Exercice 1

Etant donné une norme vectorielle $\|\bullet\|$ sur $\mathbb{K}^n$, on défini l'application $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ par

$$\|\mathbb{A}\|_s \stackrel{\mathsf{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \tag{1}$$

Q. 1 *Montrer que* $\|\mathbb{I}\|_s = 1$.

On note $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \ ; \ \|\boldsymbol{v}\| \leqslant 1\}$ la boule unitée de $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \ ; \ \|\boldsymbol{v}\| = 1\}$ la sphère unitée de $\mathbb{K}^n$.

Q. 2 1. *Montrer que* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{S}$ *sont des compacts.*

2. *Montrer que*
$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \tag{2}$$

3. *En déduire que*
$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{B}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \tag{3}$$

4. *En déduire que l'application* $\|\bullet\|_s$ *est bien définie sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *i.e.* $\forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|\mathbb{A}\|_s < +\infty$.

Q. 3 1. *Montrer*
$$\|\mathbb{A}\|_s \leqslant \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha \|\boldsymbol{v}\|, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\right\}.$$

2. *Montrer qu'il existe* $\boldsymbol{w} \in \mathcal{S}$ *tel que* $\|\mathbb{A}\|_s = \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\|$.

3. *En déduire que*
$$\|\mathbb{A}\|_s = \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha \|\boldsymbol{v}\|, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\right\}. \tag{4}$$

Q. 4 1. *Montrer que* $\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$, $\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{v}\|$.

2. *Soit* $\lambda \in \mathbb{K}^*$. *Montrer qu'il existe* $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n$ *tel que* $\|\boldsymbol{u}\| = |\lambda|$ *vérifiant*
$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{u}\|.$$

Q. 5 *Montrer que* $\|\bullet\|_s$ *est une norme matricielle.*

Correction Exercice

Q. 1 On a immédiatement
$$\|\mathbb{I}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{I}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = 1.$$

Q. 2 1. Les ensembles $\mathcal{B}$ et $\mathcal{S}$ sont des compacts car image réciproque de l'application continue $\boldsymbol{v} \mapsto \|\boldsymbol{v}\|$ par le fermé borné $[0, 1]$ (pour la boule) et le singleton $\{1\}$ (pour la sphère).

2. On a
$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \left\|\mathbb{A}\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}\right\| = \sup_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|$$

3. Comme $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ on a aussi
$$\sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{B}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \geqslant \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|. \tag{5}$$
On peut aussi remarquer que
$$\sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{B}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathcal{B} \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \tag{6}$$
De plus, $\forall \boldsymbol{w} \in \mathcal{B}\backslash\{0\}$, en posant $\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|} \in \mathcal{S}$. on a $\boldsymbol{w} = \|\boldsymbol{w}\| \boldsymbol{u}$ et
$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\| = \|\boldsymbol{w}\| \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| \leqslant \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| \ \text{ car } \ \|\boldsymbol{w}\| \leqslant 1.$$

Or on a
$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| \leqslant \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|\,.$$
et on obtient alors
$$\sup_{\substack{\boldsymbol{w}\in\mathcal{B}\\ \boldsymbol{w}\neq 0}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\| \leqslant \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|\,.$$
En utilisant (5) et (6), on en déduit
$$\sup_{\boldsymbol{w}\in\mathcal{B}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\| = \sup_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|\,.$$

4. L'application $\boldsymbol{v} \mapsto \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|$ est continue donc son sup sur la sphère unitée qui est compacte est atteint.

