

Exercice 1

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne inversible décomposée en $A = M - N$ où M est inversible. On note $B = I - M^{-1}A$.

Q. 1 Montrer que la matrice $M^* + N$ est hermitienne.

On suppose maintenant que $M^* + N$ est définie positive.

Q. 2 Soit x un vecteur quelconque de \mathbb{C}^n et $y = Bx$.

1. Montrer que

$$\langle x, Ax \rangle - \langle y, Ay \rangle = \langle x, AM^{-1}Ax \rangle + \langle M^{-1}Ax, Ax \rangle - \langle M^{-1}Ax, AM^{-1}Ax \rangle \quad (1)$$

et

$$x - y = M^{-1}Ax. \quad (2)$$

2. En déduire que

$$\langle x, Ax \rangle - \langle y, Ay \rangle = \langle (x - y), (M^* + N)(x - y) \rangle. \quad (3)$$

Q. 3 Montrer que si A est définie positive alors $\rho(B) < 1$.

Q. 4 Démontrer par l'absurde que si $\rho(B) < 1$ alors A est définie positive.

Correction Exercice

Q. 1 On a

$$\begin{aligned} (M^* + N)^* &= M + N^* \\ &= A + N + N^* = A^* + N + N^* \quad \text{car } A \text{ est hermitienne} \\ &= M^* + N. \end{aligned}$$

La matrice $M^* + N$ est donc hermitienne.

Q. 2 1. On a $y = Bx$ avec $B = I - M^{-1}A$ ce qui donne

$$x - y = x - Bx = (I - B)x = M^{-1}Ax.$$

L'équation (2) est donc démontrée. Pour prouver (1), on note que

$$y = x - M^{-1}Ax$$

et donc

$$\begin{aligned} \langle y, Ay \rangle &= \langle x - M^{-1}Ax, A(x - M^{-1}Ax) \rangle \\ &= \langle x, Ax \rangle - \langle M^{-1}Ax, Ax \rangle - \langle x, AM^{-1}Ax \rangle + \langle M^{-1}Ax, AM^{-1}Ax \rangle. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement (1).

2. En utilisant (2), on obtient

$$\begin{aligned} \langle x - y, (M^* + N)(x - y) \rangle &= \langle M^{-1}Ax, (M^* + N)M^{-1}Ax \rangle \\ &= \langle M^{-1}Ax, (M + N^*)M^{-1}Ax \rangle \quad \text{car } M^* + N \text{ hermitienne} \\ &= \langle M^{-1}Ax, (M + M^* - A^*)M^{-1}Ax \rangle \quad \text{car } N = M - A \\ &= \langle M^{-1}Ax, Ax \rangle + \langle M^{-1}Ax, M^*M^{-1}Ax \rangle - \langle M^{-1}Ax, AM^{-1}Ax \rangle \quad \text{car } A \text{ hermitienne} \end{aligned}$$

Or, par propriété du produit scalaire, on a

$$\langle M^{-1}Ax, M^*M^{-1}Ax \rangle = \langle MM^{-1}Ax, M^{-1}Ax \rangle = \langle Ax, M^{-1}Ax \rangle = \langle x, A^*M^{-1}Ax \rangle.$$

Comme A est hermitienne, on obtient

$$\langle M^{-1}Ax, M^*M^{-1}Ax \rangle = \langle x, AM^{-1}Ax \rangle.$$

On abouti alors à

$$\langle x - y, (M^* + N)(x - y) \rangle = \langle M^{-1}Ax, Ax \rangle + \langle x, AM^{-1}Ax \rangle - \langle M^{-1}Ax, AM^{-1}Ax \rangle.$$

L'équation (3) est obtenue en utilisant (1).

Q. 3 On veut démontrer que sous les hypothèses A hermitienne définie positive et $M^* + N$ (hermitienne) définie positive on a $\rho(B) < 1$, c'est à dire que pour tout élément propre (λ, u) de B alors $|\lambda| < 1$.

