

### Exercice

Soient  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  deux vecteurs non nuls et non colinéaires de  $\mathbb{C}^n$  avec  $\|\mathbf{b}\|_2 = 1$ .

**Q. 1** Ecrire la fonction algorithmique **HOUSEHOLDER** permettant de retourner une matrice de Householder  $\mathbb{H}$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$  tels que  $\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}$ . Le choix du  $\alpha$  est fait par le paramètre  $\delta$  (0 ou 1) de telle sorte que  $\arg \alpha = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) + \delta\pi$  avec  $|\alpha| = \|\mathbf{a}\|_2$ .

Des fonctions comme **DOT**( $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ) (produit scalaire de deux vecteurs), **NORM**( $\mathbf{a}$ ) (norme 2 d'un vecteur), **ARG**( $z$ ) (argument d'un nombre complexe), **MATPROD**( $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ ) (produit de deux matrices), **CTRANSPOSE**( $\mathbb{A}$ ) (adjoint d'une matrice), ... pourront être utilisées

**Q. 2** Proposer un programme permettant de tester cette fonction. On pourra utiliser la fonction **VECRAND**( $n$ ) retournant un vecteur aléatoire de  $\mathbb{C}^n$ , les parties réelles et imaginaires de chacune de ses composantes étant dans  $]0, 1[$  (loi uniforme).

**Q. 3** Proposer un programme permettant de vérifier que  $\delta = 1$  est le "meilleur" choix.

**Correction Exercice** Soient  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  deux vecteurs non nuls et non colinéaires de  $\mathbb{C}^n$ .

**Q. 1** Les données du problème sont  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\delta$ . On veut calculer  $\alpha$  et la matrice  $\mathbb{H}(\mathbf{u})$ .

---

**Algorithme 11** Calcul du  $\alpha$  et de la matrice de Householder  $\mathbb{H}(\mathbf{u})$  telle que  $\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}$ .

---

**Données :**  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  : deux vecteurs de  $\mathbb{C}^n$  non nuls et non colinéaires.

$\delta$  : 0 ou 1, permet de déterminer  $\alpha$ .

**Résultat :**  $\mathbb{H}$  : matrice de Householder dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,

$\alpha$  : nombre complexe, de module  $\|\mathbf{a}\|_2$  et d'argument  $-\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) + \delta\pi$ .

1: **Fonction**  $[\mathbb{H}, \alpha] \leftarrow \text{HOUSEHOLDER}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \delta)$

2:  $\text{ab} \leftarrow \text{DOT}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

$\triangleright \text{DOT}$  produit scalaire dans  $\mathbb{C}$ .

3:  $\alpha \leftarrow \text{NORM}(\mathbf{a}) * \exp(i * (\delta * \pi - \text{ARG}(\text{ab})))$

4:  $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{a} - \alpha * \mathbf{b}$

5:  $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{u} / \text{NORM}(\mathbf{u})$

6:  $\mathbb{H} \leftarrow \text{EYE}(n) - 2 * \text{MATPROD}(\mathbf{u}, \text{CTRANSPOSE}(\mathbf{u}))$

7: **Fin Fonction**

---

**Q. 2** 1:  $n \leftarrow 100$

2:  $\mathbf{a} \leftarrow \text{VECRAND}(n)$

3:  $\mathbf{b} \leftarrow \text{VECRAND}(n)$

4:  $\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{b} / \text{NORM}(\mathbf{b}, 2)$

5:  $[\mathbb{H}, \alpha] \leftarrow \text{HOUSEHOLDER}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, 0)$

6:  $\text{error} \leftarrow \text{NORM}(\mathbb{H} * \mathbf{a} - \alpha * \mathbf{b}, 2)$

**Q. 3** 1:  $n \leftarrow 100$

2:  $\mathbf{a} \leftarrow \text{VECRAND}(n)$

3:  $\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{a} + 1e-6 * \text{VECRAND}(n)$

4:  $\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{b} / \text{NORM}(\mathbf{b}, 2)$

5:  $[\mathbb{H}_1, \alpha_1] \leftarrow \text{HOUSEHOLDER}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, 1)$

6:  $[\mathbb{H}_0, \alpha_0] \leftarrow \text{HOUSEHOLDER}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, 0)$

7:  $\text{error0} \leftarrow \text{NORM}(\mathbb{H}_0 * \mathbf{a} - \alpha_0 * \mathbf{b}, 2) / (1 + \text{ABS}(\alpha_0))$

8: error1  $\leftarrow$  `NORM`( $\mathbb{H}_1 * \mathbf{a} - \alpha_1 * \mathbf{b}, 2$ )/(1 + `ABS`( $\alpha_1$ ))

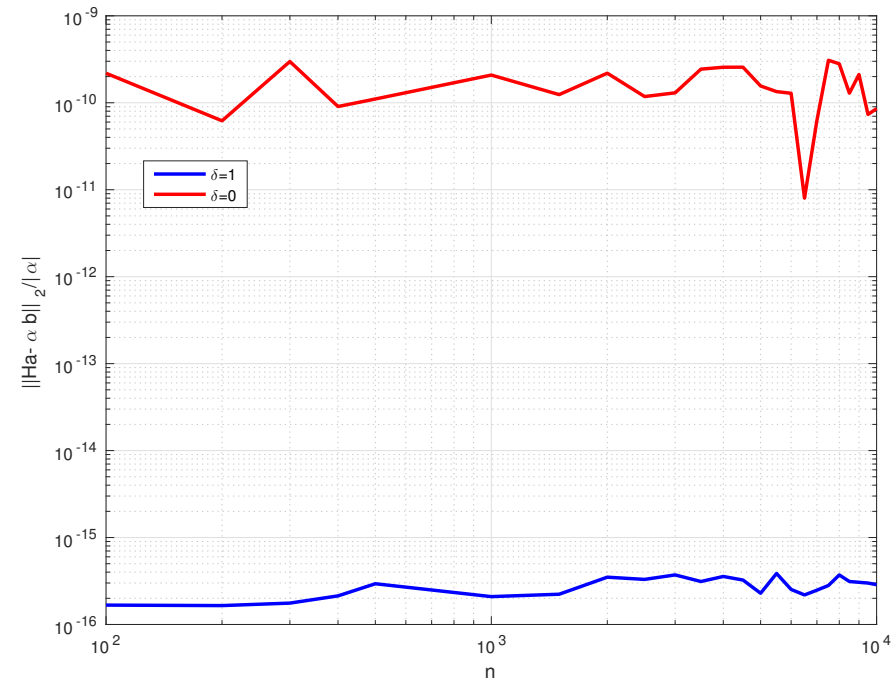


Figure 1: Choix de  $\alpha$  dans `HOUSEHOLDER` : erreur relative en norme  $L_2$



◇