

Chapitre 4

Interpolation

4.1 Polynôme d'interpolation de Lagrange

Exercice 4.1.2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $n + 1$ couples de \mathbb{R}^2 , $(x_i, y_i)_{i \in [0, n]}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux. On note

Q. 1 1. Soit $i \in [0, n]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i de degré n vérifiant

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \forall j \in [0, n]. \quad (4.1)$$

2. Montrer que les $(L_i)_{i \in [0, n]}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n).

On définit le polynôme P_n par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x). \quad (4.2)$$

Q. 2 Montrer que polynôme P_n est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant $P_n(x_i) = y_i$, $\forall i \in [0, n]$.

Définition 4.1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i)_{i \in [0, n]}$ avec $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ et les x_i distincts deux à deux. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange** associé aux $n + 1$ points $(x_i, y_i)_{i \in [0, n]}$, noté P_n , est donné par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (4.3)$$

avec

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad \forall i \in [0, n], \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.4)$$

Théorème 4.2

Le **polynôme d'interpolation de Lagrange**, P_n , associé aux $n + 1$ points $(x_i, y_i)_{i \in [0, n]}$, est l'unique polynôme de degré au plus n , vérifiant

$$P_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in [0, n]. \quad (4.5)$$

Exercice 4.1.3

Ecrire la fonction **LAGRANGE** permettant de calculer \mathcal{P}_n (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n + 1$ points $(x_i, y_i)_{i \in [0, n]}$) au point $t \in \mathbb{R}$.

4.1.2 Erreur de l'interpolation

Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [0, n]. \quad (4.6)$$

On cherche à évaluer l'erreur $E_n(t) = f(t) - P_n(t)$, $\forall t \in [a, b]$.

Exercice 4.1.4

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $n + 1$ couples de \mathbb{R}^2 , $(x_i, y_i)_{i \in [0, n]}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux et $y_i = f(x_i)$.

On note par P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $(x_i, y_i)_{i \in [0, n]}$ et π_n le polynôme de degré $n + 1$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i). \quad (4.7)$$

Q. 1 Montrer que, $\forall x \in [a, b]$, il existe ξ_x appartenant au plus petit intervalle fermé contenant x, x_0, \dots, x_n tel que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \quad (4.8)$$

Indication : Etudier les zéros de la fonction $F(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n(t)$.

Théorème 4.3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et x_0, \dots, x_n $n + 1$ points distincts de l'intervalle $[a, b]$. Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$ et \mathcal{P}_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n passant par $(x_i, f(x_i))$, $\forall i \in [0, n]$. Alors, $\forall x \in [a, b]$, $\exists \xi_x \in (\min(x_i, x), \max(x_i, x))$,

$$f(x) - \mathcal{P}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad (4.9)$$

4.1.3 Points de Chebyshev

Trouver $(\bar{x}_i)_{i=0}^n$, $\bar{x}_i \in [a, b]$, distincts deux à deux, tels que

$$\max_{t \in [a, b]} \prod_{i=0}^n |t - \bar{x}_i| \leq \max_{t \in [a, b]} \prod_{i=0}^n |t - x_i|, \quad \forall (x_i)_{i=0}^n, \quad x_i \in [a, b], \quad \text{distincts 2 à 2} \quad (4.10)$$

On a alors le résultat suivant

Théorème 4.4

Les points réalisant (4.10) sont les points de Chebyshev donnés par

$$\bar{x}_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\right), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (4.11)$$

4.1.4 Stabilité

On note $\Lambda_n = \max_{x \in [a,b]} \sum_{i=0}^n |L_i(x)|$, dites *Constante de Lebesgue*.

Proposition 4.5

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et x_0, \dots, x_n des points distincts de $[a, b]$. L'application $\mathcal{L}_n : \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ qui à toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ donne le polynôme d'interpolation de Lagrange P_n associés aux couples de $(x_i, f(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est bien définie et linéaire. De plus on a

$$\|\mathcal{L}_n\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}^0([a,b]; \mathbb{R}) \\ f \neq 0}} \frac{\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \Lambda_n. \quad (4.12)$$

Théorème 4.6

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, on a

$$\|f - \mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \inf_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - Q\|_\infty \quad (4.13)$$

4.2 Polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite

Exercice 4.2.1

Soient $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ $n+1$ triplets de \mathbb{R}^3 , où les x_i sont des points distincts deux à deux de l'intervalle $[a, b]$. Le polynôme d'interpolation de **Lagrange-Hermite**, noté H_n , associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, est défini par

$$H_n(x_i) = y_i \quad \text{et} \quad H'_n(x_i) = z_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad (4.14)$$

Q. 1 Quel est a priori le degré de H_n ?

On définit le polynôme P_n par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^n z_i B_i(x) \quad (4.15)$$

avec, pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, A_i et B_i polynômes de degré au plus $2n+1$ indépendants des valeurs y_i et z_i .

Q. 2 1. Déterminer des conditions suffisantes sur A_i et B_i pour que P_n vérifie (4.14).

2. En déduire les expressions de A_i et B_i en fonction de L_i et de $L'_i(x_i)$ où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Q. 3 Démontrer qu'il existe un unique polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite de degré au plus $2n+1$ défini par (4.14).

Définition 4.7

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ $n+1$ triplets de \mathbb{R}^3 , où les x_i sont des points distincts deux à deux de l'intervalle $[a, b]$. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite**, noté H_n , associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, est défini par

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^n z_i B_i(x) \quad (4.16)$$

avec

$$A_i(x) = (1 - 2L'_i(x_i)(x - x_i))L_i^2(x) \quad \text{et} \quad B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x) \quad (4.17)$$

où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Théorème 4.8

Le **polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite**, H_n , associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, est l'unique polynôme de degré au plus $2n+1$, vérifiant

$$H_n(x_i) = y_i \quad \text{et} \quad H'_n(x_i) = z_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad (4.18)$$

Exercice 4.2.2

Soit $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$. On suppose de plus que, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x_i \in [a, b]$, $y_i = f(x_i)$ et $z_i = f'(x_i)$. On note

$$\pi_n^2(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2$$

et H_n le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux triplets $(x_i, f(x_i), f'(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$.

Q. 1 Montrer que

$$|f(x) - H_n(x)| \leq \frac{\|f^{(2n+2)}\|_\infty}{(2n+2)!} \pi_n^2(x). \quad (4.19)$$

Indications : Etudier les zéros de la fonction $F(y) = f(y) - H_n(y) - \frac{f(x) - H_n(x)}{\pi_n^2(x)} \pi_n^2(y)$ et appliquer le théorème de Rolle.

Théorème 4.9

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et x_0, \dots, x_n , $n+1$ points distincts de l'intervalle $[a, b]$. Soient $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$ et H_n le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux $n+1$ triplets $(x_i, f(x_i), f'(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$. On a alors $\forall x \in [a, b]$, $\exists \xi_x \in (\min(x_i, x), \max(x_i, x))$, tels que

$$f(x) - H_n(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2 \quad (4.20)$$

 Exercice 4.2.3

Ecrire une fonction algorithmique **HERMITE** permettant de calculer H_n (polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux $n + 1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in [0, n]}$) en $t \in \mathbb{R}$.