Analyse Numérique I

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 1ère année

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

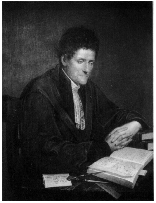
2022/10/07

Plan du cours

Racines/zéros d'un polynôme

- **degré 2** : Babylonniens en 1600 avant J.-C.
- **degré 3** : *Scipio del Ferro* (1465-1526, mathématicien italien) et *Niccolo Fontana* (1499-1557, mathématicien italien)
- **degré 4** : *Ludovico Ferrari* (1522-1565, mathématicien italien)
- **degré 5** : *Paolo Ruffini* (1765-1822, mathématicien italien) en 1799, *Niels Henrick Abel* (1802-1829, mathématicien norvégien) en 1824, montrent qu'il n'existe **pas de solution analytique**.

(a) *Niccolo Fontana* 1499-1557, mathématicien italien



(b) *Paolo Ruffini* 1765-1822, mathématicien italien

(c) *Niels Henrick Abel* 1802-1829, mathématicien norvégien

Plan

Soit $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

$$\alpha \in \mathcal{D} \text{ tels que } f(\alpha) = 0.$$

Soit $I =]a, b[$, $\bar{I} \subset \mathcal{D}$ on suppose $\exists! \alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Plan

principe de la méthode de dichotomie : Soit I un intervalle contenant un **unique zéro** de la fonction f, on le divise par son milieu en deux intervalles et on détermine lequel des deux contient le zéro. On itére ce processus sur le nouvel intervalle.

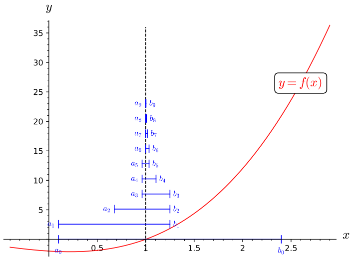


Figure: Méthode de dichotomie: $f(x) = (x+2)(x+1)(x-1)$

principe de la méthode de dichotomie : Soit I un intervalle contenant un **unique zéro** de la fonction f, on le divise par son milieu en deux intervalles et on détermine lequel des deux contient le zéro. On itére ce processus sur le nouvel intervalle.

- $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_0 = \frac{a+b}{2}$,
- $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} a_{k+1} = b_{k+1} = x_k & \text{si } f(x_k) = 0, \\ a_{k+1} = x_k,\ b_{k+1} = b_k & \text{si } f(b_k)f(x_k) < 0, \\ a_{k+1} = a_k,\ b_{k+1} = x_k & \text{sinon (i.e. } f(a_k)f(x_k) < 0.) \end{cases}$$

et

$$x_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2.$$

Exercice 1

On suppose que la fonction f est continue sur $[a, b]$, vérifie $f(a)f(b) < 0$ et qu'il existe un unique $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Q.1

1. *Montrer que les suites* (a_k) *et* (b_k) *convergent vers* α.
2. *En déduire que la suite* (x_k) *converge vers* α.

Q.2

1. *Montrer que pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - \alpha| \leqslant \frac{b-a}{2^{k+1}}$.
2. *Soit* $\epsilon > 0$. *En déduire que si* $k \geqslant \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$ *alors* $|x_k - \alpha| \leqslant \epsilon$.

Proposition 1.1

Soit $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(a)f(b) < 0$ et admettant $\alpha \in]a, b[$ comme **unique** solution de $f(x) = 0$. Alors la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la méthode de dichotomie converge vers α et

$$|x_k - \alpha| \leqslant \frac{b-a}{2^{k+1}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On a alors $\forall \epsilon > 0$, $\forall k \geqslant \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$

$$|x_k - \alpha| \leqslant \epsilon.$$

Algorithme

- Que cherche-t'on?
- Quelles sont les données du problèmes?

Algorithme

- Que cherche-t'on?

  Résultat :

  α_ϵ : un réel tel que $|\alpha_\epsilon - \alpha| \leqslant \epsilon$.

- Quelles sont les données du problèmes?

- Que cherche-t'on?

Résultat :

α_ϵ : un réel tel que $|\alpha_\epsilon - \alpha| \leqslant \epsilon$.

- Quelles sont les données du problèmes?

Données :

$a,\ b$: deux réels $a < b$,

f : $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses de la proposition ,

ϵ : un réel strictement positif.

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_0}$

$k_{\min} \leftarrow \mathrm{E}(\frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)})$ $\quad \triangleright$ E , partie entière

Calcul de la suite $(x_k)_{k=0}^{k_{\min}}$ par dichotomie

$\alpha_\epsilon \leftarrow x_{k_{\min}}$

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_1}$

$k_{\min} \leftarrow \mathrm{E}(\frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)})$ $\quad \triangleright$ E , partie entière

Initialisation de x_0

Pour $k \leftarrow 0$ **à** $k_{\min} - 1$ **faire**

  Calcul de la suite (x_{k+1}) par dichotomie

Fin Pour

$\alpha_\epsilon \leftarrow x_{k_{\min}}$

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_1}$

$k_{\min} \leftarrow \mathrm{E}(\frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)})$ ▷ E , partie entière
$\boxed{\text{Initialisation de } x_0}$
Pour $k \leftarrow 0$ **à** $k_{\min} - 1$ **faire**
    $\boxed{\text{Calcul de la suite } (x_{k+1}) \text{ par dichotomie}}$
Fin Pour
$\alpha_\epsilon \leftarrow x_{k_{\min}}$

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_2}$

$k_{\min} \leftarrow \mathrm{E}(\frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)})$
$a_0 \leftarrow a, \; b_0 \leftarrow b$
$x_0 \leftarrow \frac{a_0+b_0}{2}$
Pour $k \leftarrow 0$ **à** $k_{\min} - 1$ **faire** ▷ Calcul de x_{k+1}
    Si $f(x_k) == 0$ **alors**
        $a_{k+1} \leftarrow x_k, \; b_{k+1} \leftarrow x_k$
    Sinon Si $f(x_k)f(b_k) < 0)$ **alors**
        $a_{k+1} \leftarrow x_k, \; b_{k+1} \leftarrow b_k$
    Sinon
        $a_{k+1} \leftarrow a_k, \; b_{k+1} \leftarrow x_k$
    Fin Si
    $x_{k+1} \leftarrow \frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2}$
Fin Pour
$\alpha_\epsilon \leftarrow x_{k_{\min}}$

Algorithm Méthode de dichotomie : version 1

Données : $a,\ b$: deux réels $a < b$,
f : $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses de la proposition 1.1,
eps : un réel strictement positif.

Résultat : x : un réel tel que $|x - \alpha| \leqslant \mathrm{eps}$.

```
Fonction x ← Dichotomie1 ( f, a, b, eps )
   kmin ← E(log((b − a)/eps)/log(2))
   A, B, X ∈ ℝ^(kmin+1)                  ▷ A(k + 1) contiendra a_k, ...
   A(1) ← a, B(1) ← b, X(1) ← (a + b)/2
   Pour k ← 1 à kmin faire
      Si f(X(k)) == 0 alors
         A(k + 1) ← X(k), B(k + 1) ← X(k)
      Sinon Si f(B(k))f(X(k)) < 0 alors
         A(k + 1) ← X(k), B(k + 1) ← B(k)
      Sinon
         A(k + 1) ← A(k), B(k + 1) ← X(k)
      Fin Si
      X(k + 1) ← (A(k + 1) + B(k + 1))/2
   Fin Pour
   x ← X(kmin + 1)
Fin Fonction
```

Algorithme : versions 2, 3 et + si affinités

- $A = a,\ B = b$ et $x_0 = \frac{A+B}{2}$,
- $\forall k \in [\![0, k_{\min} - 1]\!]$,

$$\begin{cases} A = B = x_k & \text{si } f(x_k) = 0, \\ A = x_k,\ B \text{ inchangé} & \text{si } f(B)f(x_k) < 0, \\ B = x_k,\ A \text{ inchangé} & \text{sinon (i.e. } f(A)f(x_k) < 0.) \end{cases}$$

et

$$x_{k+1} = \frac{A+B}{2}$$

Algorithm Méthode de dichotomie : version 2

Données : $a, \ b$: deux réels $a < b$,
f : $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses de la proposition 1.1,
eps : un réel strictement positif.

Résultat : x : un réel tel que $|x - \alpha| \leqslant \mathrm{eps}$.

Fonction $x \leftarrow$ DICHOTOMIE2 (f, a, b, eps)
  $\mathrm{kmin} \leftarrow \mathrm{E}(\log((b - a)/\mathrm{eps})/\log(2))$
  $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{\mathrm{kmin}+1}$ ▷ $\boldsymbol{X}(k+1)$ contiendra x_k, ...
  $\mathrm{A} \leftarrow a, \ \mathrm{B} \leftarrow b, \ \boldsymbol{X}(1) \leftarrow (\mathrm{A} + \mathrm{B})/2$
  Pour $k \leftarrow 1$ **à** kmin **faire**
    Si $f(\boldsymbol{X}(k)) == 0$ **alors**
      $\mathrm{A} \leftarrow \boldsymbol{X}(k), \ \mathrm{B} \leftarrow \boldsymbol{X}(k)$
    Sinon Si $f(\mathrm{B})f(\boldsymbol{X}(k)) < 0$ **alors**
      $\mathrm{A} \leftarrow \boldsymbol{X}(k)$ ▷ B inchangé
    Sinon
      $\mathrm{B} \leftarrow \boldsymbol{X}(k)$ ▷ A inchangé
    Fin Si
    $\boldsymbol{X}(k+1) \leftarrow (\mathrm{A} + \mathrm{B})/2$
  Fin Pour
  $x \leftarrow \boldsymbol{X}(\mathrm{kmin} + 1)$
Fin Fonction

Algorithm Méthode de dichotomie : version 3

Données :
- a, b : deux réels $a < b$,
- f : $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses de la proposition 1.1,
- eps : un réel strictement positif.

Résultat : x : un réel tel que $|x - \alpha| \leqslant \mathrm{eps}$.

Fonction $x \leftarrow$ DICHOTOMIE3 $(\, f, a, b, \mathrm{eps}\,)$
    $\mathrm{kmin} \leftarrow \mathrm{E}(\log((b - a)/\mathrm{eps})/\log(2))$
    $A,\ B \in \mathbb{R}$
    $A \leftarrow a,\ B \leftarrow b,\ x \leftarrow (a + b)/2$
    Pour $k \leftarrow 1$ **à** kmin **faire**
        Si $f(x) == 0$ **alors**
            $A \leftarrow x,\ B \leftarrow x$
        Sinon Si $f(B)f(x) < 0$ **alors**
            $A \leftarrow x$ ▷ B inchangé
        Sinon
            $B \leftarrow x$ ▷ A inchangé
        Fin Si
        $x \leftarrow (A + B)/2$
    Fin Pour
Fin Fonction

Algorithm Méthode de dichotomie : version 4

Données : $a,\ b$: deux réels $a < b$,
f : $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ et $f(a)f(b) < 0$
eps : un réel strictement positif.

Résultat : x : un réel tel que $|x - \alpha| \leqslant \text{eps}$.

Fonction $x \leftarrow$ DICHOTOMIE4 $(\ f, a, b, \text{eps}\ )$
  $A,\ B \in \mathbb{R}$
  $A \leftarrow a,\ B \leftarrow b,\ x \leftarrow (a+b)/2$
  Tantque $|x - A| > \text{eps}$ **faire**
    Si $f(x) == 0$ **alors**
      $A \leftarrow x,\ B \leftarrow x$
    Sinon Si $f(B)f(x) < 0$ **alors**
      $A \leftarrow x$ $\rhd$ B inchangé
    Sinon
      $B \leftarrow x$ $\rhd$ A inchangé
    Fin Si
    $x \leftarrow (A+B)/2$
  Fin Tantque
Fin Fonction

Que pensez vous de cet algorithme?

Algorithm Méthode de dichotomie : version 5

Données : a, b : deux réels $a < b$,
f : $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ et $f(a)f(b) < 0$.

Résultat : x : un réel tel que $f(x) = 0$.

Fonction $x \leftarrow$ DICHOTOMIE5 (f, a, b)
  $A,\ B \in \mathbb{R}$
  $A \leftarrow a,\ B \leftarrow b,\ x \leftarrow (a + b)/2,\ \mathrm{xp} \leftarrow a$
  Tantque $x \sim= \mathrm{xp}$ **faire**
    Si $f(B)f(x) < 0$ **alors**
      $A \leftarrow x$ ▷ B inchangé
    Sinon
      $B \leftarrow x$ ▷ A inchangé
    Fin Si
    $\mathrm{xp} \leftarrow x$
    $x \leftarrow (A + B)/2$
  Fin Tantque
Fin Fonction

Plan

Points fixes

Soit $\Phi : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée. Rechercher un **point fixe** de Φ revient à

> Trouver $\alpha \in [a, b]$ tel que
> $$\alpha = \Phi(\alpha).$$

L'algorithme de la **méthode du point fixe** consiste en la construction, si elle existe, de la suite

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}), \ \forall k \in \mathbb{N} \qquad (1)$$

avec $x^{(0)} \in [a, b]$ donné.

Definition 1.2

Soient (E, d) un **espace métrique** et $(\boldsymbol{u}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers $\boldsymbol{\alpha} \in E$. On dit que cette suite **converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ avec un ordre $p \geqslant 1$ au moins** si

$$\exists k_0 \in \mathbb{N},\ \exists C > 0 \ \text{ tels que } \ \mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k+1]}, \boldsymbol{\alpha}) \leqslant C\, \mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k]}, \boldsymbol{\alpha})^p,\ \forall k \geqslant k_0. \quad (2)$$

où $C < 1$ si $p = 1$.

Exemples de distances:

- $\mathrm{d}(x, y) = |x - y|$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$
- $\mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ dans $\mathbb{R}^n$, où $\|.\|$ est l'une quelconque des normes habituelles.

Théorème 2: Théorème du point fixe dans $\mathbb{R}$

Soient $[a, b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et Φ une application continue de $[a, b]$ dans lui-même. Alors, il existe **au moins** un point $\alpha \in [a, b]$ vérifiant $\Phi(\alpha) = \alpha$. Le point α est appelé **point fixe de la fonction** Φ.

De plus, si Φ est contractante (lipschitzienne de rapport $L \in [0, 1[$), c'est à dire

$$\exists L < 1 \text{ t.q. } |\Phi(x) - \Phi(y)| \leqslant L|x - y| \ \forall (x, y) \in [a, b]^2, \tag{3}$$

alors Φ admet un **unique** point fixe $\alpha \in [a, b]$.

Pour tout $x_0 \in [a, b]$, la suite

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \ \forall k \in \mathbb{N} \tag{4}$$

est bien définie et elle converge vers α avec un ordre 1 au moins.

On a les deux estimations suivantes :

$$|x_k - \alpha| \leqslant L^k|x_0 - \alpha|, \ \forall k \geqslant 0, \tag{5}$$

$$|x_k - \alpha| \leqslant \frac{L}{1 - L}|x_k - x_{k-1}|, \ \forall k \geqslant 0, \tag{6}$$

Théorème 3: Convergence globale, méthode du point fixe

Soit $\Phi \in \mathcal{C}^1([a, b])$ vérifiant $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$ et

$$\exists L < 1 \text{ tel que } \forall x \in [a, b], \ |\Phi'(x)| \leqslant L, \tag{7}$$

Soit $x_0 \in [a, b]$ et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. On a alors

1. la fonction Φ admet un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$,
2. $\forall k \in \mathbb{N}, \ x_k \in [a, b]$,
3. la suite (x_k) converge vers α avec un ordre 1 au moins.
4. Si $x_0 \neq \alpha$, alors

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha). \tag{8}$$

Théorème 4: Convergence locale du point fixe

Soit α un point fixe d'une fonction Φ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de α.
Si $|\Phi'(\alpha)| < 1$, alors il existe $\delta > 0$ pour lequel x_k converge vers α pour tout x_0 tel que $|x_0 - \alpha| \leqslant \delta$. De plus, si $x_0 \neq \alpha$, on a

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha). \tag{9}$$

Exercice 2:

Soit α un point fixe d'une fonction Φ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de α et vérifiant $\Phi'(\alpha) = 0$.

Q.1 *Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x_0 \in]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$ la suite définie par $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ converge vers α.*

On suppose de plus que Φ' est dérivable sur $]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$ et qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta],\ |\Phi''(x)| \leqslant M$$

Q.2

1. *Montrer que*

$$\forall x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta],\ |x_k - \alpha| \leqslant \frac{2}{M}\left(\frac{1}{2}M|x_0 - \alpha|\right)^{2^k}$$

2. *Quel est l'ordre de convergence dans ce cas.*

Q.3 *A quelle condition a-t'on*

$$|x_k - \alpha| \leqslant \frac{2}{M}10^{-2^k}.$$

Proposition 4.1:

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $\Phi \in \mathcal{C}^{p+1}(\mathcal{V})$ pour un certain voisinage $\mathcal{V}$ de α point fixe de Φ. Si $\Phi^{(i)}(\alpha) = 0$, pour $1 \leqslant i \leqslant p$ et si $\Phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$, alors la méthode de point fixe associée à la fonction Φ est d'ordre $p+1$ et

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\Phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}. \tag{10}$$

Plan

Points fixes attractifs et répulsifs

Soit $\Phi : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ admettant un point fixe $\alpha \in [a, b]$.

- Si $|\Phi'(\alpha)| < 1$ alors α est un point fixe attractif,
- Si $|\Phi'(\alpha)| > 1$ alors α est un point fixe répulsif.

On s'interesse ici au point fixe $\alpha = 1$ de la fonction $\Phi \ : \ x \mapsto x^2$.

