Exercice 1

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j$, on note $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identitée dont on a permuté les lignes i et j.

Q. 1 *Représenter cette matrice et la définir proprement.*

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.On note $\boldsymbol{A}_{r,:}$ le r-ème vecteur ligne de $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{A}_{:,s}$ le s-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$.

Q. 2 1. *On note $\mathbb{D} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}\mathbb{A}$. Montrer que*

$$\left\{\begin{array}{lcl}\boldsymbol{D}_{r,:} & = & \boldsymbol{A}_{r,:}, \quad \forall r \in [\![1,n]\!] \backslash \{i,j\},\\ \boldsymbol{D}_{i,:} & = & \boldsymbol{A}_{j,:},\\ \boldsymbol{D}_{j,:} & = & \boldsymbol{A}_{i,:}.\end{array}\right.$$

2. *On note $\mathbb{E} = \mathbb{A}\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.*

$$\left\{\begin{array}{lcl}\boldsymbol{E}_{:,s} & = & \boldsymbol{A}_{:,s}, \quad \forall s \in [\![1,n]\!] \backslash \{i,j\},\\ \boldsymbol{E}_{:,i} & = & \boldsymbol{A}_{:,j},\\ \boldsymbol{E}_{:,j} & = & \boldsymbol{A}_{:,i}.\end{array}\right.$$

Q. 3 1. *Calculer le déterminant de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.*

2. *Déterminer l'inverse de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.*

Correction Exercice On note $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

Q. 1 On peut définir cette matrice par ligne,

$$\left\{\begin{array}{llcll}\forall r \in [\![1,n]\!] \backslash \{i,j\}, & P_{r,s} & = & \delta_{r,s}, & \forall s \in [\![1,n]\!],\\ & P_{i,s} & = & \delta_{j,s}, & \forall s \in [\![1,n]\!],\\ & P_{j,s} & = & \delta_{i,s}, & \forall s \in [\![1,n]\!].\end{array}\right.$$

ou par colonne

$$\left\{\begin{array}{llcll}\forall s \in [\![1,n]\!] \backslash \{i,j\}, & P_{r,s} & = & \delta_{r,s}, & \forall r \in [\![1,n]\!],\\ & P_{r,i} & = & \delta_{r,j}, & \forall r \in [\![1,n]\!],\\ & P_{r,j} & = & \delta_{r,i}, & \forall r \in [\![1,n]\!].\end{array}\right.$$

Ne pas utiliser les indices i et j qui sont déjà fixés dans la définition de la matrice $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

On peut noter que la matrice $\mathbb{P}$ est symétrique.

Q. 2 1. On note $\mathbb{D} = \mathbb{P}\mathbb{A}$. Par définition du produit matriciel on a

$$D_{r,s} = \sum_{k=1}^{n} P_{r,k}A_{k,s}.$$

On obtient, $\forall s \in [\![1,n]\!]$,

$$\left\{\begin{array}{lcl}D_{r,s} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{r,k}A_{k,s} = A_{r,s}, \quad \forall r \in [\![1,n]\!] \backslash \{i,j\},\\ D_{i,s} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{j,k}A_{k,s} = A_{j,s},\\ D_{j,s} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}A_{k,s} = A_{i,s}.\end{array}\right.$$

ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{lcl}\boldsymbol{D}_{r,:} & = & \boldsymbol{A}_{r,:}, \quad \forall r \in [\![1,n]\!] \backslash \{i,j\},\\ \boldsymbol{D}_{i,:} & = & \boldsymbol{A}_{j,:},\\ \boldsymbol{D}_{j,:} & = & \boldsymbol{A}_{i,:}.\end{array}\right.$$

La notation $\boldsymbol{D}_{i,:}$ correspond au vecteur ligne $(D_{i,1},\dots,D_{i,n})$ et $\boldsymbol{D}_{:,j}$ correspond au vecteur colonne $\begin{pmatrix}D_{1,j}\\ \vdots\\ D_{n,j}\end{pmatrix}$

2. On note $\mathbb{E} = \mathbb{A}\mathbb{P}$. Par définition du produit matriciel et par symétrie de $\mathbb{P}$ on a

$$E_{r,s} = \sum_{k=1}^{n} A_{r,k}P_{k,s} = \sum_{k=1}^{n} A_{r,k}P_{s,k}.$$

Ne pas utiliser les indices i et j qui sont déjà fixés dans la définition de la matrice $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

