PARTIEL DU 16 JANVIER 2019

durée : 2h00.

Sans documents et sans appareils électroniques

Le barème est donné à titre indicatif

EXERCICE 1 (8 POINTS)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice régulière et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$. On suppose que la matrice $\mathbb{A}$ se décompose sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$ avec $\mathbb{M}$ régulière et on pose

$$\mathbb{B} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{c} = \mathbb{M}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Q. 1 *Démontrer que la suite définie par* [1.5 PTS]

$$\boldsymbol{x}^{[0]} \in \mathbb{C}^n \quad \textit{et} \quad \boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{c}$$

converge vers $\boldsymbol{x} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ *quelque soit* $\boldsymbol{x}^{[0]}$ *si et seulement si* $\rho(\mathbb{B}) < 1$. □

On suppose que tous les éléments diagonaux de $\mathbb{A}$ sont non nuls et on note $\mathbb{D} = \operatorname{diag}(\mathbb{A})$ (i.e. $D_{i,j} = \delta_{i,j}A_{i,j}$) et $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, les matrices à diagonales nulles respectivement triangulaire inférieure et supérieure telles que $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$.

Pour résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ on va utiliser la méthode itérative **S.O.R.** donnée par la formule suivante avec $w \in \mathbb{R}$

$$x_i^{[k+1]} = \frac{w}{\mathrm{A}_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1}\mathrm{A}_{ij}x_j^{[k+1]} - \sum_{j=i+1}^{n}\mathrm{A}_{ij}x_j^{[k]}\right) + (1-w)x_i^{[k]} \tag{1}$$

où $\boldsymbol{x}^{[0]} \in \mathbb{C}^n$ est donné.

Q. 2 *a. Montrer que* (1) *peut s'écrire sous la forme matricielle* [1.5 PTS]

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{H}\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{d} \tag{2}$$

en explicitant la matrice d'itération $\mathbb{H}$ *et le vecteur* $\boldsymbol{d}$ *en fonction de* $\mathbb{D}$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, $\boldsymbol{b}$ *et* w.

*b. Déduire de **Q**.1 que la méthode itérative* (2) *converge vers* $\boldsymbol{x} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ *si et seulement si* $\rho(\mathbb{H}) < 1$. □ [0.5 PTS]

Q. 3 *a. En posant* $\mathbb{L} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{U} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}$, *montrer que* [1 PTS]

$$\mathbb{H} = (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1}\left((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}\right). \tag{3}$$

b. En déduire que [1 PTS]

$$\rho(\mathbb{H}) \geqslant |\det(\mathbb{H})|^{1/n} = |1-w|. \tag{4}$$

c. Que peut-on en conclure? [0.25 PTS]

d. Donner (sans démonstration) une caractérisation de la matrice $\mathbb{A}$ *permettant d'assurer la convergence de la méthode itérative **S.O.R.*** □ [0.25 PTS]

Q. 4 (algorithmique) *a. Ecrire la fonction* `SOR` *permettant de calculer (si possible) une approximation de* $\boldsymbol{x} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ *par la méthode itérative **S.O.R.*** [1.5 PTS]

b. Expliquer le(s) critère(s) d'arrêt choisi(s) et préciser les entrées/sorties de cette fonction. □ [0.5 PTS]

EXERCICE 2 (8 POINTS)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $n+1$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux.

Q. 1 a. *Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i de degré n vérifiant* [0.75 PTS]

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \ \ \forall j \in [\![0,n]\!]. \tag{1}$$

b. *Montrer que les $(L_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n).* [0.75 PTS] □

On défini le polynôme P_n par

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x). \tag{2}$$

Q. 2 *Montrer que le polynôme P_n est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant $\mathrm{P}_n(x_i) = y_i$, $\forall i \in [\![0,n]\!]$.* [0.5 PTS] □

Q. 3 *Soit $g \in \mathcal{C}^p([a,b])$. On suppose qu'il existe $(p+1)$ points distincts $(c_i)_{i \in [\![0,p]\!]}$ appartenant à $[a,b]$ tels que $g(c_i) = 0$. On définit* [1.5 PTS]

$$c_{min} = \min_{i \in [\![0,p]\!]} c_i \quad \text{et} \quad c_{max} = \max_{i \in [\![0,p]\!]} c_i.$$

Montrer qu'il existe $\xi \in]c_{min}, c_{max}[$ tel que

$$g^{(p)}(\xi) = 0.$$

□

Soit π_n le polynôme de degré $n+1$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i). \tag{3}$$