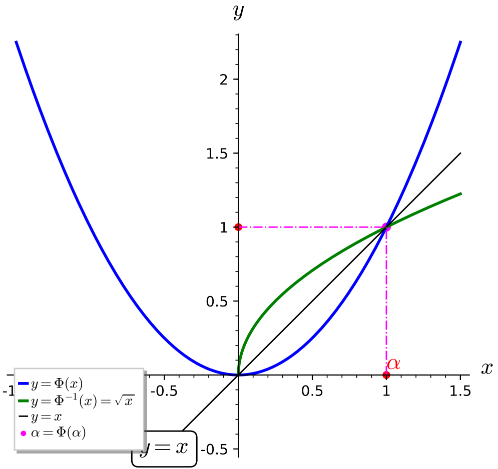
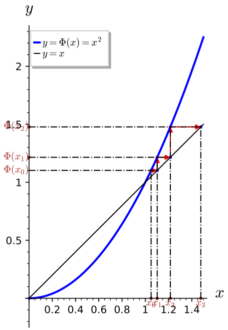
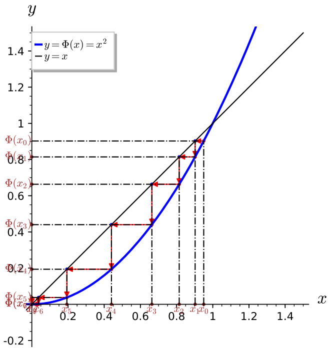


Figure: fonction x^2 et sa fonction réciproque $\sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$

$\Phi'(\alpha) = 2$: **point fixe répulsif**



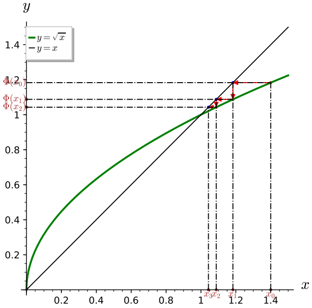
(a) $x_0 = 1.05$



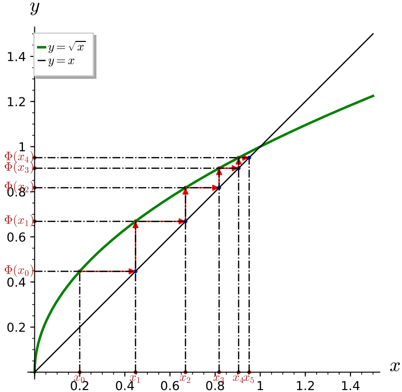
(b) $x_0 = 0.950$

Figure: $\alpha = 1$, point fixe répulsif de $x \mapsto x^2$

$(\Phi^{-1})'(1) = 1/2 < 1$, : **point fixe attractif**



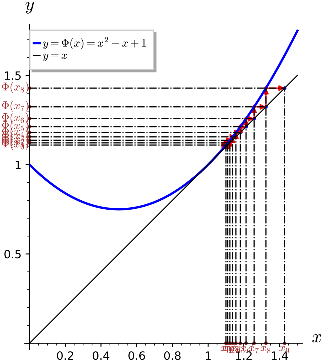
(a) $x_0 = 1.40$



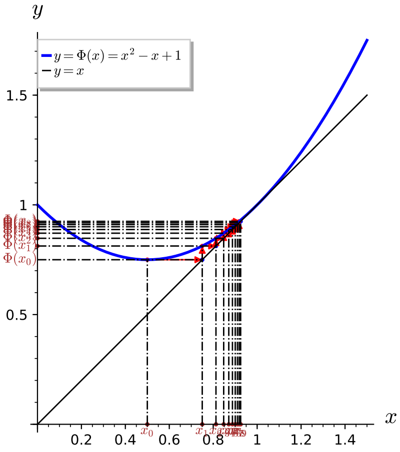
(b) $x_0 = 0.200$

Figure: $\alpha = 1$, point fixe attractif de $\Phi^{-1} : x \mapsto \sqrt{x}$

fonction $\Phi : x \mapsto x^2 - x + 1$: **point fixe $\alpha = 1$, $\Phi'(\alpha) = 1$.**

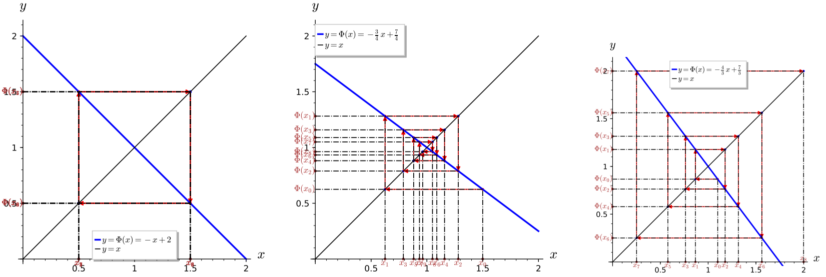


(a) $x_0 = 1.1$, α point répulsif



(b) $x_0 = 0.50$, α point attractif

Figure: $\alpha = 1$, point fixe attractif ou répulsif de $x \mapsto x^2 - x + 1$



(a) $x_0 = 1.50$ (b) $x_0 = 1.50$ (c) $x_0 = 1.10$

Figure: $\alpha = 1$, point fixe de fonctions affines particulières

Plan

Algorithme générique du point fixe

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}), \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \text{avec } x^{(0)} \in [a, b] \text{ donné.}$$

Algorithm Méthode de point fixe : version **Tantque** *formel*

> $k \leftarrow 0$
> **Tantque** non convergence **faire**
> $\quad x_{k+1} \leftarrow \Phi(x_k)$
> $\quad k \leftarrow k + 1$
> **Fin Tantque**
> $\alpha_\epsilon \leftarrow x_k$ ▷ le dernier calculé.

Algorithm Méthode de point fixe : version **Répéter** *formel*

> $k \leftarrow 0$
> **Répéter**
> $\quad k \leftarrow k + 1$
> $\quad x_k \leftarrow \Phi(x_{k-1})$
> **jusqu'à** convergence
> $\alpha_\epsilon \leftarrow x_k$ ▷ le dernier calculé.

Critères d'arrêt?

- On n'est pas sûr de converger $\Longrightarrow$ kmax nb maximum d'itérations
- Si on converge, on s'arrête dès que $|\Phi(x_k) - x_k| = |x_{k+1} - x_k| \leqslant \mathrm{tol}$

Algorithme générique du point fixe

Algorithm Méthode de point fixe : version **Tantque** *formel* avec critères d'arrêt

$k \leftarrow 0$
$\mathrm{err} \leftarrow |\Phi(x_0) - x_0|$ ▷ ou $\frac{|\Phi(x_0)-x_0|}{|x_0|+1}$
Tantque $\mathrm{err} > \epsilon$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
  $k \leftarrow k+1$
  $x_k \leftarrow \Phi(x_{k-1})$
  $\mathrm{err} \leftarrow |\Phi(x_k) - x_k|$ ▷ ou $\frac{|\Phi(x_k)-x_k|}{|x_k|+1}$
Fin Tantque
Si $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors** ▷ Convergence
  $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow x_k$ ▷ $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$
Fin Si

Algorithm Méthode de point fixe : version **Répéter** *formel* avec critères d'arrêt

$k \leftarrow 0$
Répéter
  $\mathrm{err} \leftarrow |\Phi(x_k) - x_k|$ ▷ ou $\frac{|\Phi(x_k)-x_k|}{|x_k|+1}$
  $x_{k+1} \leftarrow \Phi(x_k)$
  $k \leftarrow k+1$
jusqu'à $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ ou $k > \mathrm{kmax}$
Si $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors** ▷ Convergence
  $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow x_k$ ▷ $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$
Fin Si

Algorithme générique du point fixe

Algorithm Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :

Φ	:	$\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
x_0	:	donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
tol	:	la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax	:	nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}})-\alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

```
Fonction α_tol ← PtFixe ( Φ, x0, tol, kmax )
    k ← 0, α_tol ← ∅
    x ← x0, fx ← Φ(x0),
    err ← |fx − x|                                ▷ ou |fx−x|/(|x|+1)
    Tantque err > tol et k ⩽ kmax faire
        k ← k + 1
        x ← fx
        fx ← Φ(x)
        err ← |fx − x|                            ▷ ou |fx−x|/(|x|+1)
    Fin Tantque
    Si err ⩽ tol alors                            ▷ Convergence
        α_tol ← x
    Fin Si
Fin Fonction
```

Algorithm Méthode de point fixe : version **Répéter** avec critères d'arrêt

Données :

Φ	:	$\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
x_0	:	donnée initiale, $x \in \mathbb{R}$,
tol	:	la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax	:	nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}})-\alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

```
Fonction α_tol ← PtFixe ( Φ, x0, tol, kmax )
    k ← 0, α_tol ← ∅
    x ← x0
    Répéter
        xp ← x
        x ← Φ(xp)
        err ← |x − xp|                            ▷ ou |x−xp|/(|xp|+1)
        k ← k + 1
    jusqu'à err ⩽ tol ou k > kmax
    Si err ⩽ tol alors                            ▷ Convergence
        α_tol ← x
    Fin Si
Fin Fonction
```

Plan

$$f(x) = 0 \iff \Phi(x) \stackrel{\textbf{def}}{=} x + f(x) = x.$$

si $\mathcal{F} \in \mathcal{C}^0$ tel que $\mathcal{F}(0) = 0$ alors

$$f(x) = 0 \iff \Phi(x) \stackrel{\textbf{def}}{=} x + \mathcal{F}(f(x)) = x.$$

Objectif : Construire une suite x_{k+1} tel que $|x_{k+1} - \alpha| \leqslant |x_k - \alpha|$.

formule de taylor :

$$f(\alpha) = 0 = f(x_k) + hf'(\xi) \text{ avec } h = \alpha - x_k.$$

Soit $q_k \approx f'(\xi)$ et $\tilde{h}$ solution de

$$f(x_k) + \tilde{h}q_k = 0$$

Si $q_k \neq 0$, on obtient la suite itérative $x_{k+1} = x_k + \tilde{h}$ i.e.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{q_k}, \ \forall k \in \mathbb{N} \tag{11}$$

Applications à la recherche de racines

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{q_k}, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

x_{k+1} : intersection droite de pente q_k passant par $((x_k), f(x_k))$ avec (Ox)

- **Méthode de la corde** :

$$q_k = q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- **Méthode de la sécante** :

$$q_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

  où x_{-1} et x_0 sont données,

- **Méthode de Newton** : en supposant f' connu, on prend

$$q_k = f'(x_k).$$

Plan

Méthode de la corde

Exercice 3:

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ vérifiant $f(a)f(b) < 0$. et $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Soit $x_0 \in [a,b]$ donné. La suite obtenue par la méthode de la corde est donnée par

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

On note $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{\lambda}$.

