Chapitre 3

Résolution de systèmes linéaires

3.1 Méthodes directes

3.1.2 Exercices et résultats préliminaires

Exercice 3.1.2: correction page 199

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ une matrice et $(\lambda, \boldsymbol{u})$ un élément propre de $\mathbb{A}$ avec $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$.

Q. 1 *En s'aidant de la base canonique* $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, *construire une base orthonormée* $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ *telle que* $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{u}$.

Notons $\mathbb{P}$ la matrice de changement de base canonique $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ dans la base $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$:

$$\mathbb{P} = \left(\begin{array}{c:c:c} \boldsymbol{x}_1 & \ldots & \boldsymbol{x}_n \end{array} \right)$$

Soit $\mathbb{B}$ la matrice définie par $\mathbb{B} = \mathbb{P}^* \mathbb{A} \mathbb{P}$.

Q. 2 1. *Exprimer les coefficients de la matrice* $\mathbb{B}$ *en fonction de la matrice* $\mathbb{A}$ *et des vecteurs* $\boldsymbol{x}_i$, $i \in [\![1, n]\!]$.

$$\mathbb{B} = \mathbb{P}^* \mathbb{A} \mathbb{P}.$$

2. *En déduire que la première colonne de* $\mathbb{B}$ *est* $(\lambda, 0, \ldots, 0)^t$.

Q. 3 *Montrer par récurrence sur l'ordre de la matrice que la matrice* $\mathbb{A}$ *s'écrit*

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*$$

où $\mathbb{U}$ *est une matrice unitaire et* $\mathbb{T}$ *une matrice triangulaire supérieure.*

Q. 4 *En supposant* $\mathbb{A}$ *inversible et la décomposition* $\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*$ *connue, expliquer comment résoudre "simplement" le système linéaire* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Théorème 3.1:

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe une matrice unitaire $\mathbb{U}$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{T}$ telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^* \tag{3.1}$$

Théorème 3.2: Réduction de matrices

1. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe une matrice **unitaire** $\mathbb{U}$ telle que $\mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U}$ soit **triangulaire**.
2. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice **normale**. Il existe une matrice **unitaire** $\mathbb{U}$ telle que $\mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U}$ soit **diagonale**.
3. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice **symétrique**. Il existe une matrice **orthogonale** $\mathbb{P}$ telle que $\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P}$ soit **diagonale**.

Exercice 3.1.3: Matrice d'élimination

Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ avec $v_1 \neq 0$. On note $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice triangulaire inférieure à diagonale unité définie par

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} = \left(\begin{array}{c:cccc} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \hdashline -v_2/v_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -v_n/v_1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array} \right) \tag{3.2}$$

Q. 1 1. *Calculer le déterminant de* $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$.

2. *Déterminer l'inverse de* $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$.

$\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $A_{1,1} \neq 0$. On note $\boldsymbol{A}_{:,j}$ le j-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{A}_{i,:}$ son i-ème vecteur ligne. On pose $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_{:,1}$.

Q. 2 1. *Calculer* $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}\mathbb{A}$ *en fonction des vecteurs lignes de* $\mathbb{A}$.

2. *Montrer que la première colonne de* $\tilde{\mathbb{A}}$ *est le vecteur* $(A_{1,1}, 0, \ldots, 0)^t$ *i.e.*

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = A_{1,1}\boldsymbol{e}_1 \tag{3.3}$$

où $\boldsymbol{e}_1$ *est le premier vecteur de la base canonique de* $\mathbb{C}^n$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{C})$ la matrice triangulaire inférieure à diagonale unité définie par

$$\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O} \\ \hdashline \mathbb{O} & \mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} \end{array} \right) \tag{3.4}$$

Q. 3 1. *Calculer le déterminant de* $\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]}$.

2. *Déterminer l'inverse de* $\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]}$ *en fonction de l'inverse de* $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$.

Soit $\mathbb{C}$ la matrice bloc définie par

$$\mathbb{C} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{C}_{1,1} & \mathbb{C}_{1,2} \\ \hdashline \mathbb{O} & \mathbb{A} \end{array} \right)$$

où $\mathbb{C}_{1,1} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}_{1,2} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

Q. 4 *Déterminer la matrice produit* $\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{A}_1]}\mathbb{C}$ *en fonction des matrices* $\mathbb{C}_{1,1}$, $\mathbb{C}_{1,2}$ *et* $\tilde{\mathbb{A}}$.