On obtient en raisonnant par colonne, $\forall r \in [\![1,n]\!]$,

$$\left\{\begin{array}{lcl}E_{r,s} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_{r,k}\delta_{s,k} = A_{r,s}, \quad \forall s \in [\![1,n]\!] \backslash \{i,j\},\\ E_{r,i} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_{r,k}\delta_{j,k} = A_{r,j},\\ E_{r,j} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_{r,k}\delta_{i,k} = A_{r,i}.\end{array}\right.$$

ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{lcl}\boldsymbol{E}_{:,s} & = & \boldsymbol{A}_{:,s}, \quad \forall s \in [\![1,n]\!] \backslash \{i,j\},\\ \boldsymbol{E}_{:,i} & = & \boldsymbol{A}_{:,j},\\ \boldsymbol{E}_{:,j} & = & \boldsymbol{A}_{:,i}.\end{array}\right.$$

Q. 3 1. $\det(\mathbb{P}) = -1$, si $i \neq j$ et $\det(\mathbb{P}) = 1$ sinon.

2. Immédiat par calcul direct on a $\mathbb{P}\mathbb{P} = \mathbb{I}$ et donc la matrice $\mathbb{P}$ est inversible et $\mathbb{P}^{-1} = \mathbb{P}$.

◇

Exercice 2

Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ avec $v_1 \neq 0$. On note $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice triangulaire inférieure à diagonale unité définie par

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} = \left(\begin{array}{c|cccc}1 & 0 & \dots & \dots & 0\\ \hline -v_2/v_1 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ -v_n/v_1 & 0 & \dots & 0 & 1\end{array}\right) \tag{1}$$

Q. 1 1. *Calculer le déterminant de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$.*

2. *Déterminer l'inverse de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$.*

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $A_{1,1} \neq 0$. On note $\boldsymbol{A}_{:,j}$ le j-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{A}_{i,:}$ son i-ème vecteur ligne. On pose $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_{:,1}$.

Q. 2 1. *Calculer $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}\mathbb{A}$ en fonction des vecteurs lignes de $\mathbb{A}$.*

2. *Montrer que la première colonne de $\tilde{\mathbb{A}}$ est le vecteur $(A_{1,1}, 0, \dots, 0)^t$ i.e.*

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = A_{1,1}\boldsymbol{e}_1 \tag{2}$$

où $\boldsymbol{e}_1$ est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{C})$ la matrice triangulaire inférieure à diagonale unité définie par

$$\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O} \\ \hdashline \mathbb{O} & \mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} \end{array}\right) \tag{3}$$

Q. 3 *1. Calculer le déterminant de* $\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]}$.

2. Déterminer l'inverse de $\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]}$ *en fonction de l'inverse de* $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$.

Soit $\mathbb{C}$ la matrice bloc définie par

$$\mathbb{C} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{C}_{1,1} & \mathbb{C}_{1,2} \\ \hdashline \mathbb{O} & \tilde{\mathbb{A}} \end{array}\right)$$

où $\mathbb{C}_{1,1} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}_{1,2} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

Q. 4 *Déterminer la matrice produit* $\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{A}_1]}\mathbb{C}$ *en fonction des matrices* $\mathbb{C}_{1,1}$, $\mathbb{C}_{1,2}$ *et* $\tilde{\mathbb{A}}$.

Correction Exercice

Q. 1 1. La matrice $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$ est triangulaire : son déterminant est donc le produit de ses éléments diagonaux (Proposition B.53 page 211) On a alors $\det(\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}) = 1$.

2. Pour calculer son inverse qui existe puisque $\det(\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}) \neq 0$, on écrit $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$ sous forme bloc :

