**Exercice**

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ une matrice et $(\lambda, \boldsymbol{u})$ un élément propre de $\mathbb{A}$ avec $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$.

**Q. 1** *En s'aidant de la base canonique* $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ , *construire une base orthonormée* $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ *telle que* $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{u}$.

Notons $\mathbb{P}$ la matrice de changement de base canonique $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ dans la base $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ :

$$\mathbb{P} = \left( \begin{array}{c:c:c} \boldsymbol{x}_1 & \ldots & \boldsymbol{x}_n \end{array} \right)$$

Soit $\mathbb{B}$ la matrice définie par $\mathbb{B} = \mathbb{P}^*\mathbb{A}\mathbb{P}$.

**Q. 2** 1. *Exprimer les coefficients de la matrice* $\mathbb{B}$ *en fonction de la matrice* $\mathbb{A}$ *et des vecteurs* $\boldsymbol{x}_i$, $i \in [\![1, n]\!]$.

$$\mathbb{B} = \mathbb{P}^*\mathbb{A}\mathbb{P}.$$

2. *En déduire que la première colonne de* $\mathbb{B}$ *est* $(\lambda, 0, \ldots, 0)^t$.

**Q. 3** *Montrer par récurrence sur l'ordre de la matrice que la matrice* $\mathbb{A}$ *s'écrit*

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*$$

*où* $\mathbb{U}$ *est une matrice unitaire et* $\mathbb{T}$ *une matrice triangulaire supérieure.*

**Q. 4** *En supposant* $\mathbb{A}$ *inversible et la décomposition* $\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*$ *connue, expliquer comment résoudre "simplement" le système linéaire* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

## Correction Exercice

**Q. 1** La première chose à faire est de construire une base contenant $\boldsymbol{u}$ à partir de la base canonique $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$. Comme le vecteur propre $\boldsymbol{u}$ est non nul, il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_j \rangle \neq 0$. La famille $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{j-1}, \boldsymbol{e}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ forme alors une base de $\mathbb{C}^n$ car $\boldsymbol{u}$ n'est pas combinaison linéaire des $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{j-1}, \boldsymbol{e}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$.

On note $\{\boldsymbol{z}_1, \dots, \boldsymbol{z}_n\}$ la base dont le premier élément est $\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{u}$ :

$$\{\boldsymbol{z}_1, \dots, \boldsymbol{z}_n\} = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_{j-1}, \boldsymbol{e}_{j+1}, \dots, \boldsymbol{e}_n\}.$$

On peut ensuite utiliser le **procédé de Gram-Schmidt**, rappelé en Proposition B.19, pour construire une base orthonormée à partir de cette base.
On calcule successivement les vecteurs $\boldsymbol{x}_i$ à partir de la base $\{\boldsymbol{z}_1, \dots, \boldsymbol{z}_n\}$ en construisant un vecteur $\boldsymbol{w}_i$ orthogonal aux vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{i-1}$.

$$\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{z}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{z}_i \rangle \boldsymbol{x}_k$$

puis on obtient le vecteur $\boldsymbol{x}_i$ en normalisant

$$\boldsymbol{x}_i = \frac{\boldsymbol{w}_i}{\|\boldsymbol{w}_i\|}$$

**Q. 2** 1. En conservant l'écriture colonne de la matrice $\mathbb{P}$ on obtient

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^* \\ \hdashline \boldsymbol{x}_2^* \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \boldsymbol{x}_n^* \end{pmatrix} \mathbb{A} \left( \begin{array}{c:c:c:c} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x}_n \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^* \\ \hdashline \boldsymbol{x}_2^* \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \boldsymbol{x}_n^* \end{pmatrix} \left( \begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}\boldsymbol{x}_1 & \mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \dots & \mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \end{array} \right)$$

Ce qui donne

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_1 & {\boldsymbol{x}_1}^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \dots & {\boldsymbol{x}_1}^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \\ \boldsymbol{x}_2^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x}_2^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{x}_n^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_n^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x}_n^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}$$

On a donc

$$B_{i,j} = \boldsymbol{x}_i^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{j}}, \quad \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$$

.

