

Théorème: Théorème du point fixe dans \mathbb{R}

Soient $[a, b]$ un intervalle non vide de \mathbb{R} et Φ une application continue de $[a, b]$ dans lui-même. Alors, il existe **au moins** un point $\alpha \in [a, b]$ vérifiant $\Phi(\alpha) = \alpha$. Le point α est appelé **point fixe de la fonction Φ** .

De plus, si Φ est contractante (lipschitzienne de rapport $L \in [0, 1[$), c'est à dire

$$\exists L < 1 \text{ t.q. } |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x - y| \quad \forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad (\text{P-1})$$

alors Φ admet un **unique** point fixe $\alpha \in [a, b]$.

Pour tout $x_0 \in [a, b]$, la suite

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (\text{P-2})$$

est bien définie et elle converge vers α avec un ordre 1 au moins.

On a les deux estimations suivantes :

$$|x_k - \alpha| \leq L^k |x_0 - \alpha|, \quad \forall k \geq 0, \quad (\text{P-3})$$

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{L}{1 - L} |x_k - x_{k-1}|, \quad \forall k \geq 0, \quad (\text{P-4})$$

Proof. 1ère approche :

- On montre tout d'abord l'existence du point fixe. Pour celà, on note $f(x) = \Phi(x) - x$. f est donc une application continue de $[a, b]$ à valeurs réelles. On a $f(a) = \Phi(a) - a \geq 0$ et $f(b) = \Phi(b) - b \leq 0$ car $a \leq \Phi(x) \leq b$, pour tout $x \in [a, b]$. Si $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$, alors l'existence est immédiate. Sinon (i.e. $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$), on a $f(a)f(b) < 0$ et par application directe du Théorème B.1 de Bolzano (ou TVI) on obtient l'existence.
- On montre ensuite l'unicité sous l'hypothèse de contraction (P-1). On suppose qu'il existe α_1 et α_2 dans $[a, b]$ tels que $\Phi(\alpha_1) = \alpha_1$ et $\Phi(\alpha_2) = \alpha_2$. Dans ce cas on a

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |\Phi(\alpha_1) - \Phi(\alpha_2)| \leq L|\alpha_1 - \alpha_2|.$$

On en déduit

$$(1 - L)|\alpha_1 - \alpha_2| \leq 0$$

Comme $L < 1$ on a $1 - L > 0$ et donc $|\alpha_1 - \alpha_2| \leq 0$ ce qui entraîne $\alpha_1 = \alpha_2$.

- On a $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$ et comme $x_0 \in [a, b]$, la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie. On va démontrer la convergence de la suite x_k vers l'unique point fixe α de Φ . Pour cela, en utilisant la définition de la suite et du point fixe, on a

$$|x_{k+1} - \alpha| = |\Phi(x_k) - \Phi(\alpha)|$$

Comme Φ est contractante, $x_k \in [a, b]$ et $\alpha \in [a, b]$ on obtient

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq L|x_k - \alpha| \tag{P-5}$$

et une simple récurrence donne alors $\forall k \in \mathbb{N}$

$$|x_k - \alpha| \leq L^k |x_0 - \alpha|$$

ce qui démontre la formule P-3. En faisant tendre k vers $+\infty$ on obtient la convergence de x_k vers α .

De plus, d'après (P-5), comme $0 < L < 1$, la convergence est au moins d'ordre 1.

Pour la dernière estimation, on a:

$$\begin{aligned} |x_k - \alpha| &\leq L|x_{k-1} - \alpha| && \text{car } \Phi \text{ contractante} \\ &\leq L(|x_{k-1} - x_k| + |x_k - \alpha|) && \text{inégalité triangulaire} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$(1 - L)|x_k - \alpha| \leq L|x_{k-1} - x_k|$$

Comme $1 - L > 0$, on en déduit immédiatement l'estimation (P-4).

2ème approche :

L'objectif de cette approche est de proposer une démonstration très proche de celle utilisée pour des espaces plus *complexes* (par exemple \mathbb{C} , \mathbb{R}^n , ...). Dans la 1ère approche le théorème de Bolzano et des inégalités ont été utilisées pour démontrer l'existence d'un point fixe: ceci n'est plus possible dans un cadre plus générale.

On va donc supposer, dès le départ, que l'application Φ est contractante de $[a, b]$ dans lui-même. Ceci va permettre d'établir que la suite x_k est de Cauchy.

- Comme $x_0 \in [a, b]$ et Φ est une application continue de $[a, b]$ dans lui-même, la suite x_k est bien définie $\forall k \in \mathbb{N}$.
- On démontre ensuite que x_k est une suite de Cauchy. Soit $k > 0$. On a

$$|x_{k+1} - x_k| = |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})| \leq L|x_k - x_{k-1}|,$$

et on obtient par récurrence

$$|x_{k+1} - x_k| \leq L^k |x_1 - x_0|$$

et

$$\forall l \geq 0, |x_{k+l} - x_{k+l-1}| \leq L^l |x_k - x_{k-1}|.$$

Soit $p > 2$. On en déduit par application répétée de l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned} |x_{k+p} - x_k| &= |(x_{k+p} - x_{k+p-1}) + (x_{k+p-1} - x_{k+p-2}) + \dots + (x_{k+1} - x_k)| = \left| \sum_{l=0}^{p-1} (x_{k+l+1} - x_{k+l}) \right| \\ &\leq \sum_{l=0}^{p-1} |x_{k+l+1} - x_{k+l}| \\ &\leq \sum_{l=0}^{p-1} L^l |x_{k+1} - x_k| = \frac{1 - L^p}{1 - L} |x_{k+1} - x_k| \quad (\text{voir somme partielle d'une série géométrique}) \\ &\leq \frac{1 - L^p}{1 - L} L^k |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Comme $L^k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$, on conclut que (x_k) est une suite de Cauchy. En effet, pour que (x_k) soit une suite de Cauchy, il faut montrer que

$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall k \in \mathbb{N}, k \geq M, \forall p \in \mathbb{N}, |x_{k+p} - x_k| < \epsilon.$$

Comme $0 < L < 1$, on a

$$|x_{k+p} - x_k| \leq \frac{1}{1 - L} L^k |x_1 - x_0|$$

Soit $\epsilon > 0$, pour avoir $|x_{k+p} - x_k| < \epsilon$, il est suffisant d'avoir

$$\frac{1}{1-L} L^k |x_1 - x_0| < \epsilon$$

c'est à dire, comme $1 - L > 0$,

$$L^k < \frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}.$$

La fonction \ln étant croissante strictement on obtient

$$\ln(L^k) = k \ln(L) < \ln\left(\frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}\right).$$

Or $\ln(L) < 0$, ce qui donne

$$k > \frac{1}{\ln(L)} \ln\left(\frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}\right).$$

En prenant $M \in \mathbb{N}$ tel que

$$M \geq \frac{1}{\ln(L)} \ln\left(\frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}\right)$$

alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq M, \forall p \in \mathbb{N}, |\mathbf{x}_{k+p} - \mathbf{x}_k| < \epsilon.$$

- La suite (x_k) est une suite de Cauchy dans \mathbb{R} espace complet donc elle converge vers β dans \mathbb{R} . De plus pour tout k , x_k appartient à $[a, b]$ fermé borné, donc sa limite β aussi.
- Φ étant contractante sur $[a, b]$, elle est donc continue. On a alors par continuité de Φ

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(x_k) = \Phi(\beta).$$

Comme $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ on aussi

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(x_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{k+1} = \beta$$

et donc β est un point fixe de Φ . L'existence d'un point fixe est donc établi.

La suite de la démonstration est inchangée.

