Ing. MACS 1/L3 MIM — **Analyse Numérique I**
Sup'Galilée — **Année 2018-2019**

Partiel du 4 décembre 2018

durée : 1h30.

Sans documents et sans appareils électroniques

Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 (7 points)

Q. 1 *Donner précisément les définitions*

1. *d'une matrice triangulaire supérieure,* [0.25 pts]
2. *d'une matrice hermitienne définie positive,* [0.5 pts]
3. *d'une matrice unitaire,* [0.25 pts]
4. *du produit de deux matrices (non forcément carrées).* [0.5 pts]

Q. 2 *Soient $\mathbb{A} = (A_{i,j})_{i,j=1}^n$ et $\mathbb{B} = (B_{i,j})_{i,j=1}^n$ deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathbb{G} = \mathbb{A}\mathbb{B}$. Démontrer que $\mathbb{G}$ est une matrice triangulaire supérieure et que* [1.5 pts]

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad G_{i,i} = A_{i,i}B_{i,i}.$$

Q. 3 *Montrer que si $\mathbb{A}$ est inversible alors son inverse est triangulaire supérieure avec comme éléments diagonaux les inverses des éléments diagonaux de $\mathbb{A}$.* [2 pts]

Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$. On suppose de plus que $\mathbb{A}$ est inversible.

Q. 4

1. *Expliquer de manière détaillée la méthode permettant de résoudre le système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ sans utiliser l'inverse de $\mathbb{A}$.* [1 pts]
2. *Ecrire la fonction algorithmique nommée `SolveTriUp` permettant de retourner la solution du système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en utilisant la méthode décrite précédemment.* [1 pts]

Exercice 2 (8 points)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive

Q. 1

1. *Montrer que les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont réelles, strictement positives.* [0.5 pts]
2. *Montrer que les sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ sont hermitiennes définies positives.* [0.5 pts]
3. *Ecrire précisemment le théorème de factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$. Que peut-on en conclure pour la matrice $\mathbb{A}$?* [0.5 pts]

On suppose (si besoin) que la matrice $\mathbb{A}$ admet une factorisation $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$ avec $\mathbb{L}$ une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbb{D}$ une matrice diagonale.

Q. 2

1. *Démontrer que $\mathrm{D}_{i,i} > 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.* [0.5 pts]
2. *En déduire qu'il existe une **unique** matrice $\mathbb{B}$ triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont **réels strictement négatifs** telle que* [1.5 pts]

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*. \tag{1}$$

Q. 3

1. *Montrer que* [1.0 pts]

$$\mathrm{B}_{i,i} = -\left(\mathrm{A}_{i,i} - \sum_{j=1}^{i-1} |\mathrm{B}_{i,j}|^2\right)^{1/2}, \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \tag{2}$$

2. *Montrer que* [1.0 PTS]

$$\mathrm{B}_{j,i} = \frac{1}{\mathrm{B}_{i,i}}\left(\mathrm{A}_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} \mathrm{B}_{j,k}\overline{\mathrm{B}_{i,k}}\right), \ \forall j \in [\![i+1, n]\!] \quad (3)$$

$$\mathrm{B}_{j,i} = 0, \ \forall j \in [\![1, i-1]\!]. \quad (4)$$

3. *Expliquer comment calculer explicitement la matrice* $\mathbb{B}$ *à l'aide des formules précédentes.* [1.0 PTS]

4. *Ecrire la fonction algorithmique* `Fact` *permettant de calculer la matrice* $\mathbb{B}$ [2.0 PTS]

EXERCICE 3 (7.75 POINTS)

Soit g la fonction définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$. On cherche à calculer une approximation de la solution de l'équation

$$g(x) = x. \quad (1)$$

Q. 1 *Enoncer* ***précisément*** *le théorème du point fixe (dans* $\mathbb{R}$*), et en déduire que l'équation* (1) *possède une solution unique dans* $[0, 1]$*, que l'on notera* x^**.* [1.5 PTS]

Pour approcher x^*, on définit une suite $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$x^{(0)} = 1 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N}, \ x^{(n+1)} = g\left(x^{(n)}\right). \quad (2)$$

Q. 2 1. *Représenter sur le graphique donné dans le sujet les trois premiers itérés* $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ *et* $x^{(3)}$ *ainsi que le point* $\left(x^*, g(x^*)\right)$. [0.5 PTS]

2. *Sans faire de calcul, justifier pourquoi la suite* $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bien définie et converge vers* x^* *à l'ordre* 1 *au moins.* [0.5 PTS]

Q. 3 *On va maintenant regarder plus précisément la convergence de cette suite.*

1. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$: [1 PTS]

$$\left(x^{(n+1)} - x^*\right) = -2\sin\left(\frac{x^{(n)} + x^*}{2}\right)\sin\left(\frac{x^{(n)} - x^*}{2}\right). \quad (3)$$

2. *Montrer que* $\sin(t) \leqslant t, \forall t \in \mathbb{R}^+$ *et que la fonction sinus est croissante sur* $[0, \pi/2]$, [0.5 PTS]

3. *Déduire de* (3) *que la suite* $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* x^* *au moins aussi vite qu'une suite géométrique dont on précisera la raison.* [1 PTS]

4. *La convergence est-elle linéaire ou quadratique? Justifiez.* [0.5 PTS]

Pour approcher x^*, on définit maintenant une autre suite $\left(y^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$y^{(0)} \in [0, 1] \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N}, \ y^{(n+1)} = y^{(n)} - \left(\frac{g(y^{(n)}) - y^{(n)}}{g'(y^{(n)}) - 1}\right). \quad (4)$$

Q. 4 1. *A quelle méthode vue en cours correspond cette méthode?* [0.25 PTS]

2. *On suppose que* $y^{(0)}$ *est suffisamment proche de* x^**. La convergence sera-t-elle linéaire? quadratique? Justifier en citant précisemment le théorème utilisé.* [2 PTS]

Nom: