Analyse Numérique I

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 1ère année

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2022/09/16

Divers

- Volume horaire : 11×3h cours - 11×3h TD,
- Prérequis des cours : *Equations différentielles*, *Projets numériques*, *Elements Finis*, *Volumes Finis*, ...
- Note finale : $(P_1 + P_2)/2$ avec points de bonus
  - P_1 partiel 1, 18 novembre 2022 (1h30), (après vacances Toussaint, 7 cours et 7 TDs)
  - P_2 partiel 2, 13 janvier 2023 (1h30),
- 2 groupes de TD, en alternant chaque semaine, 1 groupe en distanciel avec Mme Japhet et 1 groupe en présentiel avec Mme Darbas.,
- Un serveur Discord dédié aux cours et aux TDs,
- Un polycopié,
- Des pages web dédiées
  - cours : https://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier
  - TDs : https://www.math.univ-paris13.fr/~japhet :
- Mail: cuvelier@math.univ-paris13.fr.
  Secours uniquement: `cuvelier.math@free.fr`
- Pas présent sur l'ENT!

Objectifs

Outils de base de l'analyse numérique et du calcul scientifique.

- Mathématiques
- Numériques
- Algorithmique

- P.G. Ciarlet, *Analyse numérique et equations différentielles*, DUNOD, 2006.
- ______, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, DUNOD, 2006.
- M. Crouzeix and A.L. Mignot, *Analyse numérique des équations différentielles*, Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson, 1992.
- J.P. Demailly, *Analyse numérique et equations différentielles*, PUG, 1994.
- J.-P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, Grenoble Sciences, EDP Sciences, 2006.
- J.P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, Grenoble Sciences, EDP Sciences, 2012.
- W. Gander, M.J. Gander, and F. Kwok, *Scientific computing : an introduction using maple and matlab*, Springer, Cham, 2014.
- T. Huckle, *Collection of software bugs http://wwwzenger.informatik.tu-muenchen.de/persons/huckle/bugse.html*.

Bibliographie II

P. Lascaux and R. Théodor, *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*, Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, no. vol. 1 et 2, Dunod, 2004.

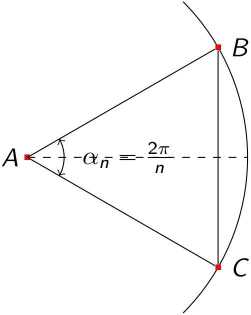
A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri, *Méthodes Numériques: Algorithmes, analyse et applications (French Edition)*, 1 ed., Springer, September 2007.

Plan du cours

Chapitre I

Erreurs : arrondis, bug and Co.

Un exemple : calcul approché de π



- Aire du cercle : $\mathcal{A} = \pi r^2$.
- Archimède vers 250 avant J-C : $\pi \in]3 + \frac{1}{7}, 3 + \frac{10}{71}[$ avec 96 polygônes.
- Algorithme polygônes inscrits ($r = 1$) : $\mathcal{A} = \lim_{n \to +\infty} \mathcal{A}_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2} \sin(\alpha_n)$ et $\sin \frac{\alpha_n}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_n}}{2}}$.

$s \leftarrow 1,\ n \leftarrow 4$ $\quad\triangleright$ Initialisations
Tantque $s > 1e - 10$ **faire** $\quad\triangleright$ Arrêt si $s = \sin(\alpha)$ est petit
  $s \leftarrow sqrt((1 - sqrt(1 - s * s))/2)$ $\quad\triangleright$ nouvelle valeur de $\sin(\alpha/2)$
  $n \leftarrow 2 * n$ $\quad\triangleright$ nouvelle valeur de n
  $A \leftarrow (n/2) * s$ $\quad\triangleright$ nouvelle valeur de l'aire du polygône
Fin Tantque

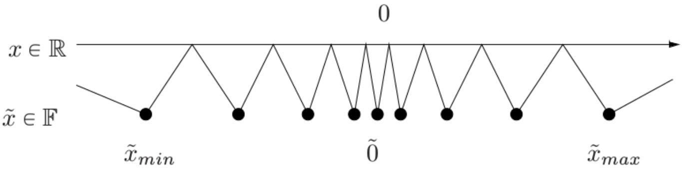
Un exemple : calcul approché de π

n	$\mathcal{A}_n$	$\lvert\mathcal{A}_n - \pi\rvert$	$\sin(\alpha_n)$
4	2.00000000000000	1.141593e+00	1.000000e+00
64	3.13654849054594	5.044163e-03	9.801714e-02
4096	3.14159142150464	1.232085e-06	1.533980e-03
32768	3.14159263346325	2.012654e-08	1.917476e-04
65536	3.14159265480759	1.217796e-09	9.587380e-05
131072	3.14159264532122	8.268578e-09	4.793690e-05
524288	3.14159291093967	2.573499e-07	1.198423e-05
4194304	3.14159655370482	3.900115e-06	1.498030e-06
67108864	3.14245127249413	8.586189e-04	9.365235e-08
2147483648	0.000000000000000	3.141593e+00	0.000000e+00

