Exercice

Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ avec $v_1 \neq 0$. On note $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice triangulaire inférieure à diagonale unité définie par

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline -v_2/v_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -v_n/v_1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{P-1}$$

Q. 1 *1. Calculer le déterminant de* $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$.

2. Déterminer l'inverse de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$.

$\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $A_{1,1} \neq 0$. On note $\boldsymbol{A}_{:,j}$ le j-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{A}_{i,:}$ son i-ème vecteur ligne. On pose $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_{:,1}$.

Q. 2 *1. Calculer* $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}\mathbb{A}$ *en fonction des vecteurs lignes de* $\mathbb{A}$.

2. Montrer que la première colonne de $\tilde{\mathbb{A}}$ *est le vecteur* $(A_{1,1}, 0, \dots, 0)^{\boldsymbol{t}}$ *i.e.*

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = A_{1,1}\boldsymbol{e}_1 \tag{P-2}$$

où $\boldsymbol{e}_1$ *est le premier vecteur de la base canonique de* $\mathbb{C}^n$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{C})$ la matrice triangulaire inférieure à diagonale unité définie par

$$\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} \end{array}\right) \tag{P-3}$$

Q. 3 *1. Calculer le déterminant de* $\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]}$.

2. *Déterminer l'inverse de $\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]}$ en fonction de l'inverse de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$.*

Soit $\mathbb{C}$ la matrice bloc définie par

$$\mathbb{C} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{C}_{1,1} & \mathbb{C}_{1,2} \\ \hdashline \mathbb{O} & \mathbb{A} \end{array}\right)$$

où $\mathbb{C}_{1,1} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}_{1,2} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

Q. 4 *Déterminer la matrice produit $\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{A}_1]}\mathbb{C}$ en fonction des matrices $\mathbb{C}_{1,1}$, $\mathbb{C}_{1,2}$ et $\tilde{\mathbb{A}}$.*

Correction Exercice

Q. 1 1. La matrice $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$ est triangulaire : son déterminant est donc le produit de ses éléments diagonaux (voir Proposition B.53, page 209). On a alors $\det(\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}) = 1$.

2. Pour calculer son inverse qui existe puisque $\det(\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}) \neq 0$, on écrit $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$ sous forme bloc :

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} = \left(\begin{array}{c:ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline & & & \\ \boldsymbol{e} & & \mathbb{I}_{n-1} & \\ & & & \end{array}\right)$$

avec $\boldsymbol{e} = (-v_2/v_1, \dots, -v_n/v_1)^{\mathsf{t}} \in \mathbb{C}^{n-1}$ On note $\mathbb{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son inverse qui s'écrit avec la même structure bloc

$$\mathbb{X} = \left(\begin{array}{c:c} a & \boldsymbol{b}^* \\ \hdashline & \\ \boldsymbol{c} & \mathbb{D} \\ & \end{array}\right)$$

avec $a \in \mathbb{K}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^{n-1}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{K}^{n-1}$ et $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$.
La matrice $\mathbb{X}$ est donc solution de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\mathbb{X} = \mathbb{I}$. Grace à l'écriture bloc des matrices on en déduit rapidement la

matrice $\mathbb{X}$. En effet, en utilisant les produits blocs des matrices, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\mathbb{X} &= \left(\begin{array}{c:c} 1 & \mathbf{0}^{\mathtt{t}}_{n-1} \\ \hdashline \boldsymbol{e} & \mathbb{I}_{n-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:c} a & \boldsymbol{b}^* \\ \hdashline \boldsymbol{c} & \mathbb{D} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} 1\times a & 1\times\boldsymbol{b}^* + \mathbf{0}^{\mathtt{t}}_{n-1}\times\mathbb{D} \\ \hdashline \boldsymbol{e}\times a + \mathbb{I}_{n-1}\times\boldsymbol{c} & \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{b}^* + \mathbb{I}_{n-1}\times\mathbb{D} \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c:c} a & \boldsymbol{b}^* \\ \hdashline a\boldsymbol{e}+\boldsymbol{c} & \boldsymbol{e}\boldsymbol{b}^* + \mathbb{D} \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{X}$ est l'inverse de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$, on a $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\mathbb{X} = \mathbb{I}$ et donc en écriture bloc

$$\left(\begin{array}{c:c} a & \boldsymbol{b}^* \\ \hdashline a\boldsymbol{e}+\boldsymbol{c} & \boldsymbol{e}\boldsymbol{b}^* + \mathbb{D} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} 1 & \mathbf{0}^{\mathtt{t}}_{n-1} \\ \hdashline \mathbf{0}_{n-1} & \mathbb{I}_{n-1} \end{array}\right).$$

Ceci revient à résoudre les 4 équations

$$a = 1, \quad \boldsymbol{b}^* = \mathbf{0}^{\mathtt{t}}_{n-1}, \quad a\boldsymbol{e} + \boldsymbol{c} = \mathbf{0}_{n-1} \;\text{ et }\; \boldsymbol{e}\boldsymbol{b}^* + \mathbb{D} = \mathbb{I}_{n-1}$$

qui donnent immédiatement $a = 1$, $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}_{n-1}$, $\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{e}$ et $\mathbb{D} = \mathbb{I}_{n-1}$. On obtient le résultat suivant

$$\left(\begin{array}{c:ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline -\boldsymbol{e} & & \mathbb{I}_{n-1} & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline \boldsymbol{e} & & \mathbb{I}_{n-1} & \end{array}\right) = \mathbb{I}_n.$$

Il aurait été plus rapide d'utiliser la Proposition B.54, page 209.

