

Théorème 0.1

Soient \mathbb{A} et $\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A}$ deux matrices inversibles. Soient \mathbf{x} et $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ les solutions respectives de

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ et } (\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A})(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}.$$

Supposons $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, alors on a

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}\|} \leq \text{cond}(\mathbb{A}) \frac{\|\Delta\mathbb{A}\|}{\|\mathbb{A}\|}.$$

Proof. On a

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} = (\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A})(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbb{A}\mathbf{x} + \mathbb{A}\Delta\mathbf{x} + \Delta\mathbb{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$$

et donc

$$\mathbb{A}\Delta\mathbf{x} + \Delta\mathbb{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{0} \iff \Delta\mathbf{x} = -\mathbb{A}^{-1}\Delta\mathbb{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$$

On en déduit alors

$$\|\Delta\mathbf{x}\| = \|\mathbb{A}^{-1}\Delta\mathbb{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})\| \leq \|\mathbb{A}^{-1}\| \|\Delta\mathbb{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})\| \leq \|\mathbb{A}^{-1}\| \|\Delta\mathbb{A}\| \|\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}\|$$

De plus, on a $\text{cond}(\mathbb{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathbb{A}\| \|\mathbb{A}^{-1}\|$ et donc $\|\mathbb{A}^{-1}\| = \frac{\text{cond}(\mathbb{A})}{\|\mathbb{A}\|}$ ce qui donne

$$\|\Delta\mathbf{x}\| \leq \text{cond}(\mathbb{A}) \frac{\|\Delta\mathbb{A}\|}{\|\mathbb{A}\|} \|\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}\|.$$

Comme $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, on a $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} = (\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A})^{-1}\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ et de l'inégalité précédente, on déduit alors

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}\|} \leq \text{cond}(\mathbb{A}) \frac{\|\Delta\mathbb{A}\|}{\|\mathbb{A}\|}.$$

□