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} = \left(\begin{array}{c:ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline \boldsymbol{e} & & \mathbb{I}_{n-1} & \end{array}\right)$$

avec $\boldsymbol{e} = (-v_2/v_1, \dots, -v_n/v_1)^{\mathsf{t}} \in \mathbb{C}^{n-1}$ On note $\mathbb{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son inverse qui s'écrit avec la même structure bloc

$$\mathbb{X} = \left(\begin{array}{c:c} a & \boldsymbol{b}^* \\ \hdashline \boldsymbol{c} & \mathbb{D} \end{array}\right)$$

avec $a \in \mathbb{K}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^{n-1}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{K}^{n-1}$ et $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$.
La matrice $\mathbb{X}$ est donc solution de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\mathbb{X} = \mathbb{I}$. Grace à l'écriture bloc des matrices on en déduit rapidement la matrice $\mathbb{X}$. En effet, en utilisant les produits blocs des matrices, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\mathbb{X} &= \left(\begin{array}{c:c} 1 & \boldsymbol{0}_{n-1}^{\mathsf{t}} \\ \hdashline \boldsymbol{e} & \mathbb{I}_{n-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:c} a & \boldsymbol{b}^* \\ \hdashline \boldsymbol{c} & \mathbb{D} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} 1 \times a & 1 \times \boldsymbol{b}^* + \boldsymbol{0}_{n-1}^{\mathsf{t}} \times \mathbb{D} \\ \hdashline \boldsymbol{e} \times a + \mathbb{I}_{n-1} \times \boldsymbol{c} & \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{b}^* + \mathbb{I}_{n-1} \times \mathbb{D} \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c:c} a & \boldsymbol{b}^* \\ \hdashline a\boldsymbol{e} + \boldsymbol{c} & \boldsymbol{e}\boldsymbol{b}^* + \mathbb{D} \end{array}\right)\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{X}$ est l'inverse de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$, on a $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\mathbb{X} = \mathbb{I}$ et donc en écriture bloc

$$\left(\begin{array}{c:c} a & \boldsymbol{b}^* \\ \hdashline a\boldsymbol{e} + \boldsymbol{c} & \boldsymbol{e}\boldsymbol{b}^* + \mathbb{D} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} 1 & \boldsymbol{0}_{n-1}^{\mathsf{t}} \\ \hdashline \boldsymbol{0}_{n-1} & \mathbb{I}_{n-1} \end{array}\right).$$

Ceci revient à résoudre les 4 équations

$$a = 1, \quad \boldsymbol{b}^* = \boldsymbol{0}_{n-1}^{\mathsf{t}}, \quad a\boldsymbol{e} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}_{n-1} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{e}\boldsymbol{b}^* + \mathbb{D} = \mathbb{I}_{n-1}$$

qui donnent immédiatement $a = 1$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}_{n-1}$, $\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{e}$ et $\mathbb{D} = \mathbb{I}_{n-1}$. On obtient le résultat suivant

$$\left(\begin{array}{c:ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline -\boldsymbol{e} & & \mathbb{I}_{n-1} & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline \boldsymbol{e} & & \mathbb{I}_{n-1} & \end{array}\right) = \mathbb{I}_n.$$

Il aurait été plus rapide d'utiliser la Proposition B.54, page 211.

Q. 2 1. Pour simplifier les notations, on note $\mathbb{E} = \mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}$. Par définition du produit de deux matrices on a

$$\tilde{A}_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} E_{i,k}A_{k,j}, \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2.$$

Quand $i = 1$, on a par construction $E_{1,k} = \delta_{1,k}$ et donc

$$\tilde{A}_{1,j} = A_{1,j}, \ \forall j \in [\![1,n]\!] \iff \tilde{\boldsymbol{A}}_{1,:} = \boldsymbol{A}_{1,:}. \tag{4}$$

Pour $i \geqslant 2$, on a $E_{i,1} = -\frac{v_i}{v_1}$ et $E_{i,k} = \delta_{i,k}$, $\forall k \in [\![2,n]\!]$. On obtient alors pour tout $j \in [\![1,n]\!]$

$$\tilde{A}_{i,j} = E_{i,1}A_{1,j} + \sum_{k=2}^{n} E_{i,k}A_{k,j} = -\frac{v_i}{v_1}A_{1,j} + \sum_{k=2}^{n} \delta_{i,k}A_{k,j} = -\frac{v_i}{v_1}A_{1,j} + A_{i,j}$$

ce qui donne pour tout $i \in [\![2,n]\!]$

$$\tilde{A}_{i,j} = A_{i,j} - \frac{v_i}{v_1}A_{1,j}, \ \forall j \in [\![1,n]\!] \iff \tilde{\boldsymbol{A}}_{i,:} = -\frac{v_i}{v_1}\boldsymbol{A}_{1,:} + \boldsymbol{A}_{i,:} \tag{5}$$

