Exercice

Etant donné une norme vectorielle $\|\bullet\|$ sur $\mathbb{K}^n$, on défini l'application $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ par

$$\|\mathbb{A}\|_s \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \tag{P-1}$$

Q. 1 *Montrer que* $\|\mathbb{I}\|_s = 1$.

On note $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \,;\, \|\boldsymbol{v}\| \leqslant 1\}$ la boule unitée de $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \,;\, \|\boldsymbol{v}\| = 1\}$ la sphère unitée de $\mathbb{K}^n$.

Q. 2 1. *Montrer que* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{S}$ *sont des compacts.*

2. *Montrer que*

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \tag{P-2}$$

3. *En déduire que*

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{B}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \tag{P-3}$$

4. *En déduire que l'application* $\|\bullet\|_s$ *est bien définie sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *i.e.* $\forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|\mathbb{A}\|_s < +\infty$.

Q. 3 1. *Montrer*

$$\|\mathbb{A}\|_s \leqslant \inf \left\{\alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha \|\boldsymbol{v}\|,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\right\}.$$

2. *Montrer qu'il existe* $\boldsymbol{w} \in \mathcal{S}$ *tel que* $\|\mathbb{A}\|_s = \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\|$.

3. *En déduire que*

$$\|\mathbb{A}\|_s = \inf \left\{\alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha \|\boldsymbol{v}\|,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\right\}. \tag{P-4}$$

Q. 4 1. *Montrer que* $\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$, $\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{v}\|$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Montrer qu'il existe $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\|\boldsymbol{u}\| = |\lambda|$ vérifiant

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{u}\|.$$

Q. 5 *Montrer que $\|\bullet\|_s$ est une norme matricielle.*

Correction Exercice

Q. 1 On a immédiatement

$$\|\mathbb{I}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{I}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = 1.$$

Q. 2

1. Les ensembles $\mathcal{B}$ et $\mathcal{S}$ sont des compacts car image réciproque de l'application continue $\boldsymbol{v} \mapsto \|\boldsymbol{v}\|$ par le fermé borné $[0, 1]$ (pour la boule) et le singleton $\{1\}$ (pour la sphère).

2. On a

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \left\|\mathbb{A}\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}\right\| = \sup_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|$$

3. Comme $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ on a aussi

$$\sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{B}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \geqslant \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|. \tag{P-5}$$

On peut aussi remarquer que

$$\sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{B}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathcal{B} \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \tag{P-6}$$

De plus, $\forall \boldsymbol{w} \in \mathcal{B}\backslash\{0\}$, en posant $\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|} \in \mathcal{S}$. on a $\boldsymbol{w} = \|\boldsymbol{w}\| \boldsymbol{u}$ et

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\| = \|\boldsymbol{w}\| \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| \leqslant \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| \text{ car } \|\boldsymbol{w}\| \leqslant 1.$$

Or on a

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| \leqslant \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|.$$

et on obtient alors

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{w}\in\mathcal{B}\\ \boldsymbol{w}\neq 0}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\| \leqslant \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|.$$

En utilisant (P-5) et (P-6), on en déduit

$$\sup_{\boldsymbol{w}\in\mathcal{B}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\| = \sup_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|.$$

4. L'application $\boldsymbol{v} \mapsto \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|$ est continue donc son sup sur la sphère unitée qui est compacte est atteint.

Q. 3 1. Comme $\|\bullet\|_s$ est bien définie il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $\|\mathbb{A}\|_s \leqslant \alpha$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $\|\mathbb{A}\|_s \leqslant \alpha$. On a

$$\begin{aligned}\|\mathbb{A}\|_s \leqslant \alpha &\Leftrightarrow \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \leqslant \alpha\\ &\Leftrightarrow \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \leqslant \alpha, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}\\ &\Leftrightarrow \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha \|\boldsymbol{v}\|, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}\\ &\Leftrightarrow \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha \|\boldsymbol{v}\|, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|\mathbb{A}\|_s \leqslant \inf\{\alpha \in \mathbb{R} \ : \ \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha \|\boldsymbol{v}\|, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\} \tag{P-7}$$

2. Comme $\mathcal{S}$ est compact et l'application $\boldsymbol{v} \mapsto \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|$ est continue, il existe $\boldsymbol{w} \in \mathcal{S}$ tel que

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\|.$$

3. On en déduit $\|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{w}\| = \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\|$ car $\|\boldsymbol{w}\| = 1$. On a alors

$$\|\mathbb{A}\|_s \in \{\alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha \|\boldsymbol{v}\|, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\}$$

et donc

$$\inf\{\alpha \in \mathbb{R} \ : \ \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha \|\boldsymbol{v}\|, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\} \leqslant \|\mathbb{A}\|_s.$$

On conclut en utilisant (P-7).