Q. 4 *Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a;b];\mathbb{R})$. On suppose que $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $x_i \in [a;b]$ et $y_i = f(x_i)$. Montrer que, $\forall x \in [a;b]$, il existe ξ_x appartenant au plus petit intervalle ouvert contenant $x, x_0, \ldots, x_n$ tel que* [1.5 PTS]

$$f(x) - \mathrm{P}_n(x) = \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \tag{4}$$

Indication : *Etudier les zéros de la fonction $F(t) = f(t) - \mathrm{P}_n(t) - \dfrac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n(t)$.* □

Q. 5 (algo) *Ecrire la fonction algorithmique* LAGRANGE *retournant la valeur de $\mathrm{P}_n(x)$.* □ [1.0 PTS]

On suppose maintenant que les points $(x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ sont équidistants : $x_i = a + ih$, $i \in [\![0,n]\!]$, avec $h = \frac{b-a}{n}$. Pour $i \in [\![0,n-1]\!]$ fixé, on pose $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ et on note $\mathrm{P}_{1,i}$ le polynôme d'interpolation de Lagrange aux nœuds (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}). On définit ensuite le *polynôme d'interpolation par morceaux* P_1^h par: pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$,

$$\mathrm{P}_1^h(x) = \mathrm{P}_{1,i}(x), \ \forall x \in I_i.$$

Q. 6 a. *Donner l'expression de P_1^h sur chaque intervalle I_i, pour $i \in [\![0,n-1]\!]$, à l'aide de la formule de Newton.* [0.5 PTS]

b. *Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$. On suppose que $y_i = g(x_i)$ pour tout $i \in [\![0,n]\!]$. Montrer que l'on a l'erreur d'interpolation suivante* [1.5 PTS]

$$|g(x) - \mathrm{P}_1^h(x)| \leqslant \frac{h^2}{8} \sup_{x \in [a,b]} |g''(x)|. \tag{5}$$

Indication : *Montrer que*

$$\sup_{x \in I_i} |(x - x_i)(x - x_{i+1})| = \frac{h^2}{4}. \tag{6}$$

□

EXERCICE 3 (6.5 POINTS)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

On rappelle que si $c = \frac{a+b}{2}$, et si P_2 est le polynôme d'interpolation de Lagrange aux nœuds $(a, f(a))$, $(c, f(c))$ et $(b, f(b))$, alors la formule d'intégration numérique de Simpson permettant d'approcher $I(f)$ est donnée par :

$$I_2(f) = \frac{(b-a)}{6}\big(f(a) + 4f(c) + f(b)\big).$$

On admet que si $f \in C^4([a, b])$ alors il existe $\eta \in]a, b[$ tel que

$$I(f) - I_2(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta). \tag{1}$$

Dans la suite on découpe l'intervalle $[a, b]$ en n sous intervalles $[x_i, x_{i+1}]_{i \in [\![0, n-1]\!]}$ de même longueur :

$$x_i = a + ih \quad \text{avec} \quad h = \frac{b-a}{n}, \qquad \forall i \in [\![0, n]\!].$$

Q. 1 *Montrer que l'approximation de $I(f)$ par la méthode de Simpson **composite** s'écrit sous la forme :* [1.0 PTS]

$$I_2^h(f) = \frac{h}{6}\sum_{i=0}^{n-1}\big(f(x_i) + 4f(x_i + \frac{h}{2}) + f(x_i + h)\big).$$

□

Q. 2 (algo) *Ecrire la fonction* ***quadsim*** *retournant l'approximation de $\int_a^b f(x)dx$ calculée par la méthode composite de Simpson en minimisant le nombre d'appels à la fonction f.* [1.5 PTS] □

Q. 3 *Montrer que si $f \in C^4([a, b])$, alors on a l'estimation suivante :* [1.5 PTS]

$$|I_2^h(f) - I(f)| \leqslant \frac{h^4(b-a)}{2880} \sup_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

□

Q. 4 *On considère l'intégrale*

$$J = \int_0^2 \frac{1}{1+x}dx.$$

a. *Calculer J.* [0.5 PTS]

b. *Approcher numériquement cette intégrale par la méthode de Simpson composite avec $n = 3$.* [1.0 PTS]

c. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En approchant J par la méthode de Simpson composite avec n sous-intervalles, donner une borne inférieure pour n de sorte que l'erreur soit inférieure à 10^{-p}.* [1.0 PTS]

□