Lemme 3.3

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $A_{1,1} \neq 0$. Il existe une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité telle que

$$\mathbb{E}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = A_{1,1}\boldsymbol{e}_1 \tag{3.5}$$

où $\boldsymbol{e}_1$ est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Exercice 3.1.4: Matrice de permutation

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identitée dont on a permuté les lignes i et j.

Q. 1 *Représenter cette matrice et la définir proprement.*

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.On note $\boldsymbol{A}_{r,:}$ le r-ème vecteur ligne de $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{A}_{:,s}$ le s-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$.

Q. 2
1. *Déterminer $\mathbb{P}_n^{[i,j]}\mathbb{A}$ en fonction des vecteurs lignes de $\mathbb{A}$.*
2. *Déterminer $\mathbb{A}\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ en fonction des vecteurs colonnes de $\mathbb{A}$.*

Q. 3
1. *Calculer le déterminant de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.*
2. *Déterminer l'inverse de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.*

Lemme 3.4

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On note $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identitée dont on a permuté les lignes i et j. Alors la matrice $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ est **symétrique et orthogonale**. Pour toute matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

1. la matrice $\mathbb{P}_n^{[i,j]}\mathbb{A}$ est la matrice $\mathbb{A}$ dont on a permuté les **lignes** i et j,
2. la matrice $\mathbb{A}\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ est la matrice $\mathbb{A}$ dont on a permuté les **colonnes** i et j,

3.1.3 Méthode de Gauss-Jordan, écriture matricielle

Exercice 3.1.5

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible.

Q. 1 *Montrer qu'il existe une matrice $\mathbb{G} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det(\mathbb{G})| = 1$ et $\mathbb{G}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = \alpha\boldsymbol{e}_1$ avec $\alpha \neq 0$ et $\boldsymbol{e}_1$ premier vecteur de la base canonique de C^n.*

Q. 2
1. *Montrer par récurrence sur l'ordre des matrices que pour toute matrice $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, il existe une matrice $\mathbb{S}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det \mathbb{S}_n| = 1$ et $\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n$ avec $\mathbb{U}_n$ matrice triangulaire supérieure inversible.*
2. *Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$. En supposant connue la décompostion précédente $\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n$, expliquer comment résoudre le système $\mathbb{A}_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*

Q. 3 *Que peut-on dire si $\mathbb{A}$ est non inversible?*

Indication : utiliser les résultats des exercices 3.1.3 et 3.1.4.

Théorème 3.5

Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée, inversible ou non. Il existe (au moins) une matrice inversible $\mathbb{G}$ telle que $\mathbb{G}\mathbb{A}$ soit triangulaire supérieure.

3.1.4 Factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$

Exercice 3.1.6:

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les sous-matrices principales d'ordre i, notées Δ_i, $i \in [\![1,n]\!]$ (voir Definition B.48, page 188) sont inversibles.
Montrer qu'il existe des matrices $\mathbb{E}^{[k]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $k \in [\![1,n-1]\!]$, triangulaires inférieures à diagonale unité telles que la matrice $\mathbb{U}$ définie par

$$\mathbb{U} = \mathbb{E}^{[n-1]} \cdots \mathbb{E}^{[1]}\mathbb{A}$$

soit triangulaire supérieure avec $U_{i,i} = \det \Delta_i/(U_{1,1} \times \cdots \times U_{i-1,i-1})$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$.

Théorème 3.6: Factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les sous-matrices principales sont inversibles alors il existe une unique matrice $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure (*lower triangular* en anglais) à diagonale unité et une unique matrice $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure (*upper triangular* en anglais) inversible telles ques

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}.$$

Théorème 3.7: Factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$ avec permutations

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible. Il existe une matrice $\mathbb{P}$, produit de matrices de permutation, une matrice $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité et une matrice $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telles ques

$$\mathbb{P}\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}. \tag{3.6}$$

Corollaire 3.8:

Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice hermitienne définie positive alors elle admet une unique factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$.