Nombres flottants en machine

$$\begin{array}{rcll} \tilde{x} & = & \pm m \cdot b^e & \\ m & = & D.D \cdots D, & \text{mantisse} \\ e & = & D \cdots D, & \text{exposant} \end{array}$$

où $D \in \{0, 1, ..., b-1\}$ représente un chiffre et b la base.
Mantisse normalisée : 1er D (avant point) est non nul.



- **Précision machine :** plus petit nombre machine $\mathrm{eps} > 0$ tel que

$$1 + \mathrm{eps} > 1.$$

Matlab/Octave, langage C (double), ... : $\mathrm{eps} = 2.220446049250313e-16$

Système IEEE 754 (1985)

- **simple précision :** format 32 bits (4 octets), float en langage C.

$$\overbrace{S}^{signe\ \ s}\quad \overbrace{EEEEEEEE}^{exposant\ \ e}\quad \overbrace{FFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF}^{mantisse\ \ m}$$

0 — 1 à 8 — 9 à 31

- **double précision :** format 64 bits (8 octets), double en langage C.

$$\overbrace{S}^{signe\ \ s}\quad \overbrace{EEEEEEEEEEE}^{exposant\ \ e}\quad \overbrace{FFFFF..........FFFFFF}^{mantisse\ \ m}$$

0 — 1 à 11 — 12 à 63

dimension tableau	type	dimension (octets)	dimension total
1000×1000	float	4	$4 * 1000 * 1000 = 4Mo$
$10^4 \times 10^4$	float	4	$4 * 10^8 = 400Mo$
1000×1000	double	8	$8 * 1000 * 1000 = 8Mo$
$10^4 \times 10^4$	double	8	$8 * 10^8 = 800Mo$

Problèmes arithmétiques en dimension finie

En langage C (par ex.):

- $\text{int a=2147483647,b;}$ alors b=a+1; donne b==-2147483648,
- $\text{double a=1/2,b;b=a+1;}$ donne a==0 et b==1,

En Matlab (par ex.) :

- x=eps; alors 1+eps==1 est faux (false=0)
- x=eps/2;y=1; alors (y+x)+x==1 est vrai et y+(x+x)==1 est faux.
  $(x + y) + z = x + (y + z)$ n'est pas forcément vérifiée sur machine!

Erreurs d'annulation

Il faut être attentifs aux signes sur machine.

- $f(x) = \frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}$, si $|x| \leqslant 0.5\sqrt{\mathrm{eps}}$ alors $\sqrt{1-x^2} \equiv 1$!

$$\Longrightarrow \quad \bar{x} = 0.5\sqrt{\mathrm{eps}}, \quad \boxed{\frac{1}{1-\sqrt{1-\bar{x}^2}} \equiv +\infty}$$

- $$f(x) = \frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \bar{x} = 0.5\sqrt{\mathrm{eps}}, \quad \boxed{\frac{1+\sqrt{1-\bar{x}^2}}{\bar{x}^2} \equiv 3.6029e+16}$$

$$\sin\frac{\alpha_n}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha_n}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha_n}}{2}},$$

C'est le calcul de $1-\sqrt{1-\sin^2\alpha_n}$ qui pose problème!

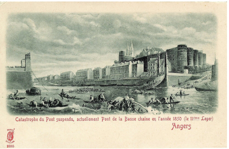
$$\sin\frac{\alpha_n}{2} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-\sin^2\alpha_n}}}{\sqrt{1+\sqrt{1-\sin^2\alpha_n}}}\sin\frac{\alpha_n}{2} = \frac{\sin\alpha_n}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-\sin^2\alpha_n})}}$$

$s \leftarrow 1,\ n \leftarrow 4,$ ▻ Initialisations
Tantque $s > 1e-10$ **faire** ▻ Arrêt si $s = \sin(\alpha)$ est petit
  $s \leftarrow s/sqrt(2*(1+sqrt(1-s*s)))$ ▻ nouvelle valeur de $\sin(\alpha/2)$
  $n \leftarrow 2*n$ ▻ nouvelle valeur de n
  $A \leftarrow (n/2)*s$ ▻ nouvelle valeur de l'aire du polygône
Fin Tantque

