

Exercice: Factorisation LU

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les sous-matrices principales d'ordre i , notées Δ_i , $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (voir Définition B.48, page 207) sont inversibles.

Montrer qu'il existe des matrices $E^{[k]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, triangulaires inférieures à diagonale unité telles que la matrice U définie par

$$U = E^{[n-1]} \dots E^{[1]} A$$

soit triangulaire supérieure avec $U_{i,i} = \det \Delta_i / (U_{1,1} \times \dots \times U_{i-1,i-1})$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Correction Exercice

On note $A^{[0]} = A$. On va démontrer par récurrence finie sur $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, qu'il existe une matrice $E^{[k]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, tel que la matrice $A^{[k]}$ définie itérativement par

$$A^{[k]} = E^{[k]} A^{[k-1]}$$

s'écrit sous la forme bloc

$$A^{[k]} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \alpha_1 & \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_k & \bullet & \dots & \bullet & \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & \bullet & \dots & \bullet & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \bullet & \dots & \bullet & \end{array} \right) \quad (\text{P-1})$$

avec $\alpha_1 = A_{1,1}$ et $\forall i \in \llbracket 2, k \rrbracket$, $\alpha_i = \det \Delta_i / (\alpha_1 \times \dots \times \alpha_{i-1})$.

Initialisation ($k = 1$): On a $A_{1,1} \neq 0$ car $\Delta_1 = A_{1,1}$ et $\det \Delta_1 \neq 0$. D'après le Lemme 3.3, il existe une matrice $E^{[1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que $E^{[1]} A e_1 = A_{1,1} e_1$ où e_1 est le premier vecteur de

la base canonique de \mathbb{C}^n . On a alors

$$\mathbb{A}^{[1]} = \mathbb{E}^{[1]} \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{pmatrix}$$

avec $\alpha_1 = A_{1,1} = \det \Delta_1$.

Hérédité ($k < n - 1$): Supposons construite la matrice $\mathbb{A}^{[k]}$. Il existe donc k matrices, $\mathbb{E}^{[1]}, \dots, \mathbb{E}^{[k]}$, triangulaires inférieures à diagonale unité telles que

$$\mathbb{A}^{[k]} = \mathbb{E}^{[k]} \dots \mathbb{E}^{[1]} \mathbb{A}.$$

- On va montrer que $\alpha_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} A_{k+1,k+1}^{[k]} \neq 0$. Pour celà, on réécrit la matrice $\mathbb{A}^{[k]}$ sous forme bloc, avec comme premier bloc diagonale le bloc de dimension $k + 1$:

$$\mathbb{A}^{[k]} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \vdots & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \bullet & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet & \bullet & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_k & \bullet & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_{k+1} & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & & & \vdots & \bullet & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \end{pmatrix}$$

$\xleftrightarrow[k+1]$

La matrice $\mathbb{G}^{[k]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}^{[k]} \dots \mathbb{E}^{[1]}$ est triangulaire inférieure à diagonale unité car produit de matrices triangulaires inférieures à diagonale unité (voir Exercice B.3.2, page 214). Le produit de $\mathbb{G}^{[k]} \mathbb{A}$ s'écrit alors sous forme bloc

$$\mathbb{G}^{[k]} \mathbb{A} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \xrightarrow{k+1} & & & & & & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \bullet & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \bullet & \cdots & \bullet & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hline \bullet & \cdots & \cdots & \bullet & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \bullet & \cdots & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} \xleftarrow{k+1} & & & & & & \\ & \Delta_{k+1} & & \bullet & \cdots & \bullet \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \end{array} \right)$$

Comme $\mathbb{A}^{[k]} = \mathbb{G}^{[k]} \mathbb{A}$, en utilisant les règles de multiplication par blocs des matrices on obtient

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \bullet \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet & \bullet \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_k & \bullet \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \bullet & \cdots & \bullet & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{k+1} \end{pmatrix}$$

En prenant le déterminant de cette dernière équation, et en utilisant le fait que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux, on obtient

$$\prod_{i=1}^{k+1} \alpha_i = \det \Delta_{k+1}.$$

Par hypothèse Δ_{k+1} inversible, ce qui entraîne $\det \Delta_{k+1} \neq 0$ et donc $\alpha_i \neq 0, \forall i \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$. On a donc

$$\alpha_{k+1} = \frac{\det \Delta_{k+1}}{\prod_{i=1}^k \alpha_i} \neq 0.$$

- Montrons l'existence d'une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité permettant d'éliminer les termes sous diagonaux de la colonne $k + 1$ de $\mathbb{A}^{[k]}$.