3.1.5 Factorisation $\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$

Théorème 3.9: Factorisation $\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne inversible admettant une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$. Alors $\mathbb{A}$ s'écrit sous la forme

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^* \tag{3.7}$$

où $\mathbb{D} = \operatorname{diag} \mathbb{U}$ est une matrice à coefficients réels.

Corollaire 3.10:

Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$ avec $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs **si et seulement si** la matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive.

3.1.6 Factorisation de Cholesky

Definition 3.11

Une **factorisation régulière de Cholesky** d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une factorisation $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$ où $\mathbb{B}$ est une matrice triangulaire inférieure inversible.
Si les coefficients diagonaux de $\mathbb{B}$ sont positifs, on parle alors d'une **factorisation positive de Cholesky**.

Théorème 3.12: Factorisation de Cholesky

La matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une factorisation régulière de Cholesky **si et seulement si** la matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive. Dans ce cas, elle admet une unique factorisation positive.

3.1.7 Factorisation $\mathbb{QR}$

Definition 3.13: Matrice élémentaire de Householder

Soit $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$. On appelle **matrice élémentaire de Householder** la matrice $\mathbb{H}(\boldsymbol{u}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u}) = \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*. \tag{3.8}$$

Propriété 3.14

Toute matrice élémentaire de Householder est hermitienne et unitaire.

Propriété 3.15

Soient $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ et $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n$, $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$. On note $\boldsymbol{x}_\parallel = \operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{x}_\perp = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_\parallel$. On a alors

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x}_\perp + \boldsymbol{x}_\parallel) = \boldsymbol{x}_\perp - \boldsymbol{x}_\parallel. \tag{3.9}$$

et

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \quad \text{si } \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle = 0. \tag{3.10}$$

Théorème 3.16

Soient $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2$ et $\arg \alpha = -\arg \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \ [\pi]$. On a alors

$$\mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b}\|_2}\right) \boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{b}. \tag{3.11}$$

Exercice 3.1.7

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$. On va chercher $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$, vérifiant

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{b}. \tag{3.12}$$

Q. 1 *Montrer que si α et $\boldsymbol{u}$ vérifient (3.12) alors*

1. *on a*

$$|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2 \tag{3.13}$$

2. *on a*

$$\boldsymbol{a} - 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \rangle \boldsymbol{u} = \alpha \boldsymbol{b} \tag{3.14}$$

3. *on en déduit que*

$$|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \rangle|^2 = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle - \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}{2} \tag{3.15}$$

Nous allons maintenant établir une condition pour que (3.15) ait un sens.

Q. 2 *On suppose que $\arg \alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle) \ [\pi]$*

1. *Montrer que $\alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in \mathbb{R}$.*
2. *Montrer que $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle - \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in \mathbb{R}^{*+}$.*

Q. 3 *Soient α et $\boldsymbol{u}$ vérifiant (3.12). En déduire que si $\arg \alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle) \ [\pi]$ alors $\boldsymbol{u}$ est donné par*

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \rangle}(\boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b}). \tag{3.16}$$

et $\|u\|_2 = 1$.

Exercice 3.1.8

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$.

Q. 1 *Ecrire la fonction algorithmique* Householder *permettant de retourner une matrice de Householder $\mathbb{H}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{b}$. Le choix du α est fait par le paramètre δ (0 ou 1) de telle sorte que $\arg \alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle) + \delta\pi$ avec $|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2$.*
Des fonctions comme dot$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *(produit scalaire de deux vecteurs),* norm$(\boldsymbol{a})$ *(norme 2 d'un vecteur),* arg(z) *(argument d'un nombre complexe),* matprod$(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ *(produit de deux matrices),* ctranspose$(\mathbb{A})$ *(adjoint d'une matrice), ... pourront être utilisées*

Q. 2 *Proposer un programme permettant de tester cette fonction. On pourra utiliser la fonction* vecrand(n) *retournant un vecteur aléatoire de $\mathbb{C}^n$, les parties réelles et imaginaires de chacune de ses composantes étant dans $]0, 1[$ (loi uniforme).*