Un exemple : calcul approché de π

n	A_n	$\lvert A_n - \pi \rvert$	$\sin(\alpha_n)$
4	2.00000000000000	1.141593e+00	1.000000e+00
64	3.13654849054594	5.044163e-03	9.801714e-02
4096	3.14159142151120	1.232079e-06	1.533980e-03
32768	3.14159263433856	1.925123e-08	1.917476e-04
65536	3.14159264877699	4.812807e-09	9.587380e-05
131072	3.14159265238659	1.203202e-09	4.793690e-05
524288	3.14159265351459	7.519985e-11	1.198422e-05
4194304	3.14159265358862	1.174172e-12	1.498028e-06
67108864	3.14159265358979	3.552714e-15	9.362676e-08
2147483648	3.14159265358979	1.332268e-15	2.925836e-09

Mais avant de pousuivre ...



(a) Pont de la Basse-Chaîne, *Angers* (1850)

(b) Takoma Narrows Bridge, *Washington* (1940)

(c) Millenium Bridge, *London* (2000)

Figure: Une histoire de ponts

Chapitre II

Langage algorithmique

Définition

Definition 1.1: Petit Robert 97

Algorithmique : Enchaînement d'actions nécessaires à l'accomplissement d'une tâche.

Exemple 1 : permutation

Nous voulons permutter deux voitures sur un parking de trois places numérotées de 1 à 3 et ceci sans géner la circulation.
La première voiture, une Sandero, est sur l'emplacement 2, la seconde, une Zoé, est sur l'emplacement 3.
Donner un algorithme permettant de résoudre cette tâche.

Exemple 2 :

Donner un algorithme permettant de résoudre

$$ax = b$$

Caractéristiques d'un *bon* algorithme

- Le problème ne souffre d'aucune ambiguité $\Rightarrow$ très clair.
- Combinaison d'opérations (actions) élémentaires.
- Pour toutes les données d'entrée, l'algorithme doit fournir un résultat en un nombre fini d'opérations.

Première approche méthodologique

Etape 1 : Définir clairement le problème.

Première approche méthodologique

Etape 1 : Définir clairement le problème.

Etape 2 : Rechercher une méthode de résolution (formules, ...)

Première approche méthodologique

Etape 1 : Définir clairement le problème.

Etape 2 : Rechercher une méthode de résolution (formules, ...)

Etape 3 : Ecrire l'algorithme (par raffinement successif pour des algorithmes *compliqués*).

Plan

Vocabulaire de base

- constantes,variables,
- opérateurs (arithmétiques, relationnels, logiques),
- expressions,
- instructions (simples et composées),
- fonctions.

Données et constantes

- Donnée $\Rightarrow$ introduite par l'utilisateur
- Constante $\Rightarrow$ symbole, identificateur non modifiable

Variables

Definition 2.1

Une variable est un objet dont la valeur est modifiable, qui possède un nom et un type (entier, caractère, réel, complexe, tableau, matrice, vecteur...).

Opérateurs arithmétiques

Nom	Symbole	Exemple
addition	$+$	$a + b$
soustraction	$-$	$a - b$
opposé	$-$	$-a$
produit	$*$	$a * b$
division	$/$	a/b

Opérateurs relationnels

Nom	Symbole	Exemple
identique	$==$	$a == b$
différent	$\sim=$	$a \sim= b$
inférieur	$<$	$a < b$
supérieur	$>$	$a > b$
inférieur ou égal	$<=$	$a <= b$
supérieur ou égal	$>=$	$a >= b$

Opérateurs logiques

Nom	Symbole	Exemple
négation	$\sim$	$\sim a$
ou	$\|$	$a\|b$
et	$\&$	$a\&b$

Opérateur d'affectation

Nom	**Symbole**	**Exemple**
affectation	$\leftarrow$	$a \leftarrow b$

Expressions

Definition 2.2

Une expression est un groupe d'opérandes (i.e. nombres, constantes, variables, ...) liées par certains opérateurs pour former un terme algébrique qui représente une valeur (i.e. un élément de donnée simple)

Definition 2.3

Une expression est un groupe d'opérandes (i.e. nombres, constantes, variables, ...) liées par certains opérateurs pour former un terme algébrique qui représente une valeur (i.e. un élément de donnée simple)

Exemple d'expression numérique

$$(b * b - 4 * a * c)/(2 * a)$$

Expressions

Definition 2.4

Une expression est un groupe d'opérandes (i.e. nombres, constantes, variables, ...) liées par certains opérateurs pour former un terme algébrique qui représente une valeur (i.e. un élément de donnée simple)

Exemple d'expression numérique

$$(b * b - 4 * a * c)/(2 * a)$$

Opérandes $\Rightarrow$ identifiants a, b, c,
constantes 4 et 2.

