

Analyse Numérique I
Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 1ère année

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2022/09/19

Plan du cours

- Chapitre 1: Erreurs : arrondis, bug and Co.
- Chapitre 2: Langage algorithmique
- Chapitre 3: Rappels algèbre linéaire**
- Chapitre 4: Résolution de systèmes non-linéaires
- Chapitre 5: Résolution de systèmes linéaires
- Chapitre 6: Polynômes d'interpolation
- Chapitre 7: Intégration numérique

Résultats connus

 Proposition 1.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes

- 1 A est inversible,
- 2 $\text{rank}(A) = n$,
- 3 $x \in \mathbb{K}^n, Ax = 0 \Rightarrow x = 0$, (i.e. $\ker A = \{0\}$)
- 4 $\det(A) \neq 0$,
- 5 toutes les valeurs propres de A sont non nulles,
- 6 il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I$,
- 7 il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $BA = I$.

 Exercice

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, montrer que

$$(AB)^t = B^t A^t, \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$(AB)^* = B^* A^*, \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \quad (2)$$

 Exercice

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles. Montrer que AB inversible et

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t, \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad (3)$$

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*, \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \quad (4)$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \quad (5)$$

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad (6)$$

Matrices particulières

 Definition 2.1

Une matrice **carrée** A est :

- ◊ **symétrique** si A est réelle et $A = A^t$,
- ◊ **hermitienne** si $A = A^*$,
- ◊ **normale** si $AA^* = A^*A$,
- ◊ **orthogonale** si A est réelle et $AA^t = A^tA = I$,
- ◊ **unitaire** si $AA^* = A^*A = I$,

 Definition

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n$ est :

- ◊ **diagonale** si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$,
- ◊ **triangulaire supérieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$,
- ◊ **triangulaire inférieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$,
- ◊ **triangulaire** si elle est triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure
- ◊ **à diagonale dominante** si

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \forall i \in [1, n], \quad (7)$$

- ◊ **à diagonale strictement dominante** si

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \forall i \in [1, n]. \quad (8)$$

Proposition

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses éléments diagonaux

⇒ Exercice!

Proposition

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaires inférieures (resp. triangulaires supérieures). Alors la matrice AB est aussi triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure).
De plus on a

$$(AB)_{i,i} = A_{i,i}B_{i,i}, \forall i \in [1, n].$$

⇒ Exercice!

Proposition

Soit A $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure).

- A est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls (i.e. $A_{i,i} \neq 0, \forall i \in [1, n]$).
- Si A est inversible alors son inverse est triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure) et

$$(A^{-1})_{i,i} = \frac{1}{(A)_{i,i}}$$

Matrices blocs

♥ Définition

On appelle **matrice bloc** une matrice $A \in \mathcal{M}_{N,M}$ écrite sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p,1} & \cdots & A_{p,q} \end{pmatrix}$$

où $\forall i \in [1, p], \forall j \in [1, q], A_{i,j}$ est une matrice de \mathcal{M}_{n_i, m_j} . On a $N = \sum_{i=1}^p n_i$ et $M = \sum_{j=1}^q m_j$.

On dit que A est une matrice **bloc-carrée** si $p = q$ et si tous les blocs diagonaux sont des matrices carrées.

Exercice

Proposer une écriture matrice bloc-carrée de chacune des matrices suivantes:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 8 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Proposition: Multiplication de matrices blocs

Soient A $\in \mathcal{M}_{N,M}$ et B $\in \mathcal{M}_{M,S}$. Le produit $P = AB \in \mathcal{M}_{N,S}$ peut s'écrire sous forme bloc si les matrices A et B sont *compatibles par blocs* : il faut que le nombre de blocs colonne de A soit égale au nombre de blocs ligne de B avec correspondance des dimensions, i.e.:

Exercice

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Utiliser la multiplication par blocs pour calculer AB.

Definition

On dit qu'une matrice bloc-carrée A est **triangulaire inférieure** (resp. **supérieure**) **par blocs** si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices $A_{i,j} = 0$ pour $i < j$ (resp. $i > j$). Elle s'écrit donc sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix} \quad (\text{resp. } A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & \dots & A_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}).$$

Definition

On dit qu'une matrice bloc-carrée A est **diagonale par blocs** ou **bloc-diagonale** si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices $A_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$. Elle s'écrit donc sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

Proposition

Soit A une matrice bloc-carrée décomposée en $n \times n$ blocs, $n \geq 2$. Si A est **bloc-diagonale** ou **triangulaire par blocs** alors son déterminant est le produit des déterminant des blocs diagonaux :

$$\det A = \prod_{i=1}^n \det A_{i,i} \quad (9)$$

Exercice

Soient $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q.1 Donner les dimensions des blocs pour que le produit suivant soit possible et effectuer le calcul:

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$$

où I_1 et I_2 sont des matrices identités.

