Exercice 0.0.1

Soit α un point fixe d'une fonction Φ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de α et vérifiant $\Phi'(\alpha) = 0$.

Q. 1 *Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x_0 \in]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$ la suite définie par $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ converge vers α.*

On suppose de plus que Φ' est dérivable sur $]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$ et qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta], \; |\Phi''(x)| \leqslant M$$

Q. 2 1. *Montrer que*

$$\forall x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta], \; |x_k - \alpha| \leqslant \frac{2}{M} \left(\frac{1}{2} M |x_0 - \alpha| \right)^{2^k}$$

2. *Quel est l'ordre de convergence dans ce cas.*

Q. 3 *A quelle condition a-t'on*

$$|x_k - \alpha| \leqslant \frac{2}{M} 10^{-2^k}.$$

Correction Exercice

Q. 1 C'est juste une application du Théorème 2.5.

Q. 2 1. D'après la formule de Taylor-Lagrange rappelée au Théorème B.3, on a $\exists \eta \in]\min(\alpha, x), \max(\alpha, x)[$ tel que

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \Phi(\alpha) + (x - \alpha)\Phi'(\alpha) + \frac{(x - \alpha)^2}{2!} \Phi''(\eta) \\ &= \alpha + \frac{1}{2} \Phi''(\eta)(x - \alpha)^2. \end{aligned}$$

On en déduit que $|\Phi(x) - \alpha| \leqslant \frac{M}{2} |x - \alpha|^2$ ce qui s'écrit encore $\frac{M}{2} |\Phi(x) - \alpha| \leqslant (\frac{M}{2} |x - \alpha|)^2$. Or si $x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, alors $x_{k-1} \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\frac{M}{2}|\Phi(x_{k-1}) - \alpha| = \frac{M}{2}|x_k - \alpha| \leqslant (\frac{M}{2}|x_{k-1} - \alpha|)^2$$

et donc par récurrence

$$\frac{M}{2}|x_k - \alpha| \leqslant (\frac{M}{2}|x_0 - \alpha|)^{2^k}.$$

2. On a

$$|x_k - \alpha| \leqslant \frac{2}{M}(\frac{M}{2}|x_{k-1} - \alpha|)^2$$

c'est à dire

$$\frac{|x_k - \alpha|}{|x_{k-1} - \alpha|^2} \leqslant \frac{M}{2}$$

et donc la méthode est d'ordre 2.

Q. 3 En supposant de plus que $|x_0 - \alpha| \leqslant \frac{1}{5M}$, on obtient immédiatement le résultat.

$\diamond$