2. On a $\mathbb{A}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$, $\|\boldsymbol{u}\| = 1$, la base $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n\}$ est orthonormée et $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{u}$. on obtient alors

$$\mathbb{B} = \left(\begin{array}{c:ccc} \lambda\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u} & \boldsymbol{u}^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{u}^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \\ \hdashline \lambda\boldsymbol{x}_2^*\boldsymbol{u} & \boldsymbol{x}_2^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x}_2^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda\boldsymbol{x}_n^*\boldsymbol{u} & \boldsymbol{x}_n^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x}_n^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:ccc} \lambda & \boldsymbol{u}^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{u}^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \\ \hdashline 0 & \boldsymbol{x}_2^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x}_2^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \boldsymbol{x}_n^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x}_n^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \end{array}\right)$$

**Q. 3** On veut démontrer, par récurrence faible, la proposition suivante pour $n \geqslant 2$

$$(\mathcal{P}_n)\quad \forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists \mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ unitaire},\ \exists \mathbb{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ triangulaire supérieure},\ \text{telles que } \mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*.$$

**Initialisation :** Montrons que $(\mathcal{P}_2)$ est vérifié.

Soit $\mathbb{A}_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Elle admet au moins un élément propre $(\lambda, \boldsymbol{u})$ (voir Proposition B.40 par ex.) avec $\|\boldsymbol{u}\| = 1$. On peut donc appliquer le résultat de la question précédente : il existe une matrice unitaire $\mathbb{P}_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que la matrice $\mathbb{B}_2 = \mathbb{P}_2\mathbb{A}_2\mathbb{P}_2^*$ ait comme premier vecteur colonne $(\lambda, 0)^t$. La matrice $\mathbb{B}_2$ est donc triangulaire supérieure et comme $\mathbb{P}_2$ est unitaire on en déduit

$$\mathbb{A}_2 = \mathbb{P}_2^*\mathbb{B}_2\mathbb{P}_2.$$

On pose $\mathbb{U}_2 = \mathbb{P}_2^*$ matrice unitaire et $\mathbb{T}_2 = \mathbb{B}_2$ matrice triangulaire supérieure pour conclure que la propostion $(\mathcal{P}_2)$ est vraie.

**Hérédité :** Supposons que $(\mathcal{P}_{n-1})$ soit vérifiée. Montrons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie.

Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Elle admet au moins un élément propre $(\lambda, \boldsymbol{u})$ (voir Proposition B.40 par ex.) avec $\|\boldsymbol{u}\| = 1$. On peut donc appliquer le résultat de la question précédente : il existe une matrice unitaire $\mathbb{P}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $\mathbb{B}_n = \mathbb{P}_n\mathbb{A}_n\mathbb{P}_n^*$ s'écrivent

$$\mathbb{B}_n = \left(\begin{array}{c:c} \lambda & \boldsymbol{c}_{n-1}^* \\ \hdashline 0 & \\ \vdots & \mathbb{A}_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right)$$

où $\boldsymbol{c}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})$ et $\mathbb{A}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. Par hypothèse de récurrence, $\exists \mathbb{U}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ unitaire et $\mathbb{T}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telles que

$$\mathbb{A}_{n-1} = \mathbb{U}_{n-1}\mathbb{T}_{n-1}\mathbb{U}_{n-1}^*$$

ou encore

$$\mathbb{T}_{n-1} = \mathbb{U}_{n-1}^*\mathbb{A}_{n-1}\mathbb{U}_{n-1}.$$

Soit $\mathbb{Q}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\mathbb{Q}_n = \left(\begin{array}{c:ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

La matrice $\mathbb{Q}_n$ est unitaire. En effet on a

$$\mathbb{Q}_n\mathbb{Q}_n^* = \left(\begin{array}{c:ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1}^* & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & \underbrace{\mathbb{U}_{n-1}\mathbb{U}_{n-1}^*}_{=\mathbb{I}_{n-1}} & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \mathbb{I}_n.$$