Q.1 *Montrer que si pour tout* $x \in [a,b]$ *on a*

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leqslant f(x) \leqslant \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \tag{12}$$

alors $\Phi([a,b]) \subset [a,b]$.

Q.2 *Montrer que si pour tout* $x \in [a,b]$ *on a*

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \tag{13}$$

alors $|\Phi'(x)| < 1$.

Q.3 *En déduire que sous les deux conditions précédentes la méthode de la corde converge vers l'unique solution* $\alpha \in [a,b]$ *de* $f(x) = 0$.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x_k), \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

On pose $\Phi(x) = x - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x)$, alors $x_{k+1} = \Phi(x_k)$.

Proposition 4.2: convergence, méthode de la corde

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ tel que $f(b) \neq f(a)$ et $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On note $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 \in [a,b]$ et pour tout $k \geqslant 0$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda}. \tag{14}$$

On suppose de plus que $\forall x \in [a,b]$

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leqslant f(x) \leqslant \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \tag{15}$$

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \tag{16}$$

alors la suite (x_k) converge vers l'unique racine $\alpha \in [a,b]$ de f.

Méthode de la corde

Proposition 4.3: ordre de convergence de la méthode de la corde

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ tel que $f(b) \neq f(a)$. Si la suite (x_k) définie par la méthode de la corde en (14) converge vers $\alpha \in]a,b[$ alors la convergence est au moins d'ordre 1.
De plus, si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un certain voisinage $\mathcal{V}$ de α et si $f'(\alpha) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ alors la convergence est au moins d'ordre 2.

Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$ (ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}})-\alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

```
Fonction α_tol ← PtFixe ( Φ, x0, tol, kmax )
  k ← 0, α_tol ← ∅
  x ← x0,
  err ← tol + 1
  Tantque err > tol et k ⩽ kmax faire
    k ← k + 1
    xp ← x
    x ← Φ(xp)
    err ← |x − xp|                    ▷ ou |xp−x|/(|x|+1)
  Fin Tantque
  Si err ⩽ tol alors                  ▷ Convergence
    α_tol ← x
  Fin Si
Fin Fonction
```

Méthode de la corde :

$$\Phi(x) = x - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x)$$

Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :

Φ	:	$\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
x_0	:	donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
tol	:	la tolérance, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax	:	nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}})-\alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

Fonction $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ PtFixe ($\Phi, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}$)
  $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $\mathrm{x} \leftarrow x_0$,
  $\mathrm{err} \leftarrow \mathrm{tol} + 1$
  Tantque $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\mathrm{xp} \leftarrow \mathrm{x}$
    $\mathrm{x} \leftarrow \Phi(\mathrm{xp})$
    $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{x} - \mathrm{xp}|$ ▷ ou $\frac{|\mathrm{xp}-\mathrm{x}|}{|\mathrm{x}|+1}$
  Fin Tantque
  Si $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors** ▷ Convergence
    $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{x}$
  Fin Si
Fin Fonction

Algorithm Méthode de la corde

Données :

f	:	$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
a, b	:	deux réels tels que $f(a) \neq f(b)$,
x_0	:	donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
tol	:	la tolérance, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax	:	nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

α_{tol} : un réel tel que $|f(\alpha_{\mathrm{tol}})| \leqslant \mathrm{tol}$

Fonction $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ Corde ($f, a, b, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}$)
  $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $q \leftarrow \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$
  $\mathrm{x} \leftarrow x_0$,
  $\mathrm{err} \leftarrow \mathrm{tol} + 1$
  Tantque $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\mathrm{xp} \leftarrow \mathrm{x}$
    $\mathrm{x} \leftarrow \mathrm{xp} - q * f(\mathrm{xp})$
    $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{x} - \mathrm{xp}|$
  Fin Tantque
  Si $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors** ▷ Convergence
    $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{x}$
  Fin Si
Fin Fonction

Plus simple, plus court ... ???

Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :

Φ	:	$\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
x_0	:	donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
tol	:	la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax	:	nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}})-\alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

```
Fonction α_tol ← PtFixe ( Φ, x0, tol, kmax )
   k ← 0, α_tol ← ∅
   x ← x0,
   err ← tol + 1
   Tantque err > tol et k ⩽ kmax faire
      k ← k + 1
      xp ← x
      x ← Φ(xp)
      err ← |x − xp|                          ▷ ou |xp−x|/(|x|+1)
   Fin Tantque
   Si err ⩽ tol alors                         ▷ Convergence
      α_tol ← x
   Fin Si
Fin Fonction
```

Plus simple, plus court ... ???

Algorithm Méthode de la corde utilisant la fonction PtFixe

Données :

f	:	$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
a, b	:	deux réels tels que $f(a) \neq f(b)$,
x_0	:	donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
tol	:	la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax	:	nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

α_{tol} : un réel tel que $|f(\alpha_{\mathrm{tol}})| \leqslant \mathrm{tol}$

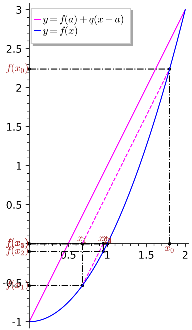
```
Fonction α_tol ← Corde ( f, a, b, x0, tol, kmax )
   q ← (b−a)/(f(b)−f(a))
   Φ ← (x ↦ x − q ∗ f(x))                      ▷ définition de fonction
   α_tol ← PtFixe(Φ, x0, tol, kmax)
Fin Fonction
```

$\alpha = 1$, racine de $f : x \mapsto x^2 - 1$

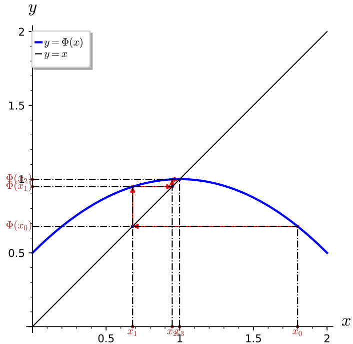
- exemple 1 : $a = 0.000$, $b = 2.000$, $x_0 = 1.800$,
- exemple 2 : $a = 0.5000$, $b = 1.900$, $x_0 = 1.800$.

	exemple 1	**exemple 2**
k	$\lvert x_k - \alpha \rvert$	$\lvert x_k - \alpha \rvert$
0	8.0000e-01	8.0000e-01
1	3.2000e-01	1.3333e-01
2	5.1200e-02	2.9630e-02
3	1.3107e-03	5.3041e-03
4	8.5899e-07	8.9573e-04
5	3.6893e-13	1.4962e-04
6	0.0000e+00	2.4947e-05
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
15	0.0000e+00	2.4756e-12

L'exemple 1 converge beaucoup plus rapidement

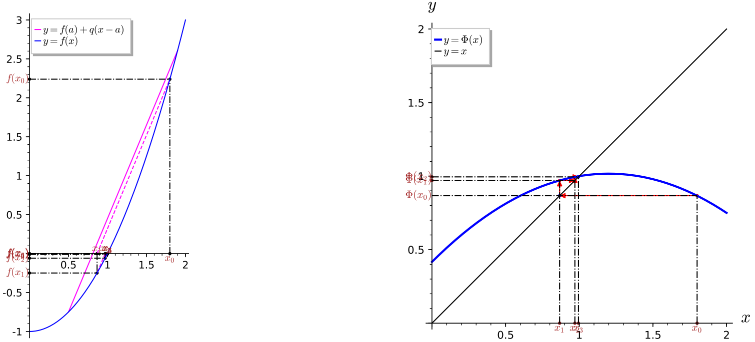


(a) représentation usuelle



(b) Représentation point fixe

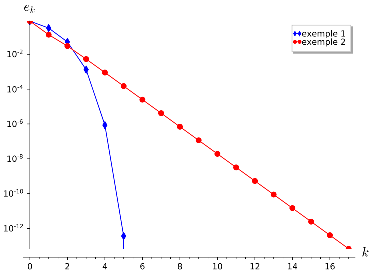
Figure: Exemple 1, méthode de la corde, $\alpha = 1$, racine de $f \; : \; x \mapsto x^2 - 1$ avec $a = 0.00$, $b = 2.00$, $x_0 = 1.80$,



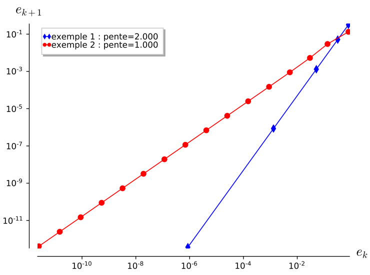
(a) représentation usuelle

(b) Représentation point fixe

Figure: Exemple 2, méthode de la corde, $\alpha = 1$, racine de $f \;:\; x \mapsto x^2 - 1$ avec $a = 0.50$, $b = 1.90$, $x_0 = 1.80$,



(a) Erreurs en fonctions des itérations



(b) Représentation en échelle logarithmique de e_{k+1} en fonction de e_k. Les pentes sont calculées numériquement

Figure: Exemples 1 et 2, méthode de la corde, $\alpha = 1$, racine de $f : x \mapsto x^2 - 1$

Exemple 1 : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 2$ et $f'(\alpha) = 2 \Rightarrow$ convergence ordre 2.

