

Exercice: Méthode de Gauss, écriture algébrique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible.

Q. 1 Montrer qu'il existe une matrice $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det(G)| = 1$ et $GA\mathbf{e}_1 = \alpha\mathbf{e}_1$ avec $\alpha \neq 0$ et \mathbf{e}_1 premier vecteur de la base canonique de \mathbb{C}^n .

Q. 2 1. Montrer par récurrence sur l'ordre des matrices que pour toute matrice $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, il existe une matrice $S_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det S_n| = 1$ et $S_n A_n = U_n$ avec U_n matrice triangulaire supérieure inversible.

2. Soit $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$. En supposant connue la décomposition précédente $S_n A_n = U_n$, expliquer comment résoudre le système $A_n \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Q. 3 Que peut-on dire si A est non inversible?

Correction Exercice 3.1.3

Q. 1 D'après le Lemme 3.3, si $A_{1,1} \neq 0$ le résultat est immédiat. Dans l'énoncé rien ne vient corroborer cette hypothèse. Toutefois, comme la matrice A est inversible, il existe au moins un $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $A_{p,1} \neq 0$. On peut même choisir le premier indice p tel que $|A_{p,1}| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |A_{i,1}| > 0$ (pivot de l'algorithme de Gauss-Jordan). On note $P = P_n^{[1,p]}$ la matrice de permutation des lignes 1 et p (voir exercice 3.1.4, page 66). De plus on a

$$|\det P| = 1 \quad \text{et} \quad P^{-1} = P.$$

Par construction $(PA)_{1,1} = A_{p,1} \neq 0$, et on peut alors appliquer le Lemme 3.3 à la matrice (PA) pour obtenir l'existence d'une matrice $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\det E = 1$ et telle que

$$E(PA)\mathbf{e}_1 = A_{p,1}\mathbf{e}_1.$$

En posant $G = EP$ et $\alpha = A_{p,1}$, on obtient bien $GA\mathbf{e}_1 = \alpha\mathbf{e}_1$. De plus, on a

$$|\det G| = |\det(EP)| = |\det E \times \det P| = 1.$$

Remarque 0.1 La matrice \mathbb{G} étant inversible, on a

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \mathbb{G}\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbb{G}\mathbf{b}$$

ce qui correspond à la première *permutation/élimination* de l'algorithme de Gauss-Jordan.

Q. 2 1. On veut démontrer par récurrence la propriété (\mathcal{P}_n) ,

$$(\mathcal{P}_n) \quad \begin{cases} \forall \mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \text{ inversible } \exists \mathbb{S}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), |\det \mathbb{S}_n| = 1, \text{ tel que} \\ \text{la matrice } \mathbb{U}_n = \mathbb{S}_n \mathbb{A} \text{ soit une triangulaire supérieure inversible} \end{cases}$$

Initialisation : Pour $n = 2$. Soit $\mathbb{A}_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ inversible. En utilisant la question précédente il existe $\mathbb{G}_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $|\det \mathbb{G}_2| = 1$ et $\mathbb{G}_2 \mathbb{A}_2 \mathbf{e}_1 = \alpha \mathbf{e}_1$ avec $\alpha \neq 0$ et \mathbf{e}_1 premier vecteur de la base canonique de \mathbb{C}^2 . On note $\mathbb{U}_2 = \mathbb{G}_2 \mathbb{A}_2$. Cette matrice s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{U}_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \bullet \\ 0 & \bullet \end{pmatrix}$$

et elle est triangulaire supérieure. Les matrices \mathbb{G}_2 et \mathbb{A}_2 étant inversibles, leur produit \mathbb{U}_2 l'est aussi. La proposition (\mathcal{P}_2) est donc vérifiée avec $\mathbb{S}_2 = \mathbb{G}_2$.

Hérédité : Soit $n \geq 3$. On suppose que (\mathcal{P}_{n-1}) est vraie. Montrons que (\mathcal{P}_n) est vérifiée.

Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible. En utilisant la question précédente il existe $\mathbb{G}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det \mathbb{G}_n| = 1$ et $\mathbb{G}_n \mathbb{A}_n \mathbf{e}_1 = \alpha_n \mathbf{e}_1$ avec $\alpha_n \neq 0$ et \mathbf{e}_1 premier vecteur de la base canonique de \mathbb{C}^n . On note $\mathbb{V}_n = \mathbb{G}_n \mathbb{A}_n$. Cette matrice s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{V}_n = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_n & \bullet & \dots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \dots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \dots & \bullet \end{array} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_n & \mathbf{c}_{n-1}^* & & \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{B}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

où $\mathbf{c}_{n-1} \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $\mathbb{B}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. Comme \mathbb{G}_n et \mathbb{A}_n sont inversibles, \mathbb{V}_n l'est aussi. On en déduit donc que \mathbb{B}_{n-1} est inversible car $0 \neq \det \mathbb{V}_n = \alpha_n \times \det \mathbb{B}_{n-1}$ et $\alpha_n \neq 0$.

On peut donc utiliser la propriété (\mathcal{P}_{n-1}) (hyp. de récurrence) sur la matrice \mathbb{B}_{n-1} : il existe donc $\mathbb{S}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$, avec $|\det \mathbb{S}_{n-1}| = 1$, tel que la matrice $\mathbb{U}_{n-1} = \mathbb{S}_{n-1}\mathbb{B}_{n-1}$ soit une triangulaire supérieure inversible. Soit $\mathbb{Q}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\mathbb{Q}_n = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{S}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_n \mathbb{G}_n \mathbb{A}_n &= \mathbb{Q}_n \mathbb{V}_n = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{S}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \alpha_n & \mathbf{c}_{n-1}^* \\ \hline 0 & \mathbb{B}_{n-1} \\ \vdots & \\ 0 & \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \alpha_n & \mathbf{c}_{n-1}^* \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{S}_{n-1}\mathbb{B}_{n-1} \\ 0 & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_n & \mathbf{c}_{n-1}^* \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{U}_{n-1} \\ 0 & \end{array} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{U}_n \end{aligned}$$

La matrice \mathbb{U}_n est triangulaire supérieure inversible car \mathbb{U}_{n-1} l'est aussi et $\alpha_n \neq 0$.

On pose $\mathbb{S}_n = \mathbb{Q}_n \mathbb{G}_n$. On a donc

$$\mathbb{S}_n \mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n.$$

De plus, comme on a $\det \mathbb{S}_n = \det \mathbb{Q}_n \times \det \mathbb{G}_n$, et $\det \mathbb{Q}_n = \det \mathbb{S}_{n-1}$, on obtient, en utilisant $|\det \mathbb{G}_n| = 1$ et l'hypothèse de récurrence $|\det \mathbb{S}_{n-1}| = 1$, que

$$|\det \mathbb{S}_n| = 1.$$

Ceci prouve la véracité de la proposition (\mathcal{P}_n) .

2. Comme \mathbb{S}_n est inversible, on a en multipliant à gauche le système par \mathbb{S}_n

$$\mathbb{A}_n \mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \mathbb{S}_n \mathbb{A}_n \mathbf{x} = \mathbb{S}_n \mathbf{b} \iff \mathbb{U}_n \mathbf{x} = \mathbb{S}_n \mathbf{b}$$

Pour déterminer le vecteur \mathbf{x} , on peut alors résoudre le dernier système par l'algorithme de remontée.

Q. 3 (rapide) Si \mathbb{A} est non inversible, alors dans la première question nous ne sommes pas assurés d'avoir $\alpha \neq 0$. Cependant l'existence de la matrice \mathbb{G} reste avérée.

Pour la deuxième question, le seul changement vient du fait que la matrice \mathbb{U}_n n'est plus inversible.

◇