Q.2 En déduire le déterminant de A en fonction des déterminants de E et F .

Q.3 Démontrer par récurrence la proposition.

Proposition

Soit A une matrice bloc-carrée **inversible** décomposée en $n \times n$ blocs.

- Si A est **bloc-diagonale** alors son inverse (décomposée en $n \times n$ blocs) est aussi **bloc-diagonale**.
- Si A est **triangulaire inférieure par blocs** (resp. supérieure) alors son inverse (décomposée en $n \times n$ blocs) est aussi **triangulaire inférieure par blocs** (resp. supérieure).

Dans ces deux cas les blocs diagonaux de la matrice inverse sont les inverses des blocs diagonaux de A . On a donc

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{1,1}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{n,n}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{1,1}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{n,n}^{-1} \end{pmatrix}$$

Autres résultats

Exercice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice et (λ, u) un élément propre de A avec $|u|_2 = 1$.

Q.1 En s'aidant de la base canonique $\{e_1, \dots, e_n\}$, construire une base orthonormée $\{x_1, \dots, x_n\}$ telle que $x_1 = u$.

Notons P la matrice de changement de base canonique $\{e_1, \dots, e_n\}$ dans la base $\{x_1, \dots, x_n\}$:

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ x_1 & \dots & x_n \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Soit B la matrice définie par $B = P^*AP$.

Q.2

• Exprimer les coefficients de la matrice B en fonction de la matrice A et des vecteurs x_i , $i \in [1, n]$.

$$B = P^*AP.$$

• En déduire que la première colonne de B est $(\lambda, 0, \dots, 0)^t$.

Q.3 Montrer par récurrence sur l'ordre de la matrice que la matrice A s'écrit

$$A = UTU^*$$

où U est une matrice unitaire et T une matrice triangulaire supérieure.

Q.4 En supposant A inversible et la décomposition $A = UTU^*$ connue, expliquer comment résoudre "simplement" le système linéaire $Ax = b$.

Théorème 5: Décomposition de Schur ★★★★★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe une matrice unitaire U et une matrice triangulaire supérieure T telles que

$$A = UTU^* \quad (10)$$

Théorème 6: Réduction de matrices ★★★★★

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe une matrice **unitaire** U telle que $U^{-1}AU$ soit **triangulaire**.

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice **normale**. Il existe une matrice **unitaire** U telle que $U^{-1}AU$ soit **diagonale**.

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice **symétrique**. Il existe une matrice **orthogonale** P telle que $P^{-1}AP$ soit **diagonale**.

Proposition 6.1

- une matrice symétrique ou hermitienne est nécessairement normale.
- une matrice orthogonale (resp. unitaire) est nécessairement normale et inversible d'inverse A^t (resp. A^*).

♥ **Definition 6.2**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice **hermitienne**.

- ◊ Elle est **définie positive** si

$$\langle Au, u \rangle > 0, \forall u \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \quad (11)$$

- ◊ Elle est **semi définie positive** si

$$\langle Au, u \rangle \geq 0, \forall u \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \quad (12)$$

📖 **Exercice**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q.1 Que peut-on dire de la matrice AA^* ? Et si la matrice A est inversible?

Q.2 Proposer une technique permettant de générer une matrice hermitienne semi-définie positive à partir d'une matrice aléatoire quelconque.

Q.3 Proposer une technique permettant de générer une matrice hermitienne définie positive à partir d'une matrice triangulaire inférieure inversible aléatoire.

Normes vectorielles

♥ **Definition**

L'application $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ définie pour tout $(u, v) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ par

$$\langle u, v \rangle = u^t \cdot v = v^t \cdot u = \sum_{i=1}^n u_i v_i, \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \quad (13)$$

$$\langle u, v \rangle = u^* \cdot v = v^* \cdot u = \overline{\langle v, u \rangle} = \sum_{i=1}^n \overline{u_i} v_i, \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \quad (14)$$

est appelée **produit scalaire** euclidien si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, hermitien² si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Pour rappeler la dimension de l'espace, on écrit

$$\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle_n.$$

²La convention choisie pour le produit scalaire hermitien étant ici : linéarité à droite et semi-linéarité à gauche. Il est aussi possible de définir le produit scalaire hermitien par le complexe conjugué de (14) :

$$\langle u, v \rangle = v^* \cdot u = \sum_{i=1}^n u_i \overline{v_i}.$$

Dans ce cas le produit scalaire est une forme sesquilinéaire à droite.