Revenons à l'écriture bloc de premier bloc diagonal de dimension k . On a

$$\mathbb{A}^{[k]} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_k & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_{k+1} & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \end{array} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U}^{[k]} & \mathbb{F}^{[k]} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{V}^{[k]} \end{array} \right)$$

Nous sommes exactement dans le cas de figure étudié dans l'exercice 3.1.3, page 63. En effet, avec les notations de cet exercice et si l'on pose $\mathbf{v} = \mathbb{V}_{:,1}^{[k]} = (A_{k+1,k+1}^{[k]}, \dots, A_{n,k+1}^{[k]})^\top \in \mathbb{C}^{n-(k+1)}$ (en bleu dans l'expression de $\mathbb{A}^{[k]}$ précédente) on a alors $v_1 = A_{k+1,k+1}^{[k]} = \alpha_{k+1} \neq 0$ et l'on peut définir la matrice $\mathbb{E}^{[k+1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité, par

$$\mathbb{E}^{[k+1]} = \mathbb{E}^{[k,\mathbf{v}]} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_k & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} \end{array} \right)$$

avec $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité (définie dans l'exercice 3.1.3) telle que

$$\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} \mathbb{V}^{[k]} = \begin{pmatrix} \alpha_{k+1} & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{A}^{[k+1]} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}^{[k+1]} \mathbb{A}^{[k]} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_k & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U}^{[k]} & \mathbb{F}^{[k]} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{V}^{[k]} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U}^{[k]} & \mathbb{F}^{[k]} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} \mathbb{V}^{[k]} \end{array} \right)\end{aligned}$$

et donc $\mathbb{A}^{[k+1]}$ s'écrit bien sous la forme (P-1) au rang $k + 1$.

Final ($k = n - 1$): On a donc

$$\mathbb{U} = \mathbb{A}^{[n-1]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{E}^{[1]} \times \mathbb{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{n-1} & \bullet \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & \bullet \end{array} \right) \quad (\text{P-2})$$

où pour tout $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ les matrices $\mathbb{E}^{[k]}$ sont triangulaires inférieures à diagonale unité.

Pour achever l'exercice, il reste à démontrer que

$$U_{n,n} = \det \Delta_n / (U_{1,1} \times \cdots \times U_{n-1,n-1}).$$

En effet, en prenant le déterminant dans (P-2) on obtient

$$\det \left(\mathbb{E}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{E}^{[1]} \times \mathbb{A} \right) = \det \left(\begin{array}{cccc|c} U_{1,1} & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & U_{n-1,n-1} & \bullet \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & U_{n,n} \end{array} \right)$$

Comme le déterminant d'un produit de matrices est égale au produit des déterminants des matrices on a

$$\begin{aligned}\det \left(\mathbb{E}^{[n-1]} \times \dots \times \mathbb{E}^{[1]} \times \mathbb{A} \right) &= \det \mathbb{E}^{[n-1]} \times \dots \times \det \mathbb{E}^{[1]} \times \det \mathbb{A} \\ &= \det \mathbb{A}\end{aligned}$$

car les matrices $\mathbb{E}^{[k]}$ sont triangulaires inférieures à diagonale unité et donc $\det \mathbb{E}^{[k]} = 1, \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. De plus, le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est égale au produit de ses coefficients diagonaux et donc

$$\det \left(\begin{array}{cccc|c} U_{1,1} & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & U_{n-1,n-1} & \bullet \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & U_{n,n} \end{array} \right) = U_{n,n} \prod_{k=1}^{n-1} U_{k,k}.$$

On a alors

$$\det \mathbb{A} = \det \Delta_n = U_{n,n} \prod_{k=1}^{n-1} U_{k,k}, k \neq 0.$$

◇