Q. 3 *Proposer un programme permettant de vérifier que $\delta = 1$ est le "meilleur" choix.*

Corollaire 3.17

Soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^n$ avec $a_1 \neq 0$ et $\exists j \in [\![2, n]\!]$ tel que $a_j \neq 0$. Soient $\theta = \arg a_1$ et

$$\boldsymbol{u}_\pm = \frac{\boldsymbol{a} \pm \|\boldsymbol{a}\|_2 e^{\imath\theta} \boldsymbol{e}_1}{\|\boldsymbol{a} \pm \|\boldsymbol{a}\|_2 e^{\imath\theta} \boldsymbol{e}_1\|}$$

Alors

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u}_\pm)\boldsymbol{a} = \mp \|\boldsymbol{a}\|_2 e^{\imath\theta} \boldsymbol{e}_1 \tag{3.17}$$

où $\boldsymbol{e}_1$ désigne le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Théorème 3.18

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice. Il existe une matrice unitaire $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ produit d'au plus $n-1$ matrices de Householder et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}. \tag{3.18}$$

Si $\mathbb{A}$ est réelle alors $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont aussi réelles et l'on peut choisir $\mathbb{Q}$ de telle sorte que les coefficients diagonaux de $\mathbb{R}$ soient positifs. De plus, si $\mathbb{A}$ est inversible alors la factorisation est unique.

Exercice 3.1.9

Soit $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{K})$ la matrice bloc

$$\mathbb{B} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hdashline \mathbb{O} & \mathbb{S} \end{array}\right)$$

où $\mathbb{B}_{1,1} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ et $\mathbb{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\boldsymbol{s} \in \mathbb{K}^n$ le premier vecteur colonne de $\mathbb{S}$ et on suppose que $\boldsymbol{s} \neq 0$ et $\boldsymbol{s}$ non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^n$ premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Q. 1 1. *Montrer qu'il existe une matrice de Householder* $\underline{\mathbb{H}} = \mathbb{H}(\underline{\boldsymbol{u}}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}^*$ *tel que*

$$\underline{\mathbb{H}}\mathbb{S} = \left(\begin{array}{c:ccc} \pm\alpha & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hdashline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right).$$

2. *On note* $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^{m+n}$, *le vecteur défini par* $u_i = 0$, $\forall i \in [\![1, m]\!]$ *et* $u_{m+i} = \underline{u_i}$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$. *Montrer que*

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{B} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hdashline \mathbb{O} & \underline{\mathbb{H}}\mathbb{S} \end{array}\right).$$

Soient $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $\mathbb{A}^{[k]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice bloc définie par

$$\mathbb{A}^{[k]} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{R}^{[k]} & \mathbb{F}^{[k]} \\ \hdashline \mathbb{O} & \underline{\mathbb{A}^{[k]}} \end{array}\right)$$

où $\mathbb{R}^{[k]}$ est une matrice triangulaire supérieure d'ordre k et $\underline{\mathbb{A}^{[k]}}$ une matrice d'ordre $n-k$.

Q. 2 1. *Sous certaines hypothèses, montrer qu'il existe une matrice de Householder* $\mathbb{H}^{[k+1]}$ *telle que* $\mathbb{H}^{[k+1]}\mathbb{A}^{[k]} = \mathbb{A}^{[k+1]}$.

2. *Soit* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Montrer qu'il existe une matrice unitaire* $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *produit d'au plus* $n-1$ *matrices de Housholder, et une matrice triangulaire supérieure* $\mathbb{R}$ *telles que* $\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}$.

3. *Montrer que si* $\mathbb{A}$ *est réelle alors les coefficient diagonaux de* $\mathbb{R}$ *peuvent être choisis positifs ou nuls.*

4. *Montrer que si* $\mathbb{A}$ *est réelle inversible alors la factorisation* $\mathbb{Q}\mathbb{R}$, *avec* $\mathbb{R}$ *à coefficient diagonaux strictement positifs, est unique.*

Exercice 3.1.10: Algorithmique

Q. 1 *Ecrire une fonction* FactQR *permettant de calculer la factorisation* $\mathbb{Q}\mathbb{R}$ *d'une matrice* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On pourra utiliser la fonction Householder *(voir Exercice 3.1.8, page 7).*

Q. 2 *Ecrire un programme permettant de tester cette fonction.*