Q. 3 1. Comme $\|\bullet\|_s$ est bien définie il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $\|\mathbb{A}\|_s \leqslant \alpha$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $\|\mathbb{A}\|_s \leqslant \alpha$. On a
$$\begin{aligned}\|\mathbb{A}\|_s \leqslant \alpha &\Leftrightarrow \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \leqslant \alpha\\ &\Leftrightarrow \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \leqslant \alpha,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\backslash\{0\}\\ &\Leftrightarrow \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha\,\|\boldsymbol{v}\|\,,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\backslash\{0\}\\ &\Leftrightarrow \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha\,\|\boldsymbol{v}\|\,,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\end{aligned}$$
On en déduit que
$$\|\mathbb{A}\|_s \leqslant \inf\{\alpha \in \mathbb{R}\ :\ \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha\,\|\boldsymbol{v}\|\,,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\} \tag{7}$$

2. Comme $\mathcal{S}$ est compact et l'application $\boldsymbol{v} \mapsto \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|$ est continue, il existe $\boldsymbol{w} \in \mathcal{S}$ tel que
$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\|\,.$$

3. On en déduit $\|\mathbb{A}\|_s\,\|\boldsymbol{w}\| = \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\|$ car $\|\boldsymbol{w}\| = 1$. On a alors
$$\|\mathbb{A}\|_s \in \{\alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha\,\|\boldsymbol{v}\|\,,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\}$$
et donc
$$\inf\{\alpha \in \mathbb{R}\ :\ \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha\,\|\boldsymbol{v}\|\,,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\} \leqslant \|\mathbb{A}\|_s\,.$$
On conclut en utilisant (7).

Q. 4 1. On a par définition du sup
$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{u}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|}{\|\boldsymbol{u}\|} \geqslant \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|},\quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\backslash\{0\}.$$
et donc
$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s\,\|\boldsymbol{v}\|\,,\quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\backslash\{0\}.$$
qui est équivalent à
$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s\,\|\boldsymbol{v}\|\,,\quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n.$$

2. D'après la **Q. 3** 2. ,il existe $\boldsymbol{w} \in \mathcal{S}$ tel que $\|\mathbb{A}\|_s = \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\|$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{w} \neq 0$. On a $\|\boldsymbol{u}\| = |\lambda|$ et
$$\|\mathbb{A}\|_s = \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\| = \left\|\mathbb{A}\frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}\right\| = \frac{1}{\|\boldsymbol{u}\|}\,\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| \ \Leftrightarrow\ \|\mathbb{A}\|_s\,\|\boldsymbol{u}\| = \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|$$

Q. 5 • $\|\mathbb{A}\|_s = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{A}_s = \mathbb{O}$?

$\boxed{\Longleftarrow}$ trivial.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$$\begin{aligned}\|\mathbb{A}\|_s = 0 = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} &\Longrightarrow \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = 0,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\backslash\{0\}\\ &\Longrightarrow \mathbb{A}\boldsymbol{v} = \mathbf{0},\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\backslash\{0\}\end{aligned}$$
Soit $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On a alors $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{A}\boldsymbol{e}_j = \mathbf{0}$ et on en déduit que
$$\mathrm{A}_{i,j} = \langle \boldsymbol{e}_i, \mathbb{A}\boldsymbol{e}_j\rangle = 0,\ \forall (i,j) \in [\![1, n]\!].$$
et donc $\mathbb{A} = \mathbb{O}$.

- Montrons que $\|\alpha\mathbb{A}\| = |\alpha| \, \|\mathbb{A}\|, \, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \, \forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,.
  Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\alpha\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel) et

$$\begin{aligned}
\|\alpha\mathbb{A}\|_s &= \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\alpha\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{|\alpha| \, \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \quad \text{car } \|\alpha\boldsymbol{u}\| = |\alpha| \, \|\boldsymbol{u}\| \\
&= |\alpha| \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = |\alpha| \, \|\mathbb{A}\|_s \, .
\end{aligned}$$

- Montrons que $\|\mathbb{A}+\mathbb{B}\|_s \leqslant \|\mathbb{A}\|_s + \|\mathbb{B}\|_s \, , \ \forall (\mathbb{A},\mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$
  Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\mathbb{A}+\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel et

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{A}+\mathbb{B}\|_s &= \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|(\mathbb{A}+\mathbb{B})\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}+\mathbb{B}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \\
&\leqslant \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| + \|\mathbb{B}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \quad \text{par inégalité triangulaire dans } \mathbb{K}^n \\
&\leqslant \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} + \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{B}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \|\mathbb{A}\|_s + \|\mathbb{B}\|_s \, .
\end{aligned}$$

- Montrons que $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\|_s \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbb{B}\|_s \, , \ \forall (\mathbb{A},\mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.
  Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\mathbb{A}\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par définition du produit matriciel et

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{A}\mathbb{B}\|_s &= \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|(\mathbb{A}\mathbb{B})\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}(\mathbb{B}\boldsymbol{v})\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \\
&\leqslant \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\|_s \|\mathbb{B}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \quad \text{car } \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{u}\| \ \ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n \\
&\leqslant \|\mathbb{A}\|_s \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{B}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbb{B}\|_s \, .
\end{aligned}$$

◇

Exercice 2

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note

$$\|\mathbb{A}\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{x}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1}$$

la norme matricielle suboordonnée à la norme vectorielle $\|\bullet\|_1$.

Q. 1 *Montrer que*

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \\ \|\boldsymbol{x}\|_1 = 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant \max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

Q. 2 1. *Déterminer un $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{y}\|_1 = 1$ tel que*

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{y}\|_1 = \max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

2. *Conclure.*

Correction Exercice

Q. 1 Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\boldsymbol{x}\|_1 = 1$. On a

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |(\mathbb{A}\boldsymbol{x})_i| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij} x_j| = \sum_{j=1}^{n} \left(|x_j| \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \\
&\leqslant \left(\max_{j \in [\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \sum_{j=1}^{n} |x_j| = \max_{j \in [\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{car } \|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j| = 1.
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \\ \|\boldsymbol{x}\|_1 = 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant \max_{j \in [\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

Q. 2

1. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{i,k}| = \max_{j \in [\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

On a

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{y}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |(\mathbb{A}\boldsymbol{y})_i| = \sum_{i=1}^{n} \Big| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j \Big|.$$

Pour obtenir

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{i,k}| = \sum_{i=1}^{n} \Big| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j \Big|$$

on prend $y_j = \delta_{k,j}$, $\forall j \in [\![1, n]\!]$, c'est à dire $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_k$ le $k^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique. Dans ce cas on a $\|\boldsymbol{y}\|_1 = 1$ et

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{A}\boldsymbol{y}\|_1 &= \|\mathbb{A}\boldsymbol{e}_k\|_1 = \|\mathbb{A}_{:,k}\|_1 \\
&= \sum_{i=1}^{n} |a_{i,k}| = \max_{j \in [\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|.
\end{aligned}$$

2. D'après la proposition/définition des normes matricielles suboordonnées, on a

$$\|\mathbb{A}\|_1 = \sup_{\substack{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \\ \|\boldsymbol{x}\|_1 = 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_1 .$$

En utilisant les résultats de **Q.1** et **Q.2**, on obtient

$$\|\mathbb{A}\|_1 = \max_{j \in [\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

$\diamond$

Exercice 3

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note

$$\|\mathbb{A}\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{x} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}$$

la norme matricielle suboordonnée à la norme vectorielle $\|\bullet\|_\infty$.

Q. 1 *Montrer que*

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \\ \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \max_{i \in [\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

Q. 2 1. *Déterminer un* $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{y}\|_\infty = 1$ *tel que*

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{y}\|_\infty = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

2. *Conclure.*

Correction Exercice

Q. 1 Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1$. On a

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_\infty &= \max_{i \in [\![1,n]\!]} |(\mathbb{A}\boldsymbol{x})_i| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right| \\
&\leqslant \max_{i \in [\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| |x_j| \\
&\leqslant \max_{i \in [\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \quad \text{car } |x_j| \leqslant \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i| = \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1.
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \\ \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \max_{i \in [\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

Q. 2 1. Soit $k \in [\![1,n]\!]$ tel que

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

On a, pour tout $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$,

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{y}\|_\infty = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |(\mathbb{A}\boldsymbol{y})_i| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j \right|.$$

On va construire un vecteur $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{y}\|_\infty = 1$, tel que

$$\max_{i \in [\![1,n]\!]} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j \right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}|.$$

On sait déjà que, si $\|\boldsymbol{y}\|_\infty = 1$,

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}|.$$

On va donc construire $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{y}\|_\infty = 1$, de telle sorte que

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} y_j \right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}|.$$

Il suffit pour celà de prendre,

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad y_j = \begin{cases} \frac{|a_{k,j}|}{a_{k,j}} & \text{si } a_{kj} \neq 0 \\ 1 & \text{si } a_{k,j} = 0 \end{cases}.$$

et on a bien $\|\boldsymbol{y}\|_\infty = 1$. On a alors

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} y_j \right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}| \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}|$$

et donc

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{y}\|_\infty = \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

2. D'après la proposition/définition des normes matricielles suboordonnées, on a

$$\|\mathbb{A}\|_\infty = \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \\ \|\boldsymbol{x}\|_\infty=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_\infty .$$

En utilisant les résultats de **Q.1** et **Q.2**, on obtient

$$\|\mathbb{A}\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

◇

Exercice 4

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathbb{B} = \mathbb{A}^*\mathbb{A}$.

Q. 1 *Soit* $(\lambda, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n\backslash\{0\}$ *un élément propre de* $\mathbb{B}$.

1. *Montrer que la matrice* $\mathbb{B}$ *est hermitienne.*
2. *Montrer que les valeurs propres de* $\mathbb{B}$ *sont réelles.*
3. *En déduire que*

$$\lambda = \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|_2^2}{\|\boldsymbol{u}\|_2^2}.$$

La matrice $\mathbb{B}$ étant hermitienne (elle est donc normale), d'après le Théorème de réduction 3.2 page 63, il existe alors une matrice $\mathbb{U}$ unitaire et une matrice $\mathbb{D}$ diagonale telle que

$$\mathbb{B} = \mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^*.$$

On note $(\lambda_i, \boldsymbol{e}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ les éléments propres de $\mathbb{D}$. Les vecteurs $\boldsymbol{e}_i$ sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $\lambda_i = \mathbb{D}_{ii}$.

Q. 2 1. *Démontrer que les* $(\lambda_i, \boldsymbol{v}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ *sont les éléments propres de* $\mathbb{B}$ *où* $\boldsymbol{v}_i$ *est le* i*-ème vecteur colonne de* $\mathbb{U}$.

2. *En déduire que* $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ *est une base orthonormée de* $\mathbb{C}^n$.

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1$ décomposée dans la base $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$:

$$\exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \text{tels que } \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i.$$

Q. 3 1. *Montrer que*

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 = 1.$$

2. *Montrer que*

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n \\ \|\boldsymbol{v}\|_2=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|_2^2 \leqslant \rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A}).$$

3. *Déterminer un vecteur* $\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^n$, *tel que*

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\|_2^2 = \rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A}).$$

4. *En déduire que*

$$\|\mathbb{A}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{x}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A})}.$$

Q. 4 *1. Montrer que la norme $\|\bullet\|_2$ est invariante par transformation unitaire :*

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I} \Longrightarrow \|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 = \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 .$$

2. Montrer que si $\mathbb{A}$ est hermitienne alors

$$\|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A}).$$

Correction Exercice

Q. 1 1. Il faut montrer que $\mathbb{B} = \mathbb{B}^*$. Or on a

$$\mathbb{B}^* = \left(\mathbb{A}^*\mathbb{A}\right)^* = \mathbb{A}^*\left(\mathbb{A}^*\right)^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A} = \mathbb{B}.$$

2. Comme $(\lambda, \boldsymbol{u})$ est un élément propre de $\mathbb{B}$, on a $\mathbb{B}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$. On en déduit que

$$\langle \mathbb{B}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle = \langle \lambda\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle = \overline{\lambda}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle = \overline{\lambda}\,\|\boldsymbol{u}\|_2^2 .$$

De plus par propriété du produit scalaire, on a

$$\langle \mathbb{B}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \mathbb{B}^*\boldsymbol{u}\rangle .$$

