Partiel du 15 janvier 2021 (présentiel)

durée : 2h00.

Sans documents et sans appareils électroniques

Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 (10.75 points)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible dont les éléments diagonaux sont non nuls. On note $\mathrm{A}_{i,j}$ la composante (i,j) de la matrice $\mathbb{A}$. On décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$, où $\mathbb{D}$ représente la diagonale de $\mathbb{A}$, $-\mathbb{E}$ la partie triangulaire inférieure stricte et $-\mathbb{F}$ la partie triangulaire supérieure stricte.
On note respectivement $\mathbb{J} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{D}^{-1}(\mathbb{E}+\mathbb{F})$ et $\mathcal{L}_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}$ les matrices d'itérations des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.
Soit $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. On souhaite résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

Q. 1 ***a.*** *Pour résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ la méthode de Jacobi est donnée par*

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{d}. \tag{1}$$

Expliciter la matrice $\mathbb{B}$ et le vecteur $\boldsymbol{d}$ en fonction de $\mathbb{D}$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ et $\boldsymbol{y}$.

b. *Exprimer la composante $\boldsymbol{x}_i^{[k+1]}$ en fonction des composantes de $\boldsymbol{x}^{[k]}$, des coefficients de la matrice $\mathbb{A}$ et des composantes de $\boldsymbol{y}$.*

c. *A quelle(s) condition(s) supplémentaire(s) la méthode de Jacobi converge-t'elle?*

d. *Démontrer (sans citer le théorème) que si la méthode de Jacobi converge alors elle converge vers la solution du système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.*

Q. 2 *Pour la matrice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, établir (en justifiant) la convergence ou non des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel. Tous les calculs devront être détaillés.*

Q. 3 *On note $\mathbb{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice tridiagonale*

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

Soit $\mu \in \mathbb{C}^*$. On note $\mathbb{Q}(\mu) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice diagonale de diagonale $(\mu, \mu^2, \dots, \mu^n)$.

a. *Expliciter la matrice $\mathbb{T}(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}(\mu)\mathbb{T}\mathbb{Q}^{-1}(\mu)$ en fonction des coefficients de la matrice $\mathbb{T}$ et de μ.*

b. *Déterminer $\det(\mathbb{T}(\mu))$ en fonction de $\det(\mathbb{T})$*

On suppose dans la suite que la matrice inversible $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \gamma_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

et que ses éléments diagonaux sont non nuls.

Q. 4 ***a.*** *Montrer que les valeurs propres de $\mathbb{J}$ sont les racines du polynôme $q_{\mathbb{J}}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\lambda\mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F})$.*

b. *En utilisant la question 3, montrer que* $q_{\mathbb{J}}(\lambda) = \det(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F})$.

c. *En déduire que si* $\lambda \in \mathbb{C}$ *est valeur propre de* $\mathbb{J}$ *alors* $-\lambda$ *l'est aussi.*

Q. 5 **a**. *Montrer que les valeurs propres de* $\mathbb{L}_1$ *sont les racines du polynôme* $q_{\mathcal{L}_1}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \mathbb{F})$.

b. *En déduire que*

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^*, \quad q_{\mathcal{L}_1}(\lambda^2) = \lambda^n q_{\mathbb{J}}(\lambda) \tag{4}$$

Q. 6 **a**. *Comparer les valeurs propres de* $\mathbb{J}$ *à celles de* $\mathcal{L}_1$.

b. *Une des deux méthodes est-elle à privilégier dans ce cas?*

On souhaite utiliser la méthode Gauss-Seidel pour résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ où $\mathbb{A}$ est donnée par (3) et $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Cette méthode est donnée de manière générique par

$$x_i^{[k+1]} = \frac{1}{\mathrm{A}_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{A}_{ij} x_j^{[k+1]} - \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{A}_{ij} x_j^{[k]} \right) \quad \forall i \in [\![1, n]\!] \tag{5}$$

Q. 7 **a**. *Simplifier l'écriture de la formule de Gauss-Seidel* (5) *en tenant compte des particularités de la matrice* $\mathbb{A}$ *(i.e. minimisation du nombre d'opérations élémentaires dans le calcul de* $x_i^{[k+1]}$*).*

b. *Ecrire une* **fonction** *algorithmique permettant de résoudre le système* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ *par le schéma itératif de Gauss-Seidel simplifié sachant que l'on ne veut pas stocker la matrice* $\mathbb{A}$. *Cette fonction devra (entre autres) prendre en paramètres les coefficients* α_i, γ_i, β_i *de la matrice* $\mathbb{A}$.

