Exercice

Q. 1 *Soit la fonction $f(t) = (1-\lambda) + \lambda t - t^{\lambda}$ avec $0 < \lambda < 1$. Montrer que pour tous $\alpha \geqslant 0$ et $\beta \geqslant 0$ on a*

$$\alpha^{\lambda}\beta^{1-\lambda} \leqslant \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta. \tag{P-1}$$

Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{C}^n$. Soient $p > 1$ et $q > 1$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Q. 2 *On pose $\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_p}$ et $\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|_q}$. En utilisant l'inégalite (P-1), montrer que l'on a l'inégalité*

$$\sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| \leqslant \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} |v_i|^q = 1. \tag{P-2}$$

Q. 3 *En déduire l'inégalité de Holder suivante*

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q . \tag{P-3}$$

Quel est le lien entre l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Cauchy-Schwarz?

Correction Exercice

Q. 1 L'inégalité (P-1) est vérifiée si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$. Il nous reste donc à la vérifier pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Dans ce cas (P-1) s'écrit

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\lambda} \leqslant \lambda\frac{\alpha}{\beta} + (1-\lambda)$$

c'est à dire

$$f(\frac{\alpha}{\beta}) \geqslant 0.$$

Montrons que $f(t) \geqslant 0$, $\forall t \in]0, +\infty[$.
On a $f'(t) = \lambda(1 - t^{\lambda-1})$ et

$$f'(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - t^{\lambda-1} = 0, \text{car } \lambda \neq 0$$

De plus, on a $t^{\lambda-1} = e^{(\lambda-1)\ln(t)}$ et comme $\lambda - 1 \neq 0$, on obtient

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

- Etudions la fonction sur $]0, 1[$. On a pour $t \in]0, 1[$, $\ln(t) < 0$ et donc $(\lambda - 1)\ln(t) > 0$. Comme la fonction exp est croissante, on en déduit $\exp((\lambda - 1)\ln(t)) > 1$ et alors $f'(t) < 0$.

- Etudions la fonction sur $]1, +\infty[$. On a pour $t \in]1, +\infty[$, $\ln(t) > 0$ et donc $(\lambda - 1)\ln(t) < 0$. Comme la fonction exp est croissante, on en déduit $0 < \exp((\lambda - 1)\ln(t)) < 1$ et alors $f'(t) > 0$.

Le minimum de f est donc atteint en $t = 1$ et on a

$$\forall t \in]0, +\infty[, \;\; f(x) \geqslant f(1) = 0.$$

L'inégalité (P-1) est donc vérifiée $\forall \alpha \geqslant 0$, $\forall \beta \geqslant 0$ et $\forall \lambda \in]0, 1[$.

Q. 2 On pose $\lambda = \frac{1}{p} \in]0, 1[$. on a alors $1 - \lambda = \frac{1}{q}$. On pose

$$\alpha = |u_i|^p \geqslant 0, \quad \beta = |v_i|^q \geqslant 0.$$

En utilisant (P-1), on obtient directement

$$|u_i||v_i| \leqslant \frac{1}{p}|u_i|^p + \frac{1}{q}|v_i|^q, \;\; \forall i \in [\![1, n]\!].$$

En sommant sur i on obtient:

$$\sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| \leqslant \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} |v_i|^q = \frac{1}{p}\left\|\boldsymbol{u}\right\|_p^p + \frac{1}{q}\left\|\boldsymbol{v}\right\|_q^q$$

Comme par construction $\|\boldsymbol{u}\|_p = \|\boldsymbol{v}\|_q = 1$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Q. 3 Par construction, on a

$$\sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q} \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|$$

et donc en utilisant l'inégalité (P-3) on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q .$$

De plus

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| = |\sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\overline{x}_i y_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q .$$

Pour $p = q = 2$, l'inégalité de Hölder entraine l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$\diamond$