Expressions

Definition 2.5

Une expression est un groupe d'opérandes (i.e. nombres, constantes, variables, ...) liées par certains opérateurs pour former un terme algébrique qui représente une valeur (i.e. un élément de donnée simple)

Exemple d'expression numérique

$$(b * b - 4 * a * c)/(2 * a)$$

Opérandes $\Rightarrow$ identifiants a, b, c,
constantes 4 et 2.

Opérateurs $\Rightarrow$ symboles $*$, $-$ et $/$

Definition 2.6

Une expression est un groupe d'opérandes (i.e. nombres, constantes, variables, ...) liées par certains opérateurs pour former un terme algébrique qui représente une valeur (i.e. un élément de donnée simple)

Exemple d'expression booléenne

$$(x < 3.14)$$

Expressions

Definition 2.7

Une expression est un groupe d'opérandes (i.e. nombres, constantes, variables, ...) liées par certains opérateurs pour former un terme algébrique qui représente une valeur (i.e. un élément de donnée simple)

Exemple d'expression booléenne

$$(x < 3.14)$$

Opérandes $\Rightarrow$ identifiants x et contantes 3.14

Expressions

Definition 2.8

Une expression est un groupe d'opérandes (i.e. nombres, constantes, variables, ...) liées par certains opérateurs pour former un terme algébrique qui représente une valeur (i.e. un élément de donnée simple)

Exemple d'expression booléenne

$$(x < 3.14)$$

Opérandes $\Rightarrow$ identifiants x et contantes 3.14
Opérateurs $\Rightarrow$ symboles $<$

Instructions

Definition 2.9

Une **instruction** est un ordre ou un groupe d'ordres qui déclenche l'exécution de certaines actions par l'ordinateur. Il y a deux types d'instructions : simple et structuré.

Instructions simples

- affectation d'une valeur a une variable.
- appel d'une fonction (procedure, subroutine, ... suivant les langages).

Plan

Instructions structurées

1. les instructions composées, groupe de pulsieurs instructions simples,
2. les instructions répétitives, permettant l'exécution répétée d'instructions simples, (i.e. boucles «pour», «tant que»)
3. les instructions conditionnelles, lesquels ne sont exécutées que si une certaine condition est respectée (i.e. «si»)

Exemple : boucle «pour»

Données : n

$S \leftarrow 0$
Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
    $S \leftarrow S + \cos(i\hat{\ }2)$
Fin Pour

Mais que fait-il?

Exemple : boucle «pour»

Données : n

$S \leftarrow 0$
Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
    $S \leftarrow S + \cos(i\hat{\ }2)$
Fin Pour

Mais que fait-il?

Calcul de $S = \sum_{i=1}^{n} \cos(i^2)$

$i \leftarrow 0, \;\; x \leftarrow 1$
Tantque $i < 1000$ **faire**
  $x \leftarrow x + i * i$
  $i \leftarrow i + 1$
Fin Tantque

Mais que fait-il?

Exemple : boucle «tant que»

$i \leftarrow 0,\ \ x \leftarrow 1$
Tantque $i < 1000$ **faire**
    $x \leftarrow x + i * i$
    $i \leftarrow i + 1$
Fin Tantque

Mais que fait-il?

Calcul de $x = 1 + \sum_{i=0}^{999} i\hat{\ }2$

Exemple : instructions conditionnelles «si»

Données :

age : un réel.

Si *age* $>=$ 18 **alors**
    affiche('majeur')
Sinon Si *age* $>=$ 0 **alors**
    affiche('mineur')
Sinon
    affiche('en devenir')
Fin Si

Plan

Description du problème

- Spécification d'un ensemble de données
  Origine : énoncé, hypothèses, sources externes, ...
- Spécification d'un ensemble de buts à atteindre
  Origine : résultats, opérations à effectuer, ...
- Spécification des contraintes

Recherche d'une méthode de résolution

- Clarifier l'énoncé.
- Simplifier le problème.
- Ne pas chercher à le traiter directement dans sa globalité.
- S'assurer que le problème est soluble (sinon problème d'indécidabilité!)
- Recherche d'une stratégie de construction de l'algorithme
- Décomposer le problème en sous problèmes partiels plus simples : raffinement.
- Effectuer des raffinements successifs.
- Le niveau de raffinement le plus élémentaire est celui des instructions.