EXERCICE 2 (11 POINTS)

Soient $f \in \mathcal{C}^4([-1, 1]; \mathbb{R})$ et α, β, γ trois réels. Nous allons étudier la formule de quadrature

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx Q(f) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma f(1) + \beta f(0) + \alpha f(-1) \tag{1}$$

Q. 1 **a**. *Démontrer que la formule de quadrature* (1) *est de degré d'exactitude au moins p si et seulement si elle est exacte pour les* $(p+1)$ *fonctions* $x \mapsto x^k$, $k \in [\![0, p]\!]$.

b. *Déterminer* α, β *et* γ *pour que la formule de quadrature soit au moins de degré d'exactitude* 2.

c. *Montrer que cette formule est de degré d'exactitude* 3.

Q. 2 **a**. *Etablir qu'il existe un unique polynôme* P *de degré* 3 *tel que*

$$\mathrm{P}(-1) = f(-1), \quad \mathrm{P}(0) = f(0), \quad \mathrm{P}(1) = f(1) \ \textit{et}\ \mathrm{P}'(0) = f'(0). \tag{2}$$

b. *Soit* $x \in]-1, 1[$ *fixé, avec* $x \neq 0$. *On considère la fonction* $\varphi : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$\varphi(t) = (f(t) - \mathrm{P}(t)) - (f(x) - \mathrm{P}(x)) \frac{(t+1)(t-1)t^2}{(x+1)(x-1)x^2}, \ \forall t \in [-1, 1].$$

Montrer par applications successives du théorème de Rolle, qu'il existe un $\xi_x \in]-1, 1[$ *tel que* $\varphi^{(4)}(\xi_x) = 0$.

c. *En déduire que pour tout* $x \in [-1, 1]$, *il existe un* $\xi_x \in]-1, 1[$ *tel que*

$$f(x) = \mathrm{P}(x) + \frac{(x+1)(x-1)x^2}{4!} f^{(4)}(\xi_x). \tag{3}$$

d. *Montrer (sans calcul) que*

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(x)dx = \gamma f(1) + \beta f(0) + \alpha f(-1).$$

e. *En déduire qu'il existe une constante M dépendant de* $f^{(4)}$ *telle que*

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)dx - (\gamma f(1) + \beta f(0) + \alpha f(-1)) \right| \leqslant \frac{1}{90} M. \tag{4}$$

Q. 3 *Soient* $c \in \mathbb{R}$, $h > 0$ *et* $g \in \mathcal{C}^4([c, c+h]; \mathbb{R})$.

a. *Déduire de* (1) *une formule de quadrature pour le calcul approché de* $\int_c^{c+h} g(t)dt$.

b. *En utilisant* (4), *montrer que l'erreur de quadrature est majorée par* $\frac{\mathcal{M}}{C}h^5$ *où* $\mathcal{M} = \sup_{t\in[c,c+h]} |g^{(4)}(t)|$ *et* $C > 0$.

Q. 4 *Soient* $(x_k)_{k=0}^n$ *une discrétisation régulière de l'intervalle* $[a, b]$ *et* $w \in \mathcal{C}^4([a, b]; \mathbb{R})$.

a. *A partir de* (1), *expliciter la formule* ***composite*** *associée permettant d'approcher* $\int_a^b w(s)ds$ *en utilisant la discrétisation* $(x_k)_{k=0}^n$.

b. *En utilisant les résultats de la question 3, montrer que l'erreur de quadrature de la formule composite est majorée par* $D(b-a)h^4$ *où* $D = \frac{1}{C}\sup_{x\in[a,b]} |w^{(4)}(x)|$.