Q. 4 1. On a par définition du sup

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{u}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|}{\|\boldsymbol{u}\|} \geqslant \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|}, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\backslash\{0\}.$$

et donc

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{v}\|, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\backslash\{0\}.$$

qui est équivalent à

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{v}\|, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n.$$

2. D'après la **Q. 3** 2. ,il existe $\boldsymbol{w} \in \mathcal{S}$ tel que $\|\mathbb{A}\|_s = \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\|$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{w} \neq 0$. On a $\|\boldsymbol{u}\| = |\lambda|$ et

$$\|\mathbb{A}\|_s = \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\| = \left\|\mathbb{A}\frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}\right\| = \frac{1}{\|\boldsymbol{u}\|}\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| \Leftrightarrow \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{u}\| = \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|$$

Q. 5 • $\|\mathbb{A}\|_s = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{A}_s = \mathbb{O}$?

$\boxed{\Longleftarrow}$ trivial.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned}\|\mathbb{A}\|_s = 0 = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} &\Longrightarrow \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = 0,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\backslash\{0\}\\ &\Longrightarrow \mathbb{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0},\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\backslash\{0\}\end{aligned}$$

Soit $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On a alors $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{A}\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{0}$ et on en déduit que

$$\mathrm{A}_{i,j} = \langle \boldsymbol{e}_i, \mathbb{A}\boldsymbol{e}_j\rangle = 0,\ \forall (i,j) \in [\![1, n]\!].$$

et donc $\mathbb{A} = \mathbb{O}$.

- Montrons que $\|\alpha\mathbb{A}\| = |\alpha|\,\|\mathbb{A}\|$, $\forall\alpha\in\mathbb{K}$, $\forall\mathbb{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,.
  Soient $\alpha\in\mathbb{K}$ et $\mathbb{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\alpha\mathbb{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel) et

$$\begin{aligned}
\|\alpha\mathbb{A}\|_s &= \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\alpha\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{|\alpha|\,\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \quad \text{car } \|\alpha\boldsymbol{u}\| = |\alpha|\,\|\boldsymbol{u}\| \\
&= |\alpha| \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = |\alpha|\,\|\mathbb{A}\|_s\,.
\end{aligned}$$

- Montrons que $\|\mathbb{A}+\mathbb{B}\|_s \leqslant \|\mathbb{A}\|_s + \|\mathbb{B}\|_s\,,\ \forall\,(\mathbb{A},\mathbb{B})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$
  Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\mathbb{A}+\mathbb{B}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel et

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{A}+\mathbb{B}\|_s &= \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|(\mathbb{A}+\mathbb{B})\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}+\mathbb{B}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \\
&\leqslant \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|+\|\mathbb{B}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \quad \text{par inégalité triangulaire dans } \mathbb{K}^n \\
&\leqslant \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} + \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{B}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \|\mathbb{A}\|_s + \|\mathbb{B}\|_s\,.
\end{aligned}$$

- Montrons que $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\|_s \leqslant \|\mathbb{A}\|_s\,\|\mathbb{B}\|_s\,,\ \forall\,(\mathbb{A},\mathbb{B})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.
  Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\mathbb{A}\mathbb{B}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par définition du produit matriciel et

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{A}\mathbb{B}\|_s &= \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|(\mathbb{A}\mathbb{B})\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}(\mathbb{B}\boldsymbol{v})\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \\
&\leqslant \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\|_s\,\|\mathbb{B}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \quad \text{car } \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s\,\|\boldsymbol{u}\| \ \ \forall\boldsymbol{u}\in\mathbb{K}^n \\
&\leqslant \|\mathbb{A}\|_s \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{B}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \|\mathbb{A}\|_s\,\|\mathbb{B}\|_s\,.
\end{aligned}$$