la formule élémentaire* (1) *pour le calcul d'une approximation de l'intégrale de* g *sur l'intervalle* $[\alpha,\beta]$. □

Q. 5 ***a.*** *Donner précisement la méthode de quadrature* ***composée*** *associée à la formule élémentaire de Simpson* (2) *pour le calcul d'une approximation de l'intégrale de* g *sur l'intervalle* $[\alpha,\beta]$.

b. *Quel est le degré d'exactitude de cette méthode composée? Justifiez* □

On note $(z_i)_{i=0}^{n}$ la discrétisation régulière de l'intervalle $[\alpha, \beta]$ avec $n+1$ points. La méthode de quadrature **composée** des trapèzes est donnée par

$$\frac{\beta-\alpha}{2}\sum_{k=1}^{n}(g(z_{k-1})+g(z_k)). \tag{6}$$

Q. 6 (algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* `QuadTrap` *calculant une approximation de* $\int_\alpha^\beta g(x)dx$ *par la méthode de quadrature* ***composée*** *des trapèzes* (6). *Dans cette fonction il faudra minimiser le nombre d'appels à la fonction* g. ☐

Q. 7 (algorithmique) *Proposer un algorithme permettant de vérifier/trouver numériquement le degré d'exactitude de* (6). ☐

Exercice 2 (6 points)

Soit f une fonction 2π **périodique** continue (sur $\mathbb{R}$). On sait que f peut être décomposée en série de Fourier, c'est à dire que

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \quad \text{avec} \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx. \tag{1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les $2n+2$ points uniformément répartis $(x_j)_{j\in[\![0,2n+1]\!]}$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ donnés par

$$x_j = jh \quad j \in [\![0, 2n+1]\!], \quad \text{où} \quad h = \frac{2\pi}{2n+1}, \tag{2}$$

Par ailleurs, pour tout $j \in [\![0, 2n+1]\!]$, on pose $f_j = f(x_j)$.

Pour tout nombre entier $k \in \mathbb{Z}$, on définit c_k^{app} par

$$c_k^{\text{app}} = \frac{h}{2\pi}\sum_{j=0}^{2n} e^{-ikx_j} f_j. \tag{3}$$

Q. 1 *Montrer que* c_k^{app} *correspond à une approximation de* c_k *obtenue par la méthode des rectangles à gauche.* ☐

Q. 2 **a.** *Montrer que*

$$c_k^{\text{app}} = \frac{h}{2\pi}\sum_{j=0}^{2n} e^{-ikx_{j+1}} f_{j+1}.$$

b. *En déduire que* c_k^{app} *correspond aussi à une approximation de* c_k *obtenue par la méthode des rectangles à droite.* ☐

Q. 3 **a.** *Soit* $j \in [\![0, 2n]\!]$. *Montrer que*

$$e^{-i(2n+1)x_j} = 1.$$

b. *En déduire que*

$$c_{k+(2n+1)}^{\text{app}} = c_k^{\text{app}} \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

☐

Pour n fixé, on introduit la fonction (définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 2π)

$$p_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k^{\text{app}} e^{ikx} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Q. 4 **a.** *Soit* $\ell \in [\![0, 2n]\!]$ *et* $j \in [\![0, 2n]\!]$. *Montrer que*

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{-ik(x_j - x_\ell)} = \begin{cases} (2n+1) & si\ j = \ell, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

b. *À l'aide de la question précédente, montrer que* p_n *interpole les points* $(x_\ell, f_\ell)_{\ell\in[\![0,2n]\!]}$*, c'est à dire que*

$$p_n(x_\ell) = f(x_\ell) \quad \forall \ell \in [\![0, 2n]\!]. \tag{5}$$

□

Exercice 3 (5 points)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice régulière telle que tous ses éléments diagonaux soient non nuls. On note $\mathbb{D} = \mathrm{diag}(\mathbb{A})$ (i.e. $\mathrm{D}_{ij} = \delta_{i,j}\mathrm{A}_{ij}$) et $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, les matrices à diagonales nulles respectivement triangulaire inférieure et supérieure telles que $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$.

Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Pour résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ on peut utiliser l'une des deux méthodes itératives suivantes

$$x_i^{[k+1]} = \frac{1}{\mathrm{A}_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \mathrm{A}_{ij}x_j^{[k]}\right) \quad \forall i \in [\![1, n]\!] \tag{1}$$

ou

$$x_i^{[k+1]} = \frac{1}{\mathrm{A}_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{A}_{ij}x_j^{[k+1]} - \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{A}_{ij}x_j^{[k]}\right) \quad \forall i \in [\![1, n]\!] \tag{2}$$

où $x^{[0]} \in \mathbb{R}^n$ est donné.

Q. 1 *Démontrer que* (1) *et* (2) *peuvent s'écrire sous la forme*

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{c} \tag{3}$$

où pour chacune des méthodes itératives on explicitera la matrice d'itération $\mathbb{B}$ *et le vecteur* $\boldsymbol{c}$ *en fonction de* $\mathbb{D}$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ *et* $\boldsymbol{b}$. □

On pose $\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.

Q. 2 **a.** *Montrer que*

$$\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{[k]} = \mathbb{B}^k(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{[0]}). \tag{4}$$

b. *En déduire que la méthode itérative* (3) *converge vers* $\bar{\boldsymbol{x}}$ *si et seulement si* $\rho(\mathbb{B}) < 1$ *(on rappelle que* $\rho(\mathbb{B})$ *désigne le rayon spectral de* $\mathbb{B}$*).* □

Q. 3 (algorithmique) *Ecrire la fonction* `IterSol` *permettant de calculer (si possible) une approximation de* $\bar{\boldsymbol{x}}$ *par la méthode itérative* (2).
Expliquer le(s) critère(s) d'arrêt choisi(s) et préciser les entrées/sorties de cette fonction. □