♥ **Definition**

Une **norme** sur un espace vectoriel V est une application $\|\bullet\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes

- ◊ $\|v\| = 0 \iff v = 0$,
- ◊ $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall v \in V$,
- ◊ $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \forall (u, v) \in V^2$ (inégalité triangulaire).

Une norme sur V est également appelée **norme vectorielle**. On appelle **espace vectoriel normé** un espace vectoriel muni d'une norme.

📖 **Proposition**

Soit $v \in \mathbb{K}^n$. Pour tout nombre réel $p \geq 1$, l'application $\|\bullet\|_p$ définie par

$$\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}$$

est une norme sur \mathbb{K}^n .

Normes usitées :

$$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|, \quad \|v\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^2 \right)^{1/2}, \quad \|v\|_\infty = \max_{i \in [1, n]} |v_i|.$$

📖 **Lemme 7.1: Inégalité de Cauchy-Schwarz**

$\forall x, y \in \mathbb{K}^n$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2. \quad (15)$$

Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**. On a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

📖 **Lemme 7.2: Inégalité de Hölder**

Pour $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a $\forall x, y \in \mathbb{K}^n$

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q} = \|x\|_p \|y\|_q. \quad (16)$$

Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Hölder**.

♥ **Definition 7.3**

Deux **normes** $\|\bullet\|$ et $\|\bullet\|'$, définies sur un même espace vectoriel V , sont **équivalentes** s'il existe deux constantes C et C' telles que

$$\|\mathbf{x}\|' \leq C \|\mathbf{x}\| \quad \text{et} \quad \|\mathbf{x}\| \leq C' \|\mathbf{x}\|' \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in V. \quad (17)$$

📖 **Proposition**

Sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Normes matricielles

♥ **Definition 8.1**

Une **norme matricielle** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une application $\|\bullet\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant

- $\|A\| = 0 \iff A = 0$,
- $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ (inégalité triangulaire)
- $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

Peut-on étendre cette définition sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$?

📖 **Proposition:**

Etant donné une norme vectorielle $\|\bullet\|$ sur \mathbb{K}^n , l'application $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|A\|_s \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|A\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad (18)$$

est une norme matricielle, appelée **norme matricielle subordonnée** (à la norme vectorielle donnée).

Elle vérifie

$$\|A\|_s = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \|\mathbf{v}\| \leq 1}} \|A\mathbf{v}\| = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \|\mathbf{v}\|=1}} \|A\mathbf{v}\| = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \|A\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \}. \quad (19)$$

De plus, pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ on a

$$\|A\mathbf{v}\| \leq \|A\|_s \|\mathbf{v}\| \quad (20)$$

et il existe au moins un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que

$$\|A\mathbf{u}\| = \|A\|_s \|\mathbf{u}\|. \quad (21)$$

Soit \mathbb{I} la matrice identité d'ordre n , on a

$$\|\mathbb{I}\|_s = 1. \quad (22)$$

📖 **Théorème 9:**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\|A\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|A\mathbf{v}\|_1}{\|\mathbf{v}\|_1} = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (23)$$

$$\|A\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|A\mathbf{v}\|_2}{\|\mathbf{v}\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)} = \|A^*\|_2 \quad (24)$$

$$\|A\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|A\mathbf{v}\|_\infty}{\|\mathbf{v}\|_\infty} = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (25)$$

La norme $\|\bullet\|_2$ est invariante par transformation unitaire :

$$UU^* = \mathbb{I} \implies \|A\|_2 = \|UA\|_2 = \|UA\|_2 = \|U^*AU\|_2. \quad (26)$$

📖 **Corollaire 9.1**

- Si une matrice A est hermitienne, on a $\|A\|_2 = \rho(A)$.
- Si une matrice A est unitaire, on a $\|A\|_2 = 1$.

Suites de vecteurs et de matrices

♥ **Definition 10.1**

Soit V un espace vectoriel muni d'une norme $\|\bullet\|$, on dit qu'une suite (\mathbf{v}_k) d'éléments de V **converge vers un élément** $\mathbf{v} \in V$, si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}\| = 0$$

et on écrit

$$\mathbf{v} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{v}_k.$$

 **Théorème 11: admis**

Soit \mathbb{B} une matrice carrée. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}^k = 0$,
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}^k \mathbf{v} = 0$ pour tout vecteur \mathbf{v} ,
- $\rho(\mathbb{B}) < 1$,
- $\|\mathbb{B}\| < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée $\|\bullet\|$.

 **Théorème 12: admis**

Soit \mathbb{B} une matrice carrée, et $\|\bullet\|$ une norme matricielle quelconque. Alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbb{B}^k\|^{1/k} = \rho(\mathbb{B}).$$