

Proposition

Soit \mathbb{A} une matrice régulière. On a les propriétés suivantes

1. $\forall \alpha \in \mathbb{K}^*, \text{cond}(\alpha \mathbb{A}) = \text{cond}(\mathbb{A})$.
2. $\text{cond}_p(\mathbb{A}) \geq 1, \forall p \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket$.
3. $\text{cond}_2(\mathbb{A}) = 1$ si et seulement si $\mathbb{A} = \alpha \mathbb{Q}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et \mathbb{Q} matrice unitaire

Proof. Soit \mathbb{A} une matrice régulière.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{K}^*$, on a

$$\begin{aligned} \text{cond}(\alpha \mathbb{A}) &\stackrel{\text{def}}{=} \|\alpha \mathbb{A}\| \|(\alpha \mathbb{A})^{-1}\| = |\alpha| \|\mathbb{A}\| \left\| \frac{1}{\alpha} \mathbb{A}^{-1} \right\| \\ &= |\alpha| \|\mathbb{A}\| \frac{1}{|\alpha|} \|\mathbb{A}^{-1}\| = \|\mathbb{A}\| \|\mathbb{A}^{-1}\| \\ &= \text{cond}(\mathbb{A}) \end{aligned}$$

2. On a $\mathbb{I} = \mathbb{A} \mathbb{A}^{-1}$. Or pour toute norme subordonnée, on a $\|\mathbb{I}\| = 1$ et donc $1 = \|\mathbb{A} \mathbb{A}^{-1}\| \leq \|\mathbb{A}\| \|\mathbb{A}^{-1}\| = \text{cond}(\mathbb{A})$.
3. **Admis.** Voir par exemple [7] Théorème 2 page 142-143.

□

