Exercice

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathbb{B} = \mathbb{A}^*\mathbb{A}$.

Q. 1 *Soit* $(\lambda, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ *un élément propre de* $\mathbb{B}$.

1. *Montrer que la matrice* $\mathbb{B}$ *est hermitienne.*

2. *Montrer que les valeurs propres de* $\mathbb{B}$ *sont réelles.*

3. *En déduire que*

$$\lambda = \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|_2^2}{\|\boldsymbol{u}\|_2^2}.$$

La matrice $\mathbb{B}$ étant hermitienne (elle est donc normale), d'après le Théorème de réduction 3.2 page 63, il existe alors une matrice $\mathbb{U}$ unitaire et une matrice $\mathbb{D}$ diagonale telle que

$$\mathbb{B} = \mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^*.$$

On note $(\lambda_i, \boldsymbol{e}_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ les éléments propres de $\mathbb{D}$. Les vecteurs $\boldsymbol{e}_i$ sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $\lambda_i = \mathbb{D}_{ii}$.

Q. 2

1. *Démontrer que les* $(\lambda_i, \boldsymbol{v}_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ *sont les éléments propres de* $\mathbb{B}$ *où* $\boldsymbol{v}_i$ *est le i-ème vecteur colonne de* $\mathbb{U}$.

2. *En déduire que* $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ *est une base orthonormée de* $\mathbb{C}^n$.

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1$ décomposée dans la base $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$:

$$\exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \text{tels que } \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i.$$

Q. 3 1. *Montrer que*

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 = 1.$$

2. *Montrer que*

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n \\ \|\boldsymbol{v}\|_2=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|_2^2 \leqslant \rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A}).$$

3. *Déterminer un vecteur* $\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^n$, *tel que*

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\|_2^2 = \rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A}).$$

4. *En déduire que*

$$\|\mathbb{A}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{x}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A})}.$$

Q. 4 1. *Montrer que la norme* $\|\bullet\|_2$ *est invariante par transformation unitaire :*

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I} \Longrightarrow \|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 = \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 .$$

2. *Montrer que si* $\mathbb{A}$ *est hermitienne alors*

$$\|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A}).$$

Correction Exercice

Q. 1 1. Il faut montrer que $\mathbb{B} = \mathbb{B}^*$. Or on a

$$\mathbb{B}^* = \left(\mathbb{A}^*\mathbb{A}\right)^* = \mathbb{A}^*\left(\mathbb{A}^*\right)^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A} = \mathbb{B}.$$

2. Comme $(\lambda, \boldsymbol{u})$ est un élément propre de $\mathbb{B}$, on a $\mathbb{B}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$. On en déduit que

$$\langle \mathbb{B}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \langle \lambda\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \overline{\lambda} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \overline{\lambda} \|\boldsymbol{u}\|_2^2 .$$

De plus par propriété du produit scalaire, on a

$$\langle \mathbb{B}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \mathbb{B}^* \boldsymbol{u} \rangle .$$

Comme $\mathbb{B}$ est hermitienne, on obtient

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{B}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle &= \langle \boldsymbol{u}, \mathbb{B}\boldsymbol{u} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{u}, \lambda\boldsymbol{u} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \lambda \|\boldsymbol{u}\|_2^2 .\end{aligned}$$

On a donc

$$\lambda \|\boldsymbol{u}\|_2^2 = \overline{\lambda} \|\boldsymbol{u}\|_2^2$$

et comme $\|\boldsymbol{u}\|_2 \neq 0$ ($\boldsymbol{u}$ est un vecteur propre) on obtient $\lambda = \overline{\lambda}$, c'est à dire $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. On a

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{B}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle &= \langle \mathbb{A}^*\mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \\ &= \langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \mathbb{A}\boldsymbol{u} \rangle \quad \text{par propriété du produit scalaire} \\ &= \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|_2^2 .\end{aligned}$$

De plus, on a vu que $\langle \mathbb{B}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \lambda \|\boldsymbol{u}\|_2^2$ avec $\|\boldsymbol{u}\|_2 > 0$. On en déduit alors

$$\lambda = \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|_2^2}{\|\boldsymbol{u}\|_2^2} \geqslant 0.$$

Q. 2 1. On a $\mathbb{B} = \mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^*$. Or $\mathbb{U}$ est unitaire, donc inversible d'inverse $\mathbb{U}^*$. En multipliant à gauche par $\mathbb{U}^*$ et à droite par $\mathbb{U}$ on obtient

$$\mathbb{U}^*\mathbb{B}\mathbb{U} = \mathbb{U}^*(\mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^*)\mathbb{U} = (\mathbb{U}^*\mathbb{U})\mathbb{D}(\mathbb{U}^*\mathbb{U}) = \mathbb{D}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}\mathbb{D}\boldsymbol{e}_i = \lambda_i \boldsymbol{e}_i &\iff \mathbb{U}^*\mathbb{B}\mathbb{U}\boldsymbol{e}_i = \lambda_i \boldsymbol{e}_i \\ &\iff \mathbb{B}\mathbb{U}\boldsymbol{e}_i = \lambda_i \mathbb{U}\boldsymbol{e}_i.\end{aligned}$$

C'est à dire en posant $\boldsymbol{v}_i = \mathbb{U}\boldsymbol{e}_i$ (i-ème vecteur colonne de $\mathbb{U}$), les éléments propres de $\mathbb{B}$ sont les $(\lambda_i, \boldsymbol{v}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$. On peut noter que $\boldsymbol{v}_i \neq 0$ car $\mathbb{U}$ est inversible.