En conclusion, la matrice $\tilde{\mathbb{A}}$ s'écrit

$$\tilde{\mathbb{A}} = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{A}_{1,:} \\ \hdashline \boldsymbol{A}_{2,:} - (v_2/v_1)\boldsymbol{A}_{1,:} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \boldsymbol{A}_{n,:} - (v_n/v_1)\boldsymbol{A}_{1,:} \end{array}\right)$$

2. De (4), on tire $\tilde{A}_{1,1} = A_{1,1}$. A partir de (5) on obtient pour tout $i \in [\![2,n]\!]$, $\tilde{A}_{i,1} = A_{i,1} - \frac{v_i}{v_1}A_{1,1}$. Par construction $v_j = A_{j,1}$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, ce qui donne $\tilde{A}_{i,1} = 0$.
La première colonne de $\tilde{\mathbb{A}}$ est $(1, 0, \dots, 0)^{\mathsf{t}}$.

Q. 3 1. La matrice $\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]}$ est triangulaire inférieure. Son déterminant est donc le produit de ses éléments diagonaux. Comme cette matrice est à diagonale unité (i.e. tous ses éléments diagonaux valent 1), on obtient $\det \mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]} = 1$.

Une autre manière de le démontrer. On peut voir que la matrice $\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]}$ est bloc-diagonale. D'après la Proposition B.54, page 211,son déterminant est le produit des déterminant des blocs diagonaux : $\det \mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]} = \det \mathbb{I}_m \times \det \mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} = 1$.

2. On note $\mathbb{X}$ l'inverse de la matrice $\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]}$. Cette matrice s'écrit avec la même structure bloc

$$\mathbb{X} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{X}_{1,1} & \mathbb{X}_{1,2} \\ \hdashline \mathbb{X}_{2,1} & \mathbb{X}_{2,2} \end{array}\right) \text{ avec } \mathbb{X}_{1,1} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C}) \text{ et } \mathbb{X}_{2,2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

On a donc $\mathbb{X}\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]} = \mathbb{I}_{m+n}$ c'est à dire en écriture bloc

$$\left(\begin{array}{c:c} \mathbb{X}_{1,1} & \mathbb{X}_{1,2} \\ \hdashline \mathbb{X}_{2,1} & \mathbb{X}_{2,2} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O} \\ \hdashline \mathbb{O} & \mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O} \\ \hdashline \mathbb{O} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) =$$

On doit donc résoudre les 4 équations suivantes :

$$\mathbb{X}_{1,1}\mathbb{I}_m = \mathbb{I}_m, \quad \mathbb{X}_{1,2}\mathbb{I}_n = \mathbb{O}, \quad \mathbb{X}_{2,1}\mathbb{I}_m = \mathbb{O} \quad \text{et} \quad \mathbb{X}_{2,2}\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} = \mathbb{I}_n.$$

Comme la matrice $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$ est inversible, on obtient

$$\mathbb{X} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O} \\ \hdashline \mathbb{O} & \left(\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\right)^{-1} \end{array}\right)$$

Plus rapidement, comme la matrice $\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]}$ est bloc-diagonale, on en déduit (Proposition B.54, page 211) directement le résultat.

Q. 4 Le produit $\mathbb{E}^{[\triangleright,\boldsymbol{v}]}\mathbb{C}$ peut s'effectuer par bloc car les blocs sont de dimensions compatibles et on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{[\triangleright,\boldsymbol{v}]}\mathbb{C} &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{E} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{C}_{1,1} & \mathbb{C}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{A} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m\mathbb{C}_{1,1} + \mathbb{O}_{m,n}\mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_m\mathbb{C}_{1,2} + \mathbb{O}_{m,n}\mathbb{A} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m}\mathbb{C}_{1,1} + \mathbb{E}\mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{O}_{n,m}\mathbb{C}_{1,2} + \mathbb{E}\mathbb{A} \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{C}_{1,1} & \mathbb{C}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{E}\mathbb{A} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{C}_{1,1} & \mathbb{C}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \tilde{\mathbb{A}} \end{array}\right)\end{aligned}$$