Comme $\mathbb{B}$ est hermitienne, on obtient

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{B}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle &= \langle \boldsymbol{u}, \mathbb{B}\boldsymbol{u}\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{u}, \lambda\boldsymbol{u}\rangle = \lambda\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle = \lambda\,\|\boldsymbol{u}\|_2^2 .\end{aligned}$$

On a donc

$$\lambda\,\|\boldsymbol{u}\|_2^2 = \overline{\lambda}\,\|\boldsymbol{u}\|_2^2$$

et comme $\|\boldsymbol{u}\|_2 \neq 0$ ($\boldsymbol{u}$ est un vecteur propre) on obtient $\lambda = \overline{\lambda}$, c'est à dire $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. On a

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{B}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle &= \langle \mathbb{A}^*\mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle \\ &= \langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \mathbb{A}\boldsymbol{u}\rangle \quad \text{par propriété du produit scalaire} \\ &= \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|_2^2 .\end{aligned}$$

De plus, on a vu que $\langle \mathbb{B}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle = \lambda\,\|\boldsymbol{u}\|_2^2$ avec $\|\boldsymbol{u}\|_2 > 0$. On en déduit alors

$$\lambda = \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|_2^2}{\|\boldsymbol{u}\|_2^2} \geqslant 0.$$

Q. 2 1. On a $\mathbb{B} = \mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^*$. Or $\mathbb{U}$ est unitaire, donc inversible d'inverse $\mathbb{U}^*$. En multipliant à gauche par $\mathbb{U}^*$ et à droite par $\mathbb{U}$ on obtient

$$\mathbb{U}^*\mathbb{B}\mathbb{U} = \mathbb{U}^*(\mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^*)\mathbb{U} = (\mathbb{U}^*\mathbb{U})\mathbb{D}(\mathbb{U}^*\mathbb{U}) = \mathbb{D}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}\mathbb{D}\boldsymbol{e}_i = \lambda_i\boldsymbol{e}_i \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbb{U}^*\mathbb{B}\mathbb{U}\boldsymbol{e}_i = \lambda_i\boldsymbol{e}_i \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathbb{B}\mathbb{U}\boldsymbol{e}_i = \lambda_i\mathbb{U}\boldsymbol{e}_i.\end{aligned}$$

C'est à dire en posant $\boldsymbol{v}_i = \mathbb{U}\boldsymbol{e}_i$ (i-ème vecteur colonne de $\mathbb{U}$), les éléments propres de $\mathbb{B}$ sont les $(\lambda_i, \boldsymbol{v}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$. On peut noter que $\boldsymbol{v}_i \neq 0$ car $\mathbb{U}$ est inversible.

2. On a

$$\mathbb{U} = \left(\begin{array}{c:c:c} \boldsymbol{v}_1 & \dots & \boldsymbol{v}_n \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{U}^* = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{v}_1^* \\ \hdashline \boldsymbol{v}_2^* \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \boldsymbol{v}_n^* \end{array}\right)$$

On a donc

$$\mathbb{U}^*\mathbb{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1^*\boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_1}^*\boldsymbol{v}_2 & \dots & \boldsymbol{v_1}^*\boldsymbol{v}_n \\ \boldsymbol{v}_2^*\boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v}_2^*\boldsymbol{v}_2 & \dots & \boldsymbol{v}_2^*\boldsymbol{v}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{v}_n^*\boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v}_n^*\boldsymbol{v}_2 & \dots & \boldsymbol{v}_n^*\boldsymbol{v}_n \end{pmatrix}$$

et donc

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (\mathbb{U}^*\mathbb{U})_{i,j} = \boldsymbol{v}_i^*\boldsymbol{v}_j = \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle.$$

Comme $\mathbb{U}$ est unitaire, on a $\mathbb{U}^*\mathbb{U} = \mathbb{I}$ et donc

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (\mathbb{U}^*\mathbb{U})_{i,j} = \delta_{i,j}.$$

On en déduit alors

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

$\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ est donc une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$.