Exemple 2 : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 2.400 \neq f'(\alpha) = 2 \Rightarrow$ convergence ordre 1.

Plan

Proposition 4.4: convergence de la méthode de Newton

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un certain voisinage d'une racine simple α de f. Soit x_0 donné dans ce voisinage, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la méthode de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

est localement convergente d'ordre 2.

Exercice 4:

En -1700 av. J.-C., les babyloniens ne connaissaient que les nombres rationnels (fractions) et ils utilisaient le système sexagésimal (base 60). Pour approcher la valeur $\sqrt{2}$, ils utilisaient comme approximation (voir tablette YBC 7289)

$$\alpha = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600}$$

L'erreur commise est $|\alpha - \sqrt{2}| \approx 5.994e - 7$.

Q.1 *Comment feriez-vous pour trouver* ***à la main*** *une méthode permettant de trouver des nombres rationnels approchant* $\sqrt{2}$.

Q.2 *Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de* $\sqrt{a}$ *où* a *est un réel positif.*

Q.3 *Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de* $\sqrt[n]{a}$ *où* a *est un réel positif et* $n \in \mathbb{N}^*$.

Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :

Φ	:	$\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
x_0	:	donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
tol	:	la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax	:	nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}})-\alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

Fonction $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ PtFixe ($\Phi, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}$)
  $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $\mathrm{x} \leftarrow x_0$,
  $\mathrm{err} \leftarrow \mathrm{tol} + 1$
  Tantque $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\mathrm{xp} \leftarrow \mathrm{x}$
    $\mathrm{x} \leftarrow \Phi(\mathrm{xp})$
    $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{x} - \mathrm{xp}|$ ▷ ou $\frac{|\mathrm{xp}-\mathrm{x}|}{|\mathrm{x}|+1}$
  Fin Tantque
  Si $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors** ▷ Convergence
    $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{x}$
  Fin Si
Fin Fonction

Méthode de Newton :

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :

Φ : $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
tol : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}})-\alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

Fonction $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ PTFIXE ($\Phi, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}$)
  $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $\mathrm{x} \leftarrow x_0$,
  $\mathrm{err} \leftarrow \mathrm{tol} + 1$
  Tantque $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\mathrm{xp} \leftarrow \mathrm{x}$
    $\mathrm{x} \leftarrow \Phi(\mathrm{xp})$
    $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{x} - \mathrm{xp}|$ ▷ ou $\frac{|\mathrm{xp}-\mathrm{x}|}{|\mathrm{x}|+1}$
  Fin Tantque
  Si $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors** ▷ Convergence
    $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{x}$
  Fin Si
Fin Fonction

Algorithm Méthode de Newton

Données :

f : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
df : la dérivée de f,
x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
tol : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$

Fonction $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ NEWTON ($f, \mathrm{df}, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}$)
  $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $\mathrm{x} \leftarrow x_0$,
  $\mathrm{err} \leftarrow \mathrm{tol} + 1$
  Tantque $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\mathrm{xp} \leftarrow \mathrm{x}$
    $\mathrm{x} \leftarrow \mathrm{xp} - f(\mathrm{xp})/\mathrm{df}(\mathrm{xp})$ ▷ $\mathrm{df}(\mathrm{xp}) \neq 0$
    $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{x} - \mathrm{xp}|$
  Fin Tantque
  Si $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors** ▷ Convergence
    $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{x}$
  Fin Si
Fin Fonction

Plus simple, plus court ... ???

Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :

Φ	:	$\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
x_0	:	donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
tol	:	la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax	:	nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}})-\alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

Fonction $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ PtFixe $(\Phi, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax})$
  $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $\mathrm{x} \leftarrow x_0$,
  $\mathrm{err} \leftarrow \mathrm{tol} + 1$
  Tantque $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\mathrm{xp} \leftarrow \mathrm{x}$
    $\mathrm{x} \leftarrow \Phi(\mathrm{xp})$
    $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{x} - \mathrm{xp}|$ ▷ ou $\frac{|\mathrm{xp}-\mathrm{x}|}{|\mathrm{x}|+1}$
  Fin Tantque
  Si $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors** ▷ Convergence
    $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{x}$
  Fin Si
Fin Fonction

Algorithm Méthode de Newton scalaire

Données :

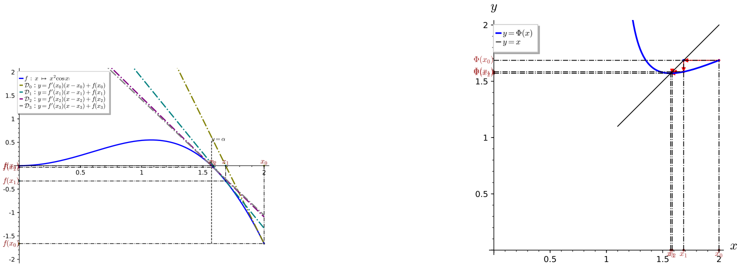
f	:	$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
df	:	la dérivée de f,
x_0	:	donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
tol	:	la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax	:	nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

α_{tol} : un réel tel que

Fonction $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ Newton $(f, \mathrm{df}, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax})$
  $\Phi \leftarrow x \mapsto x - f(x)/\mathrm{df}(x)$
  $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ PtFixe$(\Phi, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax})$
Fin Fonction

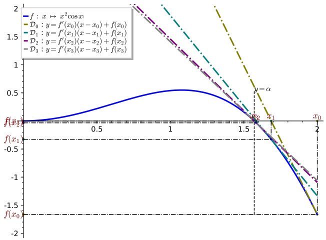
Plus simple, plus court ... ???



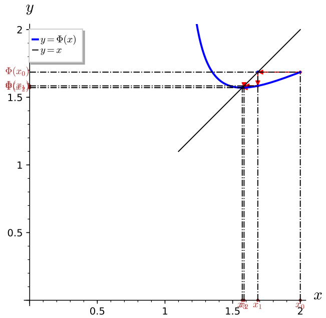
(a) représentation usuelle

(b) Représentation point fixe,
$\Phi \ : \ x \mapsto \dfrac{x^2 \cos(x)}{x^2 \sin(x) - 2\,x \cos(x)} + x$

Figure: Exemple 2, méthode de Newton, $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, racine de $f \ : \ x \mapsto x^2 \cos(x)$ avec $x_0 = 0.40$,

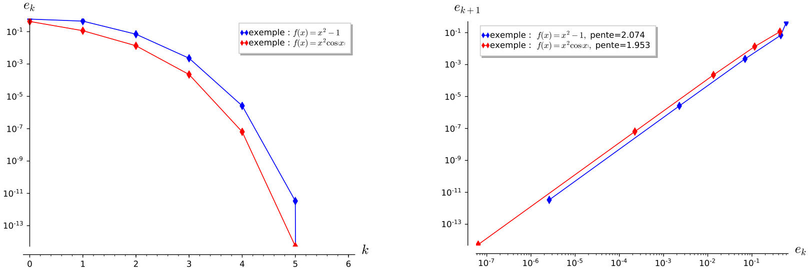


(a) représentation usuelle



(b) Représentation point fixe,
$\Phi \; : \; x \mapsto \frac{x^2 \cos(x)}{x^2 \sin(x) - 2\,x \cos(x)} + x$

Figure: Exemple 2, méthode de Newton, $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, racine de $f \; : \; x \mapsto x^2 \cos(x)$ avec $x_0 = 0.40$,



(a) Représentation de la convergence, e_k en fonction de k

(b) Représentation de l'ordre de convergence en échelle logarithmique, e_{k+1} en fonction de e_k . Ordre théorique 2

Figure: Méthode de Newton, convergence et ordre

Plan

Alternative à la méthode de Newton lorsque l'on ne connait pas la dérivée de la fonction f :

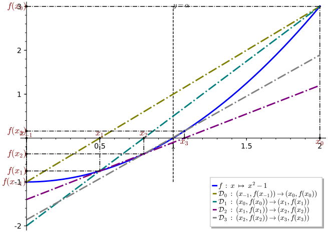
$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Proposition 4.5: Convergence méthode de la sécante (Admis)

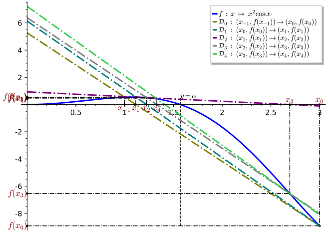
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un certain voisinage d'une racine simple α de f. Soient x_{-1} et x_0 donnés dans ce voisinage tels que $f(x_{-1}) \neq f(x_0)$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la méthode de la sécante

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

est localement convergente d'ordre $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.

