

### Proposition: convergence de la méthode de Newton

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un certain voisinage d'une racine simple  $\alpha$  de  $f$ . Soit  $x_0$  donné dans ce voisinage, la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  définie par la méthode de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (\text{P-1})$$

est localement convergente d'ordre 2.

*Proof.* Comme  $\alpha$  est racine simple de  $f$  (i.e.  $f(\alpha) = 0$  et  $f'(\alpha) \neq 0$ ) et  $f'$  continue, il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\alpha$  tel que pour tout  $x \in \mathcal{V}$ ,  $f'(x) \neq 0$ . On peut alors définir la fonction  $\Phi$  sur  $\mathcal{V}$  par

$$\forall x \in \mathcal{V}, \quad \Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

On a alors  $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ . La fonction  $\Phi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{V}$  et

$$\Phi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

On a donc  $\Phi'(\alpha) = 0$  car  $f(\alpha) = 0$ . D'après le théorème de convergence locale du point fixe (théorème 2.5), on en déduit que la suite  $(x_k)$  converge vers  $\alpha$  (et que la convergence est au moins d'ordre 1. Pour démontrer qu'elle est d'ordre 2, on ne peut utiliser le théorème 2.6 car  $\Phi$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^2$ . Toutefois comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , on applique la formule de Taylor-Lagrange aux points  $x_k, \alpha$  (en supposant  $x_k \neq \alpha$ ) : il existe  $\xi_k$  compris entre  $x_k$  et  $\alpha$  tel que

$$\underbrace{f(\alpha)}_{=0} = f(x_k) + (\alpha - x_k)f'(x_k) + \frac{(\alpha - x_k)^2}{2!}f^{(2)}(\xi_k).$$

Comme  $f'(x_k) \neq 0$ , l'équation précédente s'écrit aussi

$$\begin{aligned}\alpha &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - (\alpha - x_k)^2 \frac{f^{(2)}(\xi_k)}{2f'(x_k)} \\ &= x_{k+1} - (\alpha - x_k)^2 \frac{f^{(2)}(\xi_k)}{2f'(x_k)}.\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\frac{\alpha - x_{k+1}}{(\alpha - x_k)^2} = -\frac{f^{(2)}(\xi_k)}{2f'(x_k)}.$$

La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et la suite  $\xi_k$  converge vers  $\alpha$  (car  $\xi_k$  compris entre  $x_k$  et  $\alpha$ ). Ceci entraine par passage à la limite que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^2} = \frac{f^{(2)}(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

La convergence est donc d'ordre 2. □