Q. 3

1. On peut voir que

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \boldsymbol{v}_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i}\alpha_j \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i}\alpha_i \text{ car } \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2. \end{aligned}$$

De plus $\|\boldsymbol{x}\|_2^2 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 1$.

2. On a

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_2^2 &= \langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{A}^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{B}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{B}\boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \boldsymbol{v}_j \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \boldsymbol{v}_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i}\overline{\lambda_i} \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i |\alpha_i|^2 \quad \text{car } \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ et } \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = \delta_{ij} \\ &\leqslant \big(\max_{i \in [\![1,n]\!]} \lambda_i \big) \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = \rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A}) \quad \text{car } \lambda_i \geqslant 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = 1. \end{aligned}$$

On en déduit alors

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n \\ \|\boldsymbol{v}\|_2 = 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|_2^2 \leqslant \rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A}).$$

3. Pour démontrer que l'on a en fait égalité il suffit de trouver un vecteur la vérifiant, c'est à dire un vecteur $\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{w}\|_2 = 1$, tel que

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\|_2^2 = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \lambda_i$$

où les λ_i sont positifs ou nuls (valeurs propres de $\mathbb{B}$. Pour celà on note $k \in [\![1,n]\!]$ l'indice tel que $\lambda_k = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \lambda_i$. En choisissant $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_k$ (qui est de norme 1) on obtient alors

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}_k\|_2^2 = \langle \mathbb{A}\boldsymbol{v}_k, \mathbb{A}\boldsymbol{v}_k \rangle = \langle \mathbb{A}^*\mathbb{A}\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_k \rangle = \langle \lambda_k \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_k \rangle = \lambda_k = \rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A}).$$

4. D'après la proposition/définition des normes matricielles suboordonnées, on a

$$\|\mathbb{A}\|_2 = \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \\ \|\boldsymbol{x}\|_2=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_2 .$$

En utilisant les résultats de **Q.3**, 2. et 3., on obtient

$$\|\mathbb{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A})}.$$

Q. 4 1. Soit $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, i.e.

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{U}^*\mathbb{U} = \mathbb{I}.$$

- Montrons que $\|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2$.
On a $\|\mathbb{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A})}$ et donc

$$\|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2 = \sqrt{\rho((\mathbb{U}\mathbb{A})^*\mathbb{U}\mathbb{A})} = \sqrt{\rho(A^*(\mathbb{U}^*\mathbb{U})\mathbb{A})} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A})} = \|\mathbb{A}\|_2 .$$

- Montrons que $\|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2$.
On a

$$\|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{x}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbb{U}\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2}.$$

En posant $\boldsymbol{y} = \mathbb{U}\boldsymbol{x}$, on a $\boldsymbol{x} = \mathbb{U}^*\boldsymbol{y}$ car $\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^*$ ($\mathbb{U}$ étant unitaire). Comme $\mathbb{U}$ est inversible on a

$$\left\{\mathbb{U}^*\boldsymbol{y},\ \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n\backslash\{0\}\right\} = \mathbb{C}^n\backslash\{0\}$$

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{x}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbb{U}\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} = \sup_{\substack{\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{y}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{y}\|_2}{\|\mathbb{U}^*\boldsymbol{y}\|_2}.$$

De plus, on a

$$\|\mathbb{U}^*\boldsymbol{y}\|_2^2 = \langle \mathbb{U}^*\boldsymbol{y}, \mathbb{U}^*\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{y}, \mathbb{U}\mathbb{U}^*\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle = \|\boldsymbol{y}\|_2^2$$

et donc $\|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 = \|\mathbb{A}\|_2$.
- Montrons que $\|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2$.
Ceci découle des deux égalités précédentes. En effet,

$$\begin{aligned} \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 &= \|\mathbb{U}^*(\mathbb{A}\mathbb{U})\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 && \text{car } \mathbb{U}^* \text{ unitaire} \\ &= \|\mathbb{A}\|_2 && \text{car } \mathbb{U} \text{ unitaire} \end{aligned}$$

◇