Soit $(\lambda, u) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un élément propre de B . On a $Bu = \lambda u$. En prenant $x = u$ dans **Q.2**, on a $y = Bu = \lambda u$ et donc $x - y = (1 - \lambda)u$. De (3) on obtient

$$\langle u, Au \rangle - \langle \lambda u, \lambda Au \rangle = \langle (1 - \lambda)u, (M^* + N)((1 - \lambda)u) \rangle$$

c'est à dire

$$(1 - |\lambda|^2) \langle u, Au \rangle = |1 - \lambda|^2 \langle u, (M^* + N)u \rangle. \quad (4)$$

Comme par hypothèse, la matrice $M^* + N$ (hermitienne) est définie positive et $u \neq 0$, on obtient

$$\langle u, (M^* + N)u \rangle > 0$$

et donc on déduit de (4) que

$$(1 - |\lambda|^2) \langle u, Au \rangle \geq 0.$$

Comme A hermitienne définie positive et $u \neq 0$, on déduit de (4) que $1 - |\lambda|^2 \geq 0$ et donc $|\lambda| \leq 1$.

On va démontrer par l'absurde que $|\lambda| \neq 1$. On suppose $|\lambda| = 1$, de (4) on déduit

$$|1 - \lambda|^2 \langle u, (M^* + N)u \rangle = 0.$$

Comme par hypothèse, la matrice $M^* + N$ (hermitienne) est définie positive et $u \neq 0$, on obtient $|1 - \lambda|^2 = 0$, c'est à dire $\lambda = 1$. Or dans ce cas on a

$$y = Bx = Bu = \lambda u = u.$$

L'équation (2) donne alors

$$0 = M^{-1}Ax.$$

Comme $u \neq 0$, et que $M^{-1}A$ est inversible, l'équation ci-dessus est impossible, donc $|\lambda| \neq 1$.

Q. 4 On veut démontrer par l'absurde que, sous les hypothèses $M^* + N$ (hermitienne) définie positive, A hermitienne inversible et $\rho(B) < 1$, on a A définie positive.

On suppose que A n'est pas définie positive. Alors il existe $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $\langle x, Ax \rangle \notin \mathbb{R}^{+*}$.

Pour une matrice quelconque que $\langle x, Ax \rangle \in \mathbb{C}$, or comme A est hermitienne on a $\langle x, Ax \rangle \in \mathbb{R}$. En effet, par propriété du produit scalaire on a

$$\langle x, Ax \rangle = \langle A^*x, x \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle} = \overline{\langle x, Ax \rangle}.$$

On note $x^{[0]} = x$ et $\alpha_0 = \langle x^{[0]}, Ax^{[0]} \rangle$ le nombre réel négatif ou nul ($\alpha_0 \leq 0$). On définit alors pour les suites

$$x^{[k]} = Bx^{[k-1]} \quad \text{et} \quad \alpha_k = \langle x^{[k]}, Ax^{[k]} \rangle.$$

On a alors

$$x^{[k]} = B^k x^{[0]}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

D'après le théorème du cours (Théorème B.72 page 195),

$$\rho(B) < 1 \iff \lim_{k \rightarrow +\infty} B^k v = 0, \quad \forall v.$$

On a donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{[k]} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_k = 0$$

On utilise maintenant l'égalité (3) avec $x = x^{[k-1]}$ et $y = Bx = x^{[k]}$

$$\langle x^{[k-1]} - x^{[k]}, Ax^{[k-1]} \rangle - \langle x^{[k]}, Ax^{[k]} \rangle = \langle (x^{[k-1]} - x^{[k]}), (M^* + N)(x^{[k-1]} - x^{[k]}) \rangle$$

