Ing. MACS 1/L3 MIM
Sup'Galilée

Analyse Numérique I
Année 2019-2020

Partiel du 22 novembre 2019

durée : 1h30.

Sans documents et sans appareils électroniques

Le barême est donné à titre indicatif

Exercice 1 (7 points)

Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach (espace vectoriel normé complet, de norme notée $\|.\|$). On considère une application $\mathbf{\Phi} : E \longrightarrow E$ contractante, i.e.

$$\exists L \in [0, 1[, \quad \|\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{\Phi}(\boldsymbol{y})\| \leqslant L \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|, \quad \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in E \times E. \tag{1}$$

Soit $\boldsymbol{x}_0 \in E$, on souhaite utiliser la suite récurrente $(\boldsymbol{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}(\boldsymbol{x}_k), \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Q. 1 *Montrer que la suite $(\boldsymbol{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie.*

Q. 2 1. *Montrer que la fonction $\mathbf{\Phi}$ est continue.*

2. *En déduire que si la suite $\boldsymbol{x}_k$ converge, alors elle converge vers un point fixe de $\mathbf{\Phi}$.*

Q. 3 *Montrer que si $\mathbf{\Phi}$ admet un point fixe alors ce point fixe est unique.*

Q. 4 1. *Rappeler la définition d'une suite de Cauchy.*

2. *Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a*

$$\|\boldsymbol{x}_{n+k} - \boldsymbol{x}_n\| \leqslant \|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\| \frac{L^n}{1 - L} \tag{3}$$

3. *En déduire que la suite $(\boldsymbol{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.*

4. *Conclure.*

On suppose maintenant que $E = \mathbb{R}$.

Q. 5 *Ecrire un algorithme du point fixe (fonction `PointFixe`) permettant de résoudre l'équation $\Phi(x) = x$.*

Exercice 2 (3 points)

En -1700 av. J.-C., les babyloniens ne connaissaient que les nombres rationnels (fractions) et ils utilisaient le système sexagésimal (base 60). Pour approcher la valeur $\sqrt{2}$, ils utilisaient comme approximation (voir tablette YBC 7289)

$$\alpha = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600}$$

L'erreur commise est $|\alpha - \sqrt{2}| \approx 5.994e - 7$.

Q. 1 *Comment feriez-vous pour trouver* **à la main** *une méthode permettant de trouver des nombres rationnels approchant $\sqrt{2}$.*

Q. 2 *Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de $\sqrt{a}$ où a est un réel positif.*

Exercice 3 (7 points)

Q. 1 1. *Rappeler la définition d'une norme matricielle.*

2. *Rappeler la définition d'une norme matricielle subordonnée.*

3. *Rappeler la définition du rayon spectral d'une matrice.*

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\|\bullet\|_S$ une norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle $\|\bullet\|_v$.

Q. 2 *Montrer que*

$$\rho(\mathbb{A}) \leqslant \|\mathbb{A}\|_S. \tag{1}$$

Soit $\|\bullet\|$ une norme matricielle **quelconque**. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{u}$ un vecteur propre associé à λ. On note $\mathbb{B} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*$.

Q. 3 1. *Rappeler la formule liant $\mathbb{A}$, λ et $\boldsymbol{u}$.*

2. *Expliciter les composantes de $\mathbb{B}$ en fonction de celles de $\boldsymbol{u}$.*

3. *Montrer que $\mathbb{B}$ est non nulle.*

4. *Montrer que*

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \lambda\mathbb{B}. \tag{2}$$

5. *En déduire que*

$$\rho(\mathbb{A}) \leqslant \|\mathbb{A}\|. \tag{3}$$

Exercice 4 (9 points)

Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q. 1 a. *Donner la définition mathématique d'une matrice triangulaire supérieure.*

b. *Montrer que $\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B}$ est triangulaire supérieure et que $C_{i,i} = A_{i,i}B_{i,i}$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.*

c. *A quelles conditions, sur ses coefficients, la matrice $\mathbb{A}$ est-elle inversible?*

d. *Montrer que si la matrice $\mathbb{A}$ est inversible alors son inverse est triangulaire supérieure et les éléments diagonaux de la matrice inverse sont les inverses des éléments diagonaux de la matrice $\mathbb{A}$.*

Q. 2 *Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$.*

a. *Expliquer en détail la manière de résoudre le système*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

b. *Ecrire une fonction algorithmique permettant de résoudre le système précédent.*

Q. 3 *Soient $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire inférieure inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$.*

a. *Expliquer en détail la manière de résoudre le système*

$$\mathbb{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

b. *Ecrire une fonction algorithmique permettant de résoudre le système précédent.*