Réalisation d'un algorithme

- Le type des données et des résultats doivent être précisés.
- L'algorithme doit fournir au moins un résultat.
- L'algorithme doit être exécuté en un nombre fini d'opérations.
- L'algorithme doit être spécifié clairement, sans la moindre ambiguïté.

Plan

Exercices

Exercice 3.1

Ecrire un algorithme permettant de calculer

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} k \sin(2 * k * x)$$

Exercice 3.2

Ecrire un algorithme permettant de calculer

$$P(z) = \prod_{n=1}^{k} sin(2 * k * z/n)^{k}$$

Exercices

Exercice 3.3

Reprendre les trois exercices précédants en utilisant les boucles «tant que».

Plan

Les fonctions

Les fonctions permettent

- d'automatiser certaines tâches répétitives au sein d'un même algorithme,
- d'ajouter à la clarté de la l'algorithme,
- l'utilisation de portion de code dans un autre algorithme,
- ...

Les fonctions prédéfinies

- les fonctions d'affichage et de lecture : **Affiche**, **Lit**

Les fonctions prédéfinies

- les fonctions d'affichage et de lecture : **Affiche**, **Lit**
- les fonctions mathématiques :

$$\sin, \ \cos, \ \exp, \ \cdots$$

Les fonctions prédéfinies

- les fonctions d'affichage et de lecture : **Affiche**, **Lit**
- les fonctions mathématiques :

$$\sin, \ \cos, \ \exp, \ \cdots$$

- les fonctions de gestion de fichiers
- ...

Ecrire ses propres fonctions

1. Que doit-on calculer/réaliser précisement (but)?
2. Quelles sont les données (avec leurs limitations)?

Syntaxe

Fonction $[args_1, \ldots, args_n] \leftarrow \mathrm{NomFonction}(\ arge_1, \ldots, arge_m\ )$
instructions
Fin Fonction

Fonction $args \leftarrow \mathrm{NomFonction}(\ arge_1, \ldots, arge_m\ )$
instructions
Fin Fonction

Plan

équation du premier degré

Ecrire une fonction permettant de résoudre

$$ax + b = 0$$

- But :
- Données :
- Résultats :

équation du premier degré

Ecrire une fonction permettant de résoudre

$$ax + b = 0$$

- But :
  trouver $x \in \mathbb{R}$ solution de $ax + b = 0$.
- Données :
- Résultats :

équation du premier degré

Ecrire une fonction permettant de résoudre

$$ax + b = 0$$

- But :
  trouver $x \in \mathbb{R}$ solution de $ax + b = 0$.
- Données :
  $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.
- Résultats :

équation du premier degré

Ecrire une fonction permettant de résoudre

$$ax + b = 0$$

- But :
  trouver $x \in \mathbb{R}$ solution de $ax + b = 0$.
- Données :
  $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.
- Résultats :
  $x \in \mathbb{R}$.

équation du premier degré

Algorithm Exemple de fonction : Résolution de l'équation du premier degré $ax + b = 0$.

Données :	a	:	nombre réel différent de 0
	b	:	nombre réel.
Résultat :	x	:	un réel.

```
Fonction x ← REPD( a, b )
    x ← −b/a
Fin Fonction
```

Plan

produit scalaire de deux vecteurs

Ecrire une fonction permettant de calculer le produit des deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^n$.

- Formule: $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$
- But :
- Données :
- Résultats :

produit scalaire de deux vecteurs

Ecrire une fonction permettant de calculer le produit des deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^n$.

- Formule: $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$
- But :
  calculer $s = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \in \mathbb{R}$
- Données :
- Résultats :

produit scalaire de deux vecteurs

Ecrire une fonction permettant de calculer le produit des deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^n$.

- Formule: $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$
- But :
  calculer $s = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \in \mathbb{R}$
- Données :
  $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$.
- Résultats :

Ecrire une fonction permettant de calculer le produit des deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^n$.

- Formule: $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$
- But :
  calculer $s = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \in \mathbb{R}$
- Données :
  $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$.
- Résultats :
  $s \in \mathbb{R}$.

Algorithm Calcul du produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Données : $\boldsymbol{u}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$
$\boldsymbol{v}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.
Résultat : s : un réel tel que $s = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$.

```
Fonction s ← PS ( u, v )
    s ← 0
    Pour i ← 1 à n faire
        s ← s + u(i) * v(i)
    Fin Pour
Fin Fonction
```

Chapitre III

Rappels algèbre linéaire

Chapitre IV

Résolution de systèmes non-linéaires

Chapitre V

Résolution de systèmes linéaires

Chapitre VI

Polynômes d'interpolation

Chapitre VII

Intégration numérique