$\diamond$

Exercice 3

Soit $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{K})$ la matrice bloc

$$\mathbb{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{S} \end{array}\right)$$

où $\mathbb{B}_{1,1} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ et $\mathbb{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\boldsymbol{s} \in \mathbb{K}^n$ le premier vecteur colonne de $\mathbb{S}$ et on suppose que $\boldsymbol{s} \neq 0$ et $\boldsymbol{s}$ non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^n$ premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Q. 1 1. *Montrer qu'il existe une matrice de Householder* $\underline{\mathbb{H}} = \mathbb{H}(\underline{\boldsymbol{u}}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}^*$ *tel que*

$$\underline{\mathbb{H}}\mathbb{S} = \left(\begin{array}{c|ccc} \pm\alpha & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right).$$

2. *On note* $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^{m+n}$, *le vecteur défini par* $u_i = 0$, $\forall i \in [\![1, m]\!]$ *et* $u_{m+i} = \underline{u_i}$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$. *Montrer que*

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O} & \underline{\mathbb{H}}\mathbb{S} \end{array}\right).$$

Soient $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $\mathbb{A}^{[k]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice bloc définie par

$$\mathbb{A}^{[k]} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{R}^{[k]} & \mathbb{F}^{[k]} \\ \hline \mathbb{O} & \underline{\mathbb{A}}^{[k]} \end{array}\right)$$

où $\mathbb{R}^{[k]}$ est une matrice triangulaire supérieure d'ordre k et $\underline{\mathbb{A}}^{[k]}$ une matrice d'ordre $n-k$.

Q. 2 1. *Sous certaines hypothèses, montrer qu'il existe une matrice de Householder* $\mathbb{H}^{[k+1]}$ *telle que* $\mathbb{H}^{[k+1]}\mathbb{A}^{[k]} = \mathbb{A}^{[k+1]}$.

2. *Soit* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Montrer qu'il existe une matrice unitaire* $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *produit d'au plus* $n-1$ *matrices de Housholder, et une matrice triangulaire supérieure* $\mathbb{R}$ *telles que* $\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}$.

3. *Montrer que si* $\mathbb{A}$ *est réelle alors les coefficient diagonaux de* $\mathbb{R}$ *peuvent être choisis positifs ou nuls.*

4. *Montrer que si* $\mathbb{A}$ *est réelle inversible alors la factorisation* $\mathbb{Q}\mathbb{R}$, *avec* $\mathbb{R}$ *à coefficient diagonaux strictement positifs, est unique.*

Correction Exercice

Q. 1 1. D'après le Corollaire 3.21, page 93, avec $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{s}$, en posant $\alpha = \pm\|\boldsymbol{s}\|_2\, e^{\imath \arg s_1}$ et

$$\underline{\boldsymbol{u}} = \frac{\boldsymbol{s} - \alpha\boldsymbol{e}_1^n}{\|\boldsymbol{s} - \alpha\boldsymbol{e}_1^n\|}$$

on obtient $\mathbb{H}(\underline{\boldsymbol{u}}) = \alpha\boldsymbol{e}_1^n$.

On pose $\underline{\mathbb{H}} = \mathbb{H}(\underline{\boldsymbol{u}})$. On a alors sous forme bloc

$$\underline{\mathbb{H}}\mathbb{S} = \underline{\mathbb{H}}\left(\begin{array}{c|ccc} & \bullet & \cdots & \bullet \\ \boldsymbol{s} & \vdots & & \vdots \\ & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} \pm\alpha & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right)$$

2. On a $\boldsymbol{u} = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{0}_m \\ \hline \underline{\boldsymbol{u}} \end{array}\right)$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{H}(\boldsymbol{u}) = \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^* &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) - 2\left(\begin{array}{c} \boldsymbol{0}_m \\ \hline \underline{\boldsymbol{u}} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{0}_m^* & \underline{\boldsymbol{u}}^* \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) - 2\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \underline{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}^* \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n - 2\underline{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}^* \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \underline{\mathbb{H}} \end{array}\right)\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \underline{\mathbb{H}} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{S} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O} & \underline{\mathbb{H}}\mathbb{S} \end{array}\right).$$