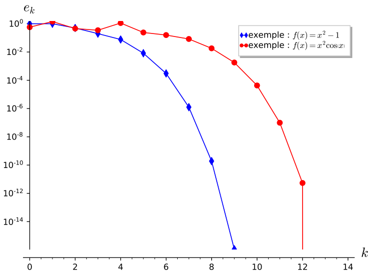


(a) $f(x) = x^2 - 1$, $x_{-1} = 0.000$ et $x_0 = 2.000$

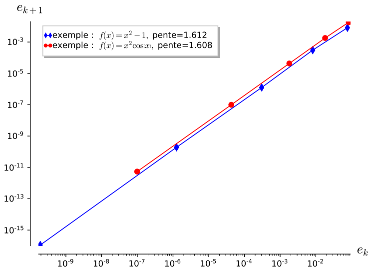


(b) $f(x) = x^2 \cos(x)$, $x_{-1} = 1.000$ et $x_0 = 3.000$

Figure: Méthode de la sécante



(a) Représentation de la convergence, e_k en fonction de k



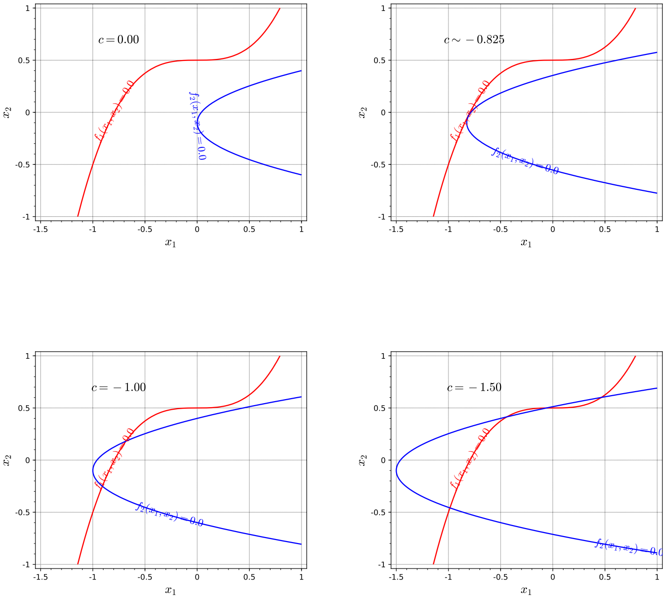
(b) Représentation de l'ordre de convergence en échelle logarithmique, e_{k+1} en fonction de e_k . Ordre théorique $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

Figure: Méthode de la sécante, convergence et ordre

Plan

Soit $c \in \mathbb{R}$ donné.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2 - \frac{1}{2} & = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{25}\left(10\, x_2 + 1\right)^2 + c - x_1 & = 0. \end{cases} \tag{19}$$


$c = 0.00$
$c \sim -0.825$
$c = -1.00$
$c = -1.50$
$f_1(x_1, x_2) = 0.0$
$f_2(x_1, x_2) = 0.0$
x_1
x_2

Soient $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^0(U; \mathbb{R}^N)$

Trouver $\boldsymbol{\alpha} \in U \subset \mathbb{R}^N$ tel que

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_N) & = & 0 \\ \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_N) & = & 0 \\ \vdots & & \\ \boldsymbol{f}_N(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_N) & = & 0 \end{array} \right.$$

On pose, par ex., $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, : $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ Point fixe

Trouver $\boldsymbol{\alpha} \in U \subset \mathbb{R}^N$ tel que

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha} \iff \left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_N) & = & \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\Phi}_2(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_N) & = & \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots & & \\ \boldsymbol{\Phi}_N(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_N) & = & \boldsymbol{\alpha}_N \end{array} \right.$$

Plan

Théorème 5.1: Point fixe de Banach ☆☆☆☆☆

Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach et $U \subset \mathcal{B}$ un sous-ensemble fermé. On suppose que $\boldsymbol{\Phi} : U \longrightarrow U$ est une application strictement contractante, i.e.

$$\exists L \in]0,1[, \quad \|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y})\| \leqslant L \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|, \quad \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in U \times U. \tag{20}$$

Alors

1. $\boldsymbol{\Phi}$ admet un unique point fixe $\boldsymbol{\alpha} \in U$ (i.e. unique solution de $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$).
2. La suite des itérés $\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k]})$ converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ pour toute valeur initiale $\boldsymbol{x}^{[0]} \in U$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left\|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{x}^{[k]}\right\| \leqslant \frac{L^{k-l}}{1-L} \left\|\boldsymbol{x}^{[l+1]} - \boldsymbol{x}^{[l]}\right\|, \quad 0 \leqslant l \leqslant k \tag{21}$$

Plan

$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction suffisament régulière. On défini la **matrice Jacobienne de** $\boldsymbol{f}$, notée $\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}$, par

$$\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

On a alors $\forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^N$ à l'ordre 1

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) \approx \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{h}. \tag{22}$$

On a $\forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^N$ à l'ordre 1

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) \approx \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{h}. \tag{23}$$

trouver $\boldsymbol{\alpha}$ tel que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 0$.

Si $\boldsymbol{x}^{[k]}$ est proche de $\boldsymbol{\alpha}$, alors avec $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{[k]}$ et $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{h}$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}) \approx \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]}) + \mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^{[k]}).\boldsymbol{h}$$

On résoud le système linéarisé

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]}) + \mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^{[k]}).\tilde{\boldsymbol{h}} = 0 \ \Leftrightarrow\ \mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^{[k]}).\tilde{\boldsymbol{h}} = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]}).$$

On pose $\Phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - ((\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}))^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. la méthode de Newton s'écrit alors

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \Phi(\boldsymbol{x}^{[k]}) = \boldsymbol{x}^{[k]} - \left((\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^{[k]})\right)^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]}) \tag{24}$$

Théorème 5.2: (Admis)

Soit $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$. On suppose que la matrice Jacobienne appliquée en $\boldsymbol{x}$, $\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})$ est inversible dans un voisinage de $\boldsymbol{\alpha}$, avec $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 0$. Alors pour tout $\boldsymbol{x}^{[0]}$ suffisament proche de $\boldsymbol{\alpha}$ la suite définie par

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{x}^{[k]} - \left(\left(\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^{[k]}) \right) \right)^{-1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]})$$

converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ et la convergence est d'ordre 2.

Comment fait-on pour calculer $-\left(\left(\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^{[k]}) \right) \right)^{-1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]})$?

Théorème 5.3: (Admis)

Soit $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$. On suppose que la matrice Jacobienne appliquée en $\boldsymbol{x}$, $\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})$ est inversible dans un voisinage de $\boldsymbol{\alpha}$, avec $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 0$. Alors pour tout $\boldsymbol{x}^{[0]}$ suffisament proche de $\boldsymbol{\alpha}$ la suite définie par

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{x}^{[k]} - \left((\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^{[k]}) \right)^{-1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]})$$

converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ et la convergence est d'ordre 2.

Comment fait-on pour calculer $-\left((\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^{[k]}) \right)^{-1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]})$?

On résoud le système linéaire

$$\left((\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^{[k]}) \right) \boldsymbol{h} = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]})$$

Remarque : Si l'on ne connait pas explicitement la Jacobienne de f, il est possible de calculer une approximation de celle-ci en utilisant des formules de dérivation numérique.

Méthode de Newton scalaire

Données :

f	:	$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
df	:	la dérivée de f,
x_0	:	donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
tol	:	la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax	:	nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

α_{tol} : un réel tel que

Fonction $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ NEWTON ($f, \mathrm{df}, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}$)
    $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \emptyset$
    $\mathrm{x} \leftarrow x_0$,
    $\mathrm{err} \leftarrow \mathrm{tol} + 1$
    Tantque $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
        $k \leftarrow k + 1$
        $\mathrm{xp} \leftarrow \mathrm{x}$
        $\mathrm{x} \leftarrow \mathrm{xp} - f(\mathrm{xp})/\mathrm{df}(\mathrm{xp})$ $\rhd\ \mathrm{x} \leftarrow \Phi(\mathrm{xp})$
        $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{x} - \mathrm{xp}|$
    Fin Tantque
    Si $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors**
        $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{x}$
    Fin Si
Fin Fonction

Méthode de Newton *vectorielle* :

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \left(\left(\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})\right)\right)^{-1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

Méthode de Newton scalaire

Données :

- f : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
- df : la dérivée de f,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que

Fonction $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ NEWTON ($f, \mathrm{df}, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}$)
  $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $\mathrm{x} \leftarrow x_0$,
  $\mathrm{err} \leftarrow \mathrm{tol} + 1$
  Tantque $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\mathrm{xp} \leftarrow \mathrm{x}$
    $\mathrm{x} \leftarrow \mathrm{xp} - f(\mathrm{xp})/\mathrm{df}(\mathrm{xp})$ ▷ $\mathrm{x} \leftarrow \Phi(\mathrm{xp})$
    $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{x} - \mathrm{xp}|$
  Fin Tantque
  Si $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors**
    $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{x}$
  Fin Si
Fin Fonction

Algorithm Méthode de Newton vectorielle

Données :

- $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$,
- Jf : la matrice Jacobienne de $\boldsymbol{f}$,
- $\boldsymbol{x0}$: donnée initiale, $\boldsymbol{x0} \in \mathbb{R}^N$,
- tol : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}}$: un élément de $\mathbb{R}^N$ proche de $\boldsymbol{\alpha}$.

Fonction $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ NEWTON ($\boldsymbol{f}, \mathrm{Jf}, \boldsymbol{x0}, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}$)
  $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $\boldsymbol{x} \leftarrow \boldsymbol{x0}$,
  $\mathrm{err} \leftarrow \mathrm{tol} + 1$
  Tantque $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\boldsymbol{xp} \leftarrow \boldsymbol{x}$
    $\boldsymbol{h} \leftarrow$ SOLVE$(\mathrm{Jf}(\boldsymbol{xp}), -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{xp}))$
    $\boldsymbol{x} \leftarrow \boldsymbol{xp} + \boldsymbol{h}$
    $\mathrm{err} \leftarrow$ NORM$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{xp})$
  Fin Tantque
  Si $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors** ▷ Convergence
    $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}} \leftarrow \boldsymbol{x}$
  Fin Si
Fin Fonction

Rappel : Point fixe scalaire. Et le cas vectoriel ... ???