Q. 2 1. Pour simplifier les notations, on note $\mathbb{E} = \mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}$. Par définition du produit de deux matrices on a

$$\tilde{A}_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} E_{i,k} A_{k,j}, \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2.$$

Quand $i = 1$, on a par construction $E_{1,k} = \delta_{1,k}$ et donc

$$\tilde{A}_{1,j} = A_{1,j}, \ \forall j \in [\![1,n]\!] \iff \tilde{\boldsymbol{A}}_{1,:} = \boldsymbol{A}_{1,:}. \tag{P-4}$$

Pour $i \geqslant 2$, on a $E_{i,1} = -\frac{v_i}{v_1}$ et $E_{i,k} = \delta_{i,k}$, $\forall k \in [\![2,n]\!]$. On obtient alors pour tout $j \in [\![1,n]\!]$

$$\tilde{A}_{i,j} = E_{i,1} A_{1,j} + \sum_{k=2}^{n} E_{i,k} A_{k,j} = -\frac{v_i}{v_1} A_{1,j} + \sum_{k=2}^{n} \delta_{i,k} A_{k,j} = -\frac{v_i}{v_1} A_{1,j} + A_{i,j}$$

ce qui donne pour tout $i \in [\![2,n]\!]$

$$\tilde{A}_{i,j} = A_{i,j} - \frac{v_i}{v_1} A_{1,j}, \ \forall j \in [\![1,n]\!] \iff \tilde{\boldsymbol{A}}_{i,:} = -\frac{v_i}{v_1} \boldsymbol{A}_{1,:} + \boldsymbol{A}_{i,:} \tag{P-5}$$

En conclusion, la matrice $\tilde{\mathbb{A}}$ s'écrit

$$\tilde{\mathbb{A}} = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{A}_{1,:} \\ \hdashline \boldsymbol{A}_{2,:} - (v_2/v_1) \boldsymbol{A}_{1,:} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \boldsymbol{A}_{n,:} - (v_n/v_1) \boldsymbol{A}_{1,:} \end{array} \right)$$

2. De (P-4), on tire $\tilde{A}_{1,1} = A_{1,1}$. A partir de (P-5) on obtient pour tout $i \in [\![2,n]\!]$, $\tilde{A}_{i,1} = A_{i,1} - \frac{v_i}{v_1} A_{1,1}$. Par construction $v_j = A_{j,1}$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, ce qui donne $\tilde{A}_{i,1} = 0$.
La première colonne de $\tilde{\mathbb{A}}$ est $(1, 0, \ldots, 0)^{\mathsf{t}}$.

Q. 3 1. La matrice $\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]}$ est triangulaire inférieure. Son déterminant est donc le produit de ses éléments diagonaux. Comme cette matrice est à diagonale unité (i.e. tous ses éléments diagonaux valent 1), on obtient $\det \mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]} = 1$.

Une autre manière de le démontrer. On peut voir que la matrice $\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]}$ est bloc-diagonale. D'après la Proposition B.54, page 209, son déterminant est le produit des déterminant des blocs diagonaux : $\det \mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]} = \det \mathbb{I}_m \times \det \mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} = 1$.

2. On note $\mathbb{X}$ l'inverse de la matrice $\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]}$. Cette matrice s'écrit avec la même structure bloc

$$\mathbb{X} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{X}_{1,1} & \mathbb{X}_{1,2} \\ \hdashline \mathbb{X}_{2,1} & \mathbb{X}_{2,2} \end{array}\right) \text{ avec } \mathbb{X}_{1,1} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C}) \text{ et } \mathbb{X}_{2,2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

On a donc $\mathbb{X}\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]} = \mathbb{I}_{m+n}$ c'est à dire en écriture bloc

$$\left(\begin{array}{c:c} \mathbb{X}_{1,1} & \mathbb{X}_{1,2} \\ \hdashline \mathbb{X}_{2,1} & \mathbb{X}_{2,2} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O} \\ \hdashline \mathbb{O} & \mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O} \\ \hdashline \mathbb{O} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) =$$

On doit donc résoudre les 4 équations suivantes :

$$\mathbb{X}_{1,1}\mathbb{I}_m = \mathbb{I}_m, \quad \mathbb{X}_{1,2}\mathbb{I}_n = \mathbb{O}, \quad \mathbb{X}_{2,1}\mathbb{I}_m = \mathbb{O} \quad \text{et} \quad \mathbb{X}_{2,2}\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} = \mathbb{I}_n.$$

Comme la matrice $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$ est inversible, on obtient

$$\mathbb{X} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O} \\ \hdashline \mathbb{O} & \left(\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\right)^{-1} \end{array}\right)$$

Plus rapidement, comme la matrice $\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]}$ est bloc-diagonale, on en déduit (voir Proposition B.54, page 209) directement le résultat.

Q. 4 Le produit $\mathbb{E}^{[\mathbb{m},\boldsymbol{v}]}\mathbb{C}$ peut s'effectuer par bloc car les blocs sont de dimensions compatibles et on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{[\mathbb{m},\boldsymbol{v}]}\mathbb{C} &= \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hdashline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{E} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:c} \mathbb{C}_{1,1} & \mathbb{C}_{1,2} \\ \hdashline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{A} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{I}_m\mathbb{C}_{1,1} + \mathbb{O}_{m,n}\mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_m\mathbb{C}_{1,2} + \mathbb{O}_{m,n}\mathbb{A} \\ \hdashline \mathbb{O}_{n,m}\mathbb{C}_{1,1} + \mathbb{E}\mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{O}_{n,m}\mathbb{C}_{1,2} + \mathbb{E}\mathbb{A} \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{C}_{1,1} & \mathbb{C}_{1,2} \\ \hdashline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{E}\mathbb{A} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{C}_{1,1} & \mathbb{C}_{1,2} \\ \hdashline \mathbb{O}_{n,m} & \tilde{\mathbb{A}} \end{array}\right)
\end{aligned}$$

$\diamond$