2. On a

$$\mathbb{U} = \left(\begin{array}{c:c:c} \boldsymbol{v}_1 & \dots & \boldsymbol{v}_n \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{U}^* = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{v}_1^* \\ \hdashline \boldsymbol{v}_2^* \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \boldsymbol{v}_n^* \end{array}\right)$$

On a donc

$$\mathbb{U}^*\mathbb{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1^*\boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_1}^*\boldsymbol{v}_2 & \dots & \boldsymbol{v_1}^*\boldsymbol{v}_n \\ \boldsymbol{v}_2^*\boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v}_2^*\boldsymbol{v}_2 & \dots & \boldsymbol{v}_2^*\boldsymbol{v}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{v}_n^*\boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v}_n^*\boldsymbol{v}_2 & \dots & \boldsymbol{v}_n^*\boldsymbol{v}_n \end{pmatrix}$$

et donc

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (\mathbb{U}^*\mathbb{U})_{i,j} = \boldsymbol{v}_i^*\boldsymbol{v}_j = \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle.$$

Comme $\mathbb{U}$ est unitaire, on a $\mathbb{U}^*\mathbb{U} = \mathbb{I}$ et donc

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (\mathbb{U}^*\mathbb{U})_{i,j} = \delta_{i,j}.$$

On en déduit alors

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

$\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ est donc une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$.

Q. 3 1. On peut voir que

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \boldsymbol{v}_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} \alpha_j \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} \alpha_i \text{ car } \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = \delta_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2.
\end{aligned}$$

De plus $\|\boldsymbol{x}\|_2^2 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 1$.

2. On a

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_2^2 &= \langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{A}^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{B}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{B}\boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \boldsymbol{v}_j \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \boldsymbol{v}_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i}\overline{\lambda_i} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |\alpha_i|^2 \quad \text{car } \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ et } \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = \delta_{ij} \\
&\leqslant \big(\max_{i \in [\![1,n]\!]} \lambda_i \big) \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 = \rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A}) \quad \text{car } \lambda_i \geqslant 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 = 1.
\end{aligned}$$

On en déduit alors
$$\sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n\\ \|\boldsymbol{v}\|_2=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|_2^2 \leqslant \rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A}).$$

3. Pour démontrer que l'on a en fait égalité il suffit de trouver un vecteur la vérifiant, c'est à dire un vecteur $\boldsymbol{w}\in\mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{w}\|_2 = 1$, tel que
$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\|_2^2 = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \lambda_i$$
où les λ_i sont positifs ou nuls (valeurs propres de $\mathbb{B}$. Pour celà on note $k \in [\![1,n]\!]$ l'indice tel que $\lambda_k = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \lambda_i$. En choisissant $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_k$ (qui est de norme 1) on obtient alors
$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}_k\|_2^2 = \langle \mathbb{A}\boldsymbol{v}_k, \mathbb{A}\boldsymbol{v}_k\rangle = \langle \mathbb{A}^*\mathbb{A}\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_k\rangle = \langle \lambda_k\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_k\rangle = \lambda_k = \rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A}).$$

4. D'après la proposition/définition des normes matricielles suboordonnées, on a
$$\|\mathbb{A}\|_2 = \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n\\ \|\boldsymbol{x}\|_2=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_2 .$$
En utilisant les résultats de **Q.3**, 2. et 3., on obtient
$$\|\mathbb{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A})}.$$

Q. 4 1. Soit $\mathbb{U}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, i.e.
$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{U}^*\mathbb{U} = \mathbb{I}.$$

- Montrons que $\|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2$.
  On a $\|\mathbb{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A})}$ et donc
$$\|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2 = \sqrt{\rho((\mathbb{U}\mathbb{A})^*\mathbb{U}\mathbb{A})} = \sqrt{\rho(A^*(\mathbb{U}^*\mathbb{U})\mathbb{A})} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A})} = \|\mathbb{A}\|_2 .$$

- Montrons que $\|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2$.
  On a
$$\|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 \stackrel{\mathsf{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n\\ \boldsymbol{x}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbb{U}\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2}.$$
  En posant $\boldsymbol{y} = \mathbb{U}\boldsymbol{x}$, on a $\boldsymbol{x} = \mathbb{U}^*\boldsymbol{y}$ car $\mathbb{U}^{\text{-}1} = \mathbb{U}^*$ ($\mathbb{U}$ étant unitaire). Comme $\mathbb{U}$ est inversible on a
$$\left\{\mathbb{U}^*\boldsymbol{y},\ \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n\backslash\{0\}\right\} = \mathbb{C}^n\backslash\{0\}$$
$$\sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n\\ \boldsymbol{x}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbb{U}\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} = \sup_{\substack{\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^n\\ \boldsymbol{y}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{y}\|_2}{\|\mathbb{U}^*\boldsymbol{y}\|_2}.$$
  De plus, on a
$$\|\mathbb{U}^*\boldsymbol{y}\|_2^2 = \langle \mathbb{U}^*\boldsymbol{y}, \mathbb{U}^*\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{y}, \mathbb{U}\mathbb{U}^*\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle = \|\boldsymbol{y}\|_2^2$$
  et donc $\|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 = \|\mathbb{A}\|_2$.
- Montrons que $\|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2$.
  Ceci découle des deux égalités précédentes. En effet,
$$\begin{aligned} \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 &= \|\mathbb{U}^*(\mathbb{A}\mathbb{U})\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 && \text{car } \mathbb{U}^* \text{ unitaire}\\ &= \|\mathbb{A}\|_2 && \text{car } \mathbb{U} \text{ unitaire} \end{aligned}$$

$\diamond$