Méthode de point fixe scalaire

Données :

Φ	:	$\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
x_0	:	donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
tol	:	la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax	:	nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$ (ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}})-\alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

Fonction $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ PTFIXE ($\Phi, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}$)
  $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \emptyset$
  $\mathrm{x} \leftarrow x_0$, $\mathrm{fx} \leftarrow \Phi(x_0)$,
  $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{fx} - \mathrm{x}|$ ▷ ou $\frac{|\mathrm{fx}-\mathrm{x}|}{|\mathrm{x}|+1}$
  Tantque $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\mathrm{x} \leftarrow \mathrm{fx}$
    $\mathrm{fx} \leftarrow \Phi(\mathrm{x})$
    $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{fx} - \mathrm{x}|$ ▷ ou $\frac{|\mathrm{fx}-\mathrm{x}|}{|\mathrm{x}|+1}$
  Fin Tantque
  Si $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors** ▷ Convergence
    $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{x}$
  Fin Si
Fin Fonction

Algorithm Méthode de Newton scalaire

Données :

f	:	$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
df	:	la dérivée de f,
x_0	:	donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
tol	:	la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax	:	nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

α_{tol} : un réel tel que

Fonction $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ NEWTON ($f, \mathrm{df}, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}$)
  $\Phi \leftarrow x \mapsto x - f(x)/\mathrm{df}(x)$
  $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ PTFIXE$(\Phi, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax})$
Fin Fonction

Rappel : Point fixe scalaire. Et le cas vectoriel ... ???

Méthode de point fixe scalaire

Données :

Φ	:	$\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
x_0	:	donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
tol	:	la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax	:	nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}})-\alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

Fonction $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \textrm{PtFixe}\ (\ \Phi, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}\ )$
    $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
    $\mathrm{x} \leftarrow x_0$, $\mathrm{fx} \leftarrow \Phi(x_0)$,
    $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{fx} - \mathrm{x}|$ $\quad\triangleright$ ou $\frac{|\mathrm{fx}-\mathrm{x}|}{|\mathrm{x}|+1}$
    Tantque $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
        $k \leftarrow k + 1$
        $\mathrm{x} \leftarrow \mathrm{fx}$
        $\mathrm{fx} \leftarrow \Phi(\mathrm{x})$
        $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{fx} - \mathrm{x}|$ $\quad\triangleright$ ou $\frac{|\mathrm{fx}-\mathrm{x}|}{|\mathrm{x}|+1}$
    Fin Tantque
    Si $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors** $\quad\triangleright$ Convergence
        $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{x}$
    Fin Si
Fin Fonction

Méthode de point fixe vectorielle

Données :

$\boldsymbol{\Phi}$	:	$\boldsymbol{\Phi} : \mathbb{K}^N \longrightarrow \mathbb{K}^N$,
$\boldsymbol{x0}$	:	donnée initiale, $\boldsymbol{x0} \in \mathbb{K}^N$,
tol	:	la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax	:	nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

$\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}}$: un réel tel que $\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}}) - \boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}}\| \leqslant \mathrm{tol}$

Fonction $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}} \leftarrow \textrm{PtFixe}\ (\ \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{x0}, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}\ )$
    $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
    $\boldsymbol{x} \leftarrow \boldsymbol{x0}$, $\boldsymbol{fx} \leftarrow \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x0})$,
    $\mathrm{err} \leftarrow \|\boldsymbol{fx} - \boldsymbol{x}\|$
    Tantque $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
        $k \leftarrow k + 1$
        $\boldsymbol{x} \leftarrow \boldsymbol{fx}$
        $\boldsymbol{fx} \leftarrow \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$
        $\mathrm{err} \leftarrow \|\boldsymbol{fx} - \boldsymbol{x}\|$
    Fin Tantque
    Si $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors**
        $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}} \leftarrow \boldsymbol{x}$
    Fin Si
Fin Fonction

Rappel : Point fixe scalaire. Et le cas vectoriel ... ???

Méthode de Newton vectorielle

Données :

$\boldsymbol{f}$	:	$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$,
Jf	:	la matrice Jacobienne de f,
$\boldsymbol{x0}$	:	donnée initiale, $\boldsymbol{x0} \in \mathbb{R}^N$,
tol	:	la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax	:	nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

$\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}}$	:	un élément de $\mathbb{R}^N$ proche de $\boldsymbol{\alpha}$.

```
Fonction α_tol ← NEWTON ( f, Jf, x0, tol, kmax )
    Φ ← x ↦ x − SOLVE(Jf(x), f(x))
    α_tol ← PTFIXE(Φ, x0, tol, kmax)
Fin Fonction
```

Méthode de point fixe vectorielle

Données :

$\boldsymbol{\Phi}$	:	$\boldsymbol{\Phi} : \mathbb{K}^N \longrightarrow \mathbb{K}^N$,
$\boldsymbol{x0}$	:	donnée initiale, $\boldsymbol{x0} \in \mathbb{K}^N$,
tol	:	la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax	:	nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

$\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}}$	:	un réel tel que $\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}}) - \boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}}\| \leqslant \mathrm{tol}$

```
Fonction α_tol ← PTFIXE ( Φ, x0, tol, kmax )
    k ← 0, α_tol ← ∅
    x ← x0, fx ← Φ(x0),
    err ← ‖fx − x‖
    Tantque err > tol et k ⩽ kmax faire
        k ← k + 1
        x ← fx
        fx ← Φ(x)
        err ← ‖fx − x‖
    Fin Tantque
    Si err ⩽ tol alors
        α_tol ← x
    Fin Si
Fin Fonction
```

Plan

Soit $c = -3/2$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2 - \frac{1}{2} & = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{25}\left(10\, x_2 + 1\right)^2 + c - x_1 & = 0. \end{cases}$$

Conclusion?

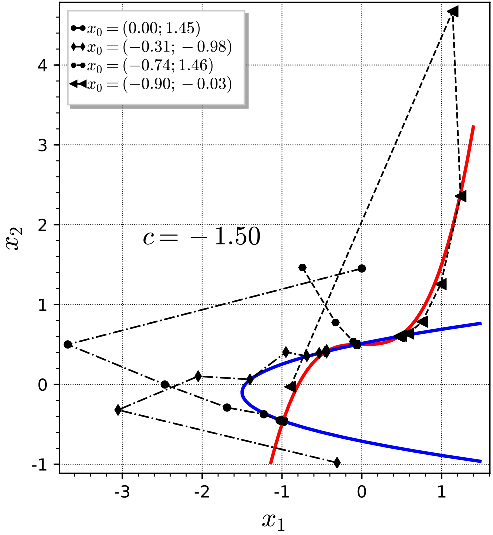


Figure: Représentation de 4 suites de Newton

Soit $c = -3/2$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2 - \frac{1}{2} & = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{25}\left(10\, x_2 + 1\right)^2 + c - x_1 & = 0. \end{cases}$$

Conclusion?

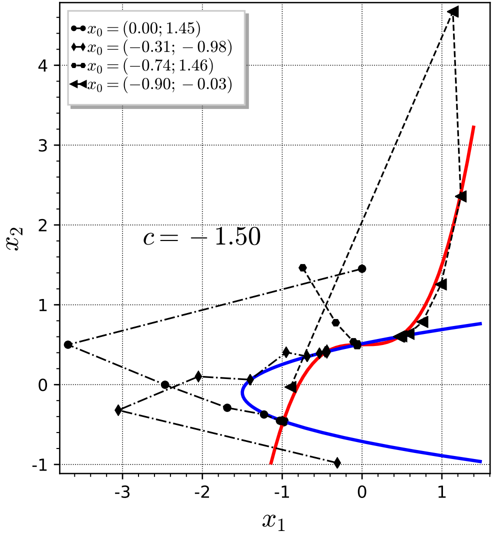
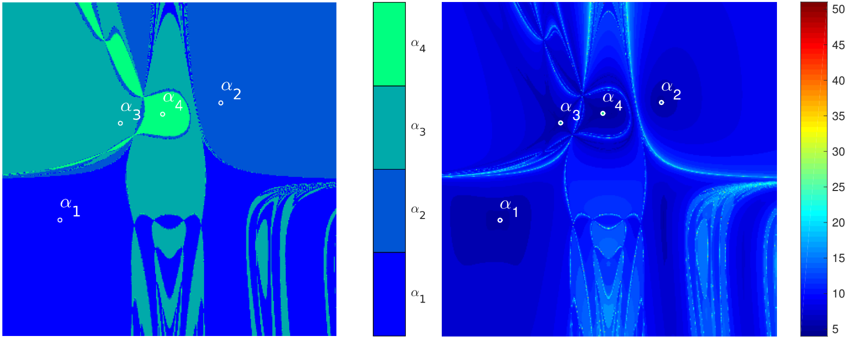


Figure: Représentation de 4 suites de Newton

Très difficile, si l'on n'est pas suffisament proche d'un point fixe, de prédire vers lequel on converge.



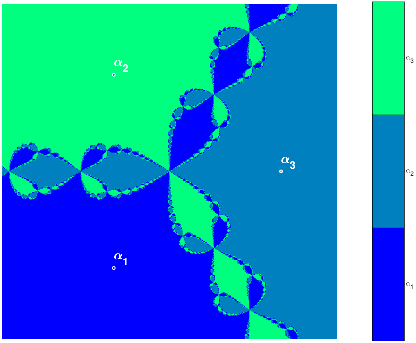
(a) Bassin d'attraction des racines (b) Nombre d'itérations de convergence

Figure: Méthode de Newton

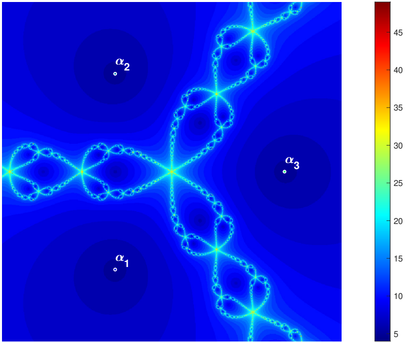
Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton

on peut poser $z = x + \imath y$, et le système équivalent devient

$$\begin{cases} f_1(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 1 & = 0 \\ f_2(x,y) = 3x^2y - x^3 & = 0. \end{cases}$$

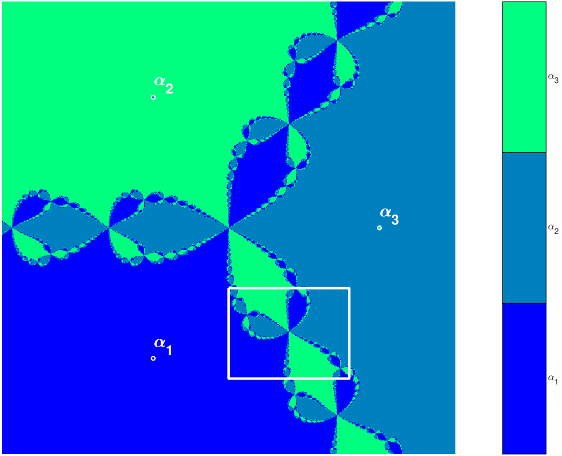


(a) Bassin d'attraction des racines



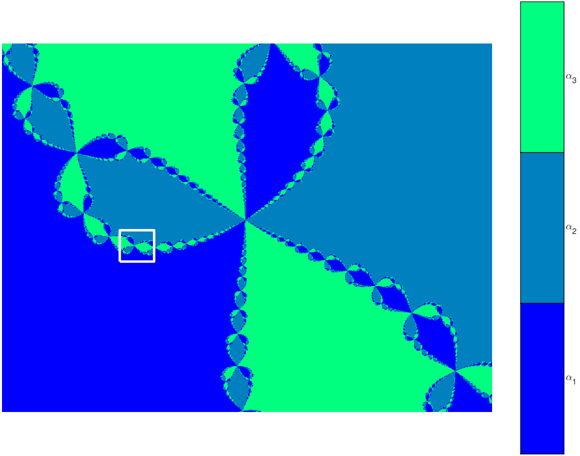
(b) Nombre d'itérations de convergence

Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton



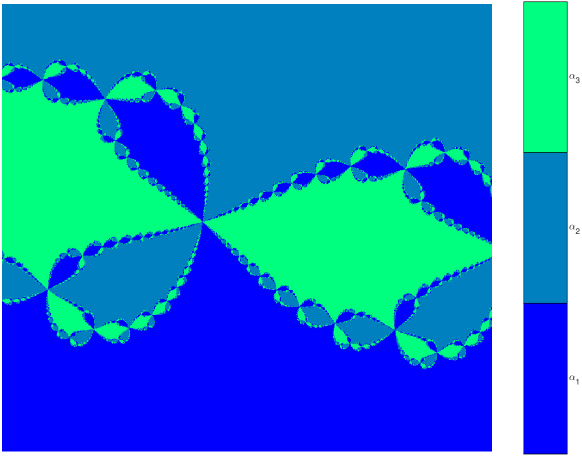
Méthode de Newton, zoom 1 sur les bassins d'attraction

Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton



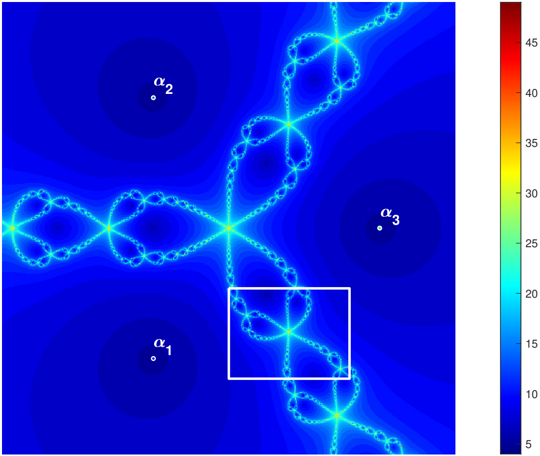
Méthode de Newton, zoom 2 sur les bassins d'attraction

Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton



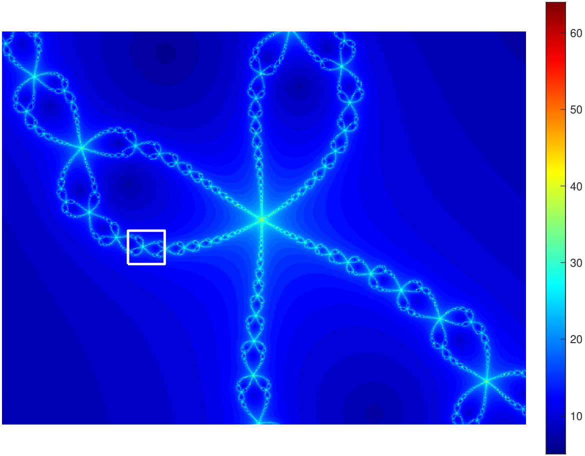
Méthode de Newton, zoom 3 sur les bassins d'attraction

Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton



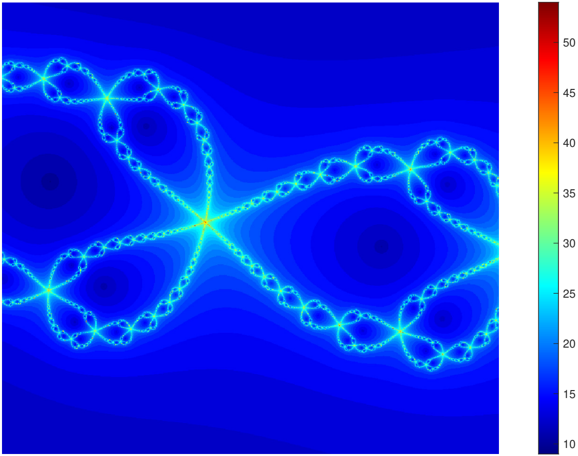
Méthode de Newton, zoom 1 sur les nombres d'itérations

Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton



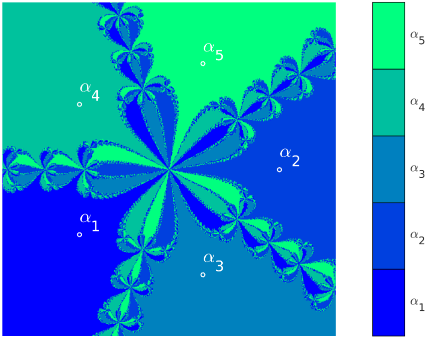
Méthode de Newton, zoom 2 sur les nombres d'itérations

Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton

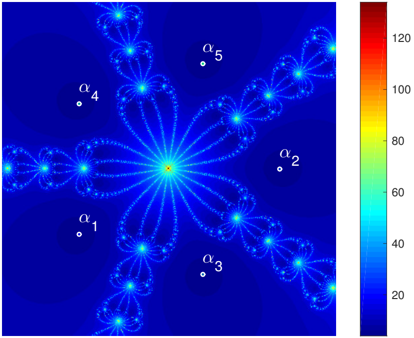


Méthode de Newton, zoom 3 sur les nombres d'itérations

Exemple complexe : $z^5 - 1 = 0$, fractale de Newton



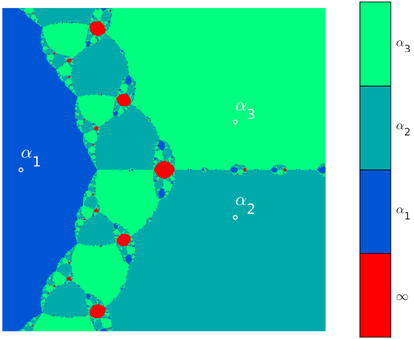
(a) Bassin d'attraction des racines



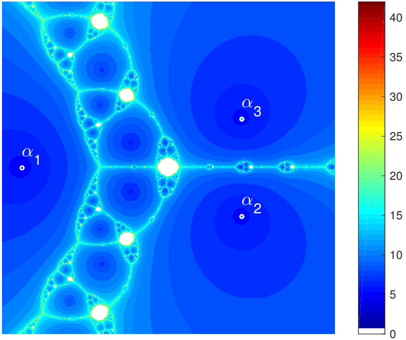
(b) Nombre d'itérations de convergence

$$[-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$$

Exemple complexe : $z^3 - 2z + 2 = 0$, fractale de Newton



(a) Bassin d'attraction des racines. En rouge zône de divergence



(b) Nombre d'itérations de convergence. En blanc zône de divergence

$$[-2, 2] \times [-2, 2]$$