On peut noter que $x^{[k-1]} - x^{[k]} \neq 0$, car sinon $x^{[k-1]} = x^{[k]} = Bx^{[k-1]}$ et $\lambda = 1$ serait valeur propre de B . **il faudrait montrer que $x^{[k-1]} \neq 0$**

Dans ce cas, comme $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est définie positive, on obtient

$$\langle \mathbf{x}^{[k-1]}, \mathbb{A}\mathbf{x}^{[k-1]} \rangle - \langle \mathbf{x}^{[k]}, \mathbb{A}\mathbf{x}^{[k]} \rangle = \alpha_{k-1} - \alpha_k > 0.$$

La suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante de premier terme $\alpha_0 \leq 0$: elle ne peut converger vers 0. Montrons par récurrence forte que $\mathbf{x}^{[k]} \neq 0$, $\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k-1]} \neq 0$, et $0 \geq \alpha_{k-1} > \alpha_k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

- **Initialisation** : On a $\mathbf{x}^{[0]} \neq 0$ et $\mathbf{x}^{[1]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[0]}$.
On montre par l'absurde que $\mathbf{x}^{[1]} \neq 0$. Supposons $\mathbf{x}^{[1]} = 0$, alors $\alpha_1 = 0$ et $\mathbf{x}^{[0]} - \mathbf{x}^{[1]} = \mathbf{x}^{[0]} \neq 0$. Comme $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est hermitienne définie positive on obtient

$$\alpha_0 - \alpha_1 = \langle (\mathbf{x}^{[0]} - \mathbf{x}^{[1]}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x}^{[0]} - \mathbf{x}^{[1]}) \rangle > 0$$

et contradiction avec $\alpha_0 \leq 0$.

On montre ensuite par l'absurde que $\mathbf{x}^{[0]} \neq \mathbf{x}^{[1]}$. Supposons $\mathbf{x}^{[1]} = \mathbf{x}^{[0]}$. Par construction $\mathbf{x}^{[1]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[0]}$, et dans ce cas, comme $\mathbf{x}^{[0]} \neq 0$, $(1, \mathbf{x}^{[0]})$ serait un élément propre de \mathbb{B} : contradiction avec $\rho(\mathbb{B}) < 1$. Comme $\mathbf{x}^{[0]} - \mathbf{x}^{[1]} \neq 0$, on a

$$\alpha_0 - \alpha_1 = \langle (\mathbf{x}^{[0]} - \mathbf{x}^{[1]}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x}^{[0]} - \mathbf{x}^{[1]}) \rangle > 0$$

et donc $0 \geq \alpha_0 > \alpha_1$.

- **Hérédité** : On suppose la propriété vraie jusqu'au rang k . On a alors $\mathbf{x}^{[k]} \neq 0$, $\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[k]}$ et $\alpha_k \leq 0$. On montre par l'absurde que $\mathbf{x}^{[k+1]} \neq 0$. Supposons $\mathbf{x}^{[k+1]} = 0$, alors $\alpha_{k+1} = 0$ et $\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbf{x}^{[k]} \neq 0$. Comme $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est hermitienne définie positive on obtient

$$\alpha_k - \alpha_{k+1} = \langle (\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k+1]}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k+1]}) \rangle > 0$$

et contradiction avec $\alpha_k \leq 0$.

On montre ensuite par l'absurde que $\mathbf{x}^{[k]} \neq \mathbf{x}^{[k+1]}$. Supposons $\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbf{x}^{[k]}$. Par construction $\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[k]}$, et dans ce cas, comme $\mathbf{x}^{[k]} \neq 0$, $(1, \mathbf{x}^{[k]})$ serait un élément propre de \mathbb{B} : contradiction avec $\rho(\mathbb{B}) < 1$. Comme $\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k+1]} \neq 0$, on a

$$\alpha_k - \alpha_{k+1} = \langle (\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k+1]}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k+1]}) \rangle > 0$$

et donc $0 \geq \alpha_k > \alpha_{k+1}$.

◇