Exercice

Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$.

Q. 1 *Trouver* $\alpha \in \mathbb{C}$ *tel que* $\langle \alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle = 0$.

Q. 2 *En calculant* $\|\alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2^2$, *montrer que*

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2 \|\boldsymbol{y}\|_2 . \tag{P-1}$$

Q. 3 *Soit* $\boldsymbol{x} \neq 0$. *Montrer alors que l'inégalité (P-1) est une égalité si et seulement si* $\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}$.

Correction Exercice

Q. 1
- Si $\boldsymbol{x} = 0$, alors α quelconque.
- Si $\boldsymbol{x} \neq 0$, alors

$$\langle \alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle = 0 \iff \overline{\alpha}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle = 0$$

Or $\boldsymbol{x} \neq 0$, ce qui donne

$$\overline{\alpha} = \frac{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}.$$

et , comme $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle \in \mathbb{R}$ et $\overline{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$, on obtient

$$\alpha = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}. \tag{P-2}$$

Q. 2 On a

$$\begin{aligned}
\|\alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2^2 &= \langle \alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\rangle \\
&= \alpha\langle \alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle - \langle \alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \\
&= -\langle \alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle, \quad \text{car } \langle \alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle = 0 \\
&= -\overline{\alpha}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle
\end{aligned}$$

En utilisant (P-2), on obtient alors

$$\begin{aligned}\|\alpha\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2^2 &= -\frac{\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle}{\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle}\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle+\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle\\ &= \frac{-\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle+\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle}{\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle}\end{aligned}$$

Comme $\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle=\overline{\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle}$, on a $\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=|\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle|^2$ et donc

$$\begin{aligned}\|\alpha\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2^2 &= \frac{1}{\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle}\left(-|\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle|^2+\|\boldsymbol{x}\|_2^2\|\boldsymbol{y}\|_2^2\right)\\ &\geqslant 0.\end{aligned}\tag{P-3}$$

On a alors

$$|\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle|^2\leqslant\|\boldsymbol{x}\|_2^2\|\boldsymbol{y}\|_2^2$$

La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ étant croissante sur $[0;+\infty[$, on obtient (P-1).

Q. 3 Soit $\boldsymbol{x}\neq 0$. On veut montrer que

$$|\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle|=\|\boldsymbol{x}\|_2\|\boldsymbol{y}\|_2 \iff \boldsymbol{y}=\alpha\boldsymbol{x}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $\boldsymbol{y}=\alpha\boldsymbol{x}$. On a alors

$$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\alpha\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=\alpha\|\boldsymbol{x}\|_2^2 \implies |\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle|=|\alpha|\|\boldsymbol{x}\|_2^2.$$

Comme $\|\boldsymbol{y}\|_2=|\alpha|\|\boldsymbol{x}\|_2$, on a aussi

$$\|\boldsymbol{x}\|_2\|\boldsymbol{y}\|_2=|\alpha|\|\boldsymbol{x}\|_2^2.$$

On en déduit alors

$$|\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle|=\|\boldsymbol{x}\|_2\|\boldsymbol{y}\|_2.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| = \|\boldsymbol{x}\|_2 \|\boldsymbol{y}\|_2$. Avec cette hypothèse, l'équation (P-3) devient

$$\|\alpha \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2^2 = 0$$

et donc $\alpha \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = 0$, c'est à dire $\boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{x}$.

$\diamond$