On note $\mathbb{T}_n$ la matrice définie par $\mathbb{T}_n = \mathbb{Q}_n^* \mathbb{B}_n \mathbb{Q}_n$. On a alors

$$\mathbb{T}_n = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1}^* & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & & \boldsymbol{c}_{n-1}^* & \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{A}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & & \boldsymbol{c}_{n-1}^* & \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1}^* \mathbb{A}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \boldsymbol{c}_{n-1}^* \mathbb{U}_{n-1}^* \\ \hline 0 & \\ \vdots & \underbrace{\mathbb{U}_{n-1}^* \mathbb{A}_{n-1} \mathbb{U}_{n-1}}_{=\mathbb{T}_{n-1}} = \\ 0 & \end{array}\right)$$

La matrice $\mathbb{T}_n$ est donc triangulaire supérieure et on a par définition de $\mathbb{B}_n$

$$\mathbb{T}_n = \mathbb{Q}_n^* \mathbb{P}_n \mathbb{A}_n \mathbb{P}_n^* \mathbb{Q}_n.$$

On note $\mathbb{U}_n = \mathbb{P}_n^* \mathbb{Q}_n$. Cette matrice est unitaire car les matrices $\mathbb{Q}_n$ et $\mathbb{P}_n$ le sont. En effet, on a

$$\mathbb{U}_n \mathbb{U}_n^* = \mathbb{P}_n^* \mathbb{Q}_n (\mathbb{P}_n^* \mathbb{Q}_n)^* = \mathbb{P}_n^* \underbrace{\mathbb{Q}_n \mathbb{Q}_n^*}_{=\mathbb{I}_n} \mathbb{P}_n = \mathbb{P}_n^* \mathbb{P}_n = \mathbb{I}_n.$$

On a $\mathbb{T}_n = \mathbb{U}_n^* \mathbb{A}_n \mathbb{U}_n$ et en multipliant cette équation à gauche par $\mathbb{U}_n$ et à droite par $\mathbb{U}_n^*$ on obtient l'équation équivalente $\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n \mathbb{T}_n \mathbb{U}_n^*$. La propriété $(\mathcal{P}_n)$ est donc vérifiée. Ce qui achève la démonstration.

**Q. 4** Résoudre $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ est équivalent à résoudre

$$\mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^* \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}. \tag{P-1}$$

Comme $\mathbb{U}$ est unitaire, on a $\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I}$ et $\mathbb{U}^*$ inversible. Donc en multipliant (P-1) par $\mathbb{U}^*$ on obtient le système équivalent

$$\underbrace{\mathbb{U}^*\mathbb{U}}_{=\mathbb{I}} \mathbb{T}\mathbb{U}^* \boldsymbol{x} = \mathbb{U}^* \boldsymbol{b} \iff \mathbb{T}\mathbb{U}^* \boldsymbol{x} = \mathbb{U}^* \boldsymbol{b}.$$

On pose $\boldsymbol{y} = \mathbb{U}^* \boldsymbol{x}$. Le système précédant se résoud en deux étapes

1. on cherche $\boldsymbol{y}$ solution de $\mathbb{T}\boldsymbol{y} = \mathbb{U}^*\boldsymbol{b}$. Comme $\mathbb{U}$ est unitaire on a $\det(\mathbb{U})\det(\mathbb{U}^*) = \det(\mathbb{I}) = 1$ et donc

$$\begin{aligned}\det(\mathbb{A}) &= \det(\mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*) = \det(\mathbb{U})\det(\mathbb{T})\det(\mathbb{U}^*)\\ &= \det(\mathbb{T})\end{aligned}$$

   Or $\mathbb{A}$ inversible équivalent à $\det(\mathbb{A}) \neq 0$ et donc la matrice $\mathbb{T}$ est inversible. La matrice $\mathbb{T}$ étant triangulaire supérieure on peut résoudre facilement le système par la *méthode de remontée*.

2. une fois $\boldsymbol{y}$ déterminé, on résoud $\mathbb{U}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. Comme $\mathbb{U}$ est unitaire, on obtient directement $\boldsymbol{x} = \mathbb{U}\boldsymbol{y}$.

$\diamond$