Q. 2 1. On note $\underline{\boldsymbol{s}} \in \mathbb{K}^{n-k}$ le premier vecteur colonne de $\underline{\mathbb{A}}^{[k]}$. et $\boldsymbol{u} = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{0}_k \\ \hline \underline{\boldsymbol{s}} \end{array}\right)$. D'après la question précédente si $\boldsymbol{s} \neq 0$ et $\boldsymbol{s}$ non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^{n-k}$ premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^{n-k}$ alors il existe une matrice de Householder $\mathbb{H}^{[k+1]} = \mathbb{H}(\boldsymbol{u})$ et $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tels que

$$\mathbb{A}^{[k+1]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[k+1]}\mathbb{A}^{[k]} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{R}^{[k]} & \mathbb{F}^{[k]} \\ \hline \mathbb{O} & \left(\begin{array}{c|ccc} \pm\alpha & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{R}^{[k+1]} & \mathbb{F}^{[k+1]} \\ \hline \mathbb{O} & \underline{\mathbb{A}}^{[k+1]} \end{array}\right)$$

On peut remarquer que si $\boldsymbol{s} = 0$ ou $\boldsymbol{s}$ colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^{n-k}$ alors $\mathbb{A}^{[k]}$ est déjà sous la forme $\mathbb{A}^{[k+1]}$ et donc $\mathbb{H}^{[k+1]} = \mathbb{I}$.

2. il suffit d'appliquer itérativement le résultat précédent $n-1$ fois en posant $\mathbb{A}^{[0]} = \mathbb{A}$ et $\mathbb{A}^{[k+1]} = \mathbb{H}^{[k+1]}\mathbb{A}^{[k]}$ où $\mathbb{H}^{[k+1]}$ est soit une matrice de Householder soit la matrice identité. Par construction la matrice $\mathbb{A}^{[n-1]}$ est triangulaire supérieure et l'on a

$$\mathbb{A}^{[n-1]} = \mathbb{H}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[1]}\mathbb{A}$$

On pose $\mathbb{H} = \mathbb{H}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[1]}$ et $\mathbb{R} = \mathbb{A}^{[n-1]}$. La matrice $\mathbb{H}$ est unitaire car produit de matrices unitaires. On note $\mathbb{Q} = \mathbb{H}^*$ On a

$$\mathbb{Q} = \mathbb{H}^{[1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[n-1]}$$

car les matrices de Householder et matrice identité sont unitaires et hermitiennes.

3. Si $\mathbb{A}$ est réelle alors par construction $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont réelles. Les coefficients diagonaux peuvent alors être choisi positif lors de la construction de chaque matrice de Householder.

4. Pour montrer l'unicité d'une telle factorisation, on note $\mathbb{Q}_1$, $\mathbb{Q}_2$, deux matrices orthogonales et $\mathbb{R}_1$, $\mathbb{R}_2$, deux matrices triangulaires à coefficients diagonaux positifs telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}_1\mathbb{R}_1 = \mathbb{Q}_2\mathbb{R}_2.$$

Comme $\mathbb{A}$ est inversible les coefficients diagonaux de $\mathbb{R}_1$ et $\mathbb{R}_2$ sont strictement positifs. On a alors

$$\mathbb{I} = \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{Q}_1\mathbb{R}_1\mathbb{R}_2^{-1}\mathbb{Q}_2^{-1}$$

et donc

$$\mathbb{Q}_1^{-1}\mathbb{Q}_2 = \mathbb{R}_1\mathbb{R}_2^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{T}.$$

Comme $\mathbb{Q}_1$ est orthogonale on a $\mathbb{T} = \mathbb{Q}_1^t\mathbb{Q}_2$ et

$$\mathbb{T}^t\mathbb{T} = (\mathbb{Q}_1^t\mathbb{Q}_2)^t\mathbb{Q}_1^t\mathbb{Q}_2 = \mathbb{Q}_2^t\mathbb{Q}_1\mathbb{Q}_1^t\mathbb{Q}_2 = \mathbb{I}.$$

La matrice $\mathbb{T}$ est donc orthogonal. De plus $\mathbb{T} = \mathbb{R}_1\mathbb{R}_2^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs puisque produit de triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. La matrice $\mathbb{I}$ étant symétrique définie positive, d'après le Théorème 3.15(factorisation positive de Cholesky) il existe une unique matrice $\mathbb{L}$ triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $\mathbb{L}\mathbb{L}^t = \mathbb{I}$. Cette matrice $\mathbb{L}$ est évidemment la matrice identité. On en déduit que $\mathbb{T} = \mathbb{L}^t = \mathbb{I}$ et donc $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q}_2$ et $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R}_2$.

◇