# Partiel du 14 janvier 2022

durée : 3h00.

## Sans documents et sans appareils électroniques

Le barème est donné à titre indicatif

## Exercice 1 (7 points)

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible dont les éléments diagonaux sont non nuls et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$.
On rappelle que si $\mathbb{G} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors

$$\left(\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n, \lim_{k\to\infty} \mathbb{G}^k \boldsymbol{v} = 0\right) \iff \rho(\mathbb{G}) < 1. \tag{1}$$

**Q. 1** *On décompose $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$ avec $\mathbb{M}$ inversible et on pose*

$$\mathbb{B} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N} \quad et \quad \boldsymbol{c} = \mathbb{M}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

*On définit la suite $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ par*

$$\boldsymbol{x}^{[0]} \in \mathbb{C}^n \quad et \quad \boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{c} \tag{2}$$

*et on note $\underline{\boldsymbol{x}} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.*

- ***a**. Rappeler la définition de $\rho(\mathbb{B})$, rayon spectral de la matrice $\mathbb{B}$.*
- ***b**. Montrer que*
$$\underline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}(\underline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{[k]}).$$
- ***c**. En déduire que la suite $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\underline{\boldsymbol{x}}$ quelque soit $\boldsymbol{x}^{[0]}$ si et seulement si $\rho(\mathbb{B}) < 1$.*

On décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$, où $\mathbb{D}$ représente la diagonale de $\mathbb{A}$, $-\mathbb{E}$ la partie triangulaire inférieure stricte et $-\mathbb{F}$ la partie triangulaire supérieure stricte.

**Q. 2** *Pour la méthode itérative de Jacobi, la matrice d'itération est $\mathbb{J} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{D}^{-1}(\mathbb{E} + \mathbb{F})$.*

- ***a**. Donner $\boldsymbol{c}$, en fonction de $\boldsymbol{b}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{E}$ et/ou $\mathbb{F}$, pour que cette méthode s'écrive sous la forme itérative (2).*
- ***b**. En déduire, sans citer le cours et en utilisant **Q. 1**, que $\rho(\mathbb{J}) < 1$ est une condition nécessaire et suffisante pour obtenir la convergence de la suite des itérés vers $\underline{\boldsymbol{x}}$.*

**Q. 3** *Pour la méthode itérative de Gauss-Seidel, la matrice d'itération est $\mathcal{L}_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}$.*

- ***a**. Donner $\boldsymbol{c}$, en fonction de $\boldsymbol{b}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{E}$ et/ou $\mathbb{F}$, pour que cette méthode s'écrive sous la forme itérative (2).*
- ***b**. En déduire, sans citer le cours et en utilisant **Q. 1**, que $\rho(\mathcal{L}_1) < 1$ est une condition nécessaire et suffisante pour obtenir la convergence de la suite des itérés vers $\underline{\boldsymbol{x}}$.*

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$. On définit la matrice $\mathbb{A}_\alpha$ par

$$\mathbb{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

**Q. 4** *Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur $\alpha$, pour que la matrice $\mathbb{A}_\alpha$ soit inversible.*

**Q. 5** *Les méthodes itératives de Jacobi et de Gauss-Seidel sont-elles bien définies pour $\mathbb{A}_\alpha$ ?*

**Q. 6** *Etudier la convergence de la méthode de Jacobi pour la résolution de $\mathbb{A}_\alpha\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*

**Q. 7** *Etudier la convergence de la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution de $\mathbb{A}_\alpha\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*

## PROBLÈME 1 (13 POINTS)

Soit $f$ une fonction définie sur $[0;1]$ à valeurs réelles. On souhaite approcher $\int_0^1 f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f)$ une formule de quadrature élémentaire

$$\mathcal{Q}_n(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \tag{1}$$

où $n \in \mathbb{N}$, $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[0;1]$ et $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels.

**Q. 1** *Soit $k \in \mathbb{N}$.*

**a.** *Donner la définition de: $\mathcal{Q}_n(f)$ est de degré d'exactitude $k$ au moins.*

**b.** *Montrer que l'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f)$ est linéaire.*

**c.** *Montrer que si $\mathcal{Q}_n$ est de degré d'exactitude $k$ au moins alors*

$$\forall r \in [\![0,k]\!], \quad \sum_{i=0}^{n} w_i x_i^r = \frac{1}{r+1}. \tag{2}$$

**d.** *Montrer que si (2) est vérifiée alors $\mathcal{Q}_n$ est de degré d'exactitude $k$ au moins.*

**e.** *En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les $(w_i)_{i=0}^n$ pour que $\mathcal{Q}_n$ soit de degré d'exactitude 0 au moins.*

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$\mathbb{A}_{i,j} = x_{i-1}^{j-1}, \ \forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!],$$

et $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_{n+1})^t \in \mathbb{R}^{n+1}$. On note $\mathrm{P}_{\boldsymbol{u}}$ le polynôme défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}_{\boldsymbol{u}}(x) = \sum_{i=0}^{n} u_{i+1} x^i.$$

**Q. 2** **a.** *Soient $\boldsymbol{b} \stackrel{\mathsf{def}}{=} \mathbb{A}\boldsymbol{u}$ le vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $i \in [\![1, n+1]\!]$. Exprimer $b_i$, la $i$-ème composante de $\boldsymbol{b}$, en fonction de $\mathrm{P}_{\boldsymbol{u}}$ et de $x_{i-1}$.*

**b.** *En déduire que la matrice $\mathbb{A}$ est inversible (indication: montrer que son noyau est réduit à l'élément nul...).*

**c.** *On définit $\boldsymbol{W} \stackrel{\mathsf{def}}{=} (w_0, \ldots, w_n)^t \in \mathbb{R}^{n+1}$. En utilisant (2), montrer que $\mathcal{Q}_n$ est de degré d'exactitude $n$ au moins si et seulement si*

$$(\mathbb{A}^t)\boldsymbol{W} = \boldsymbol{c} \tag{3}$$

*où l'on explicitera le vecteur $\boldsymbol{c}$.*

**d.** **(algo.)** *Ecrire la fonction algorithmique* `Poids` *retournant l'ensemble des poids $(w_i)_{i=0}^n$ pour un ensembre de points $(x_i)_{i=0}^n$ donnés, distincts 2 à 2 tels que la formule de quadrature élémentaire $\mathcal{Q}_n$ soit de degré d'exactitude $n$ au moins. On pourra utiliser pour cela la fonction $\boldsymbol{v} \leftarrow$ `Solve`$(\mathbb{B}, \boldsymbol{g})$ resolvant le système linéaire $\mathbb{B}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}$, où $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est une matrice inversible, $\boldsymbol{g}$ et $\boldsymbol{v}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^d$.*

Les points $(x_i)_{i=0}^n$ étant les points de la formule de quadrature élémentaire $\mathcal{Q}_n$, le **polynôme d'interpolation de Lagrange** associé aux $(n+1)$ couples $(x_i, f(x_i))_{i\in[\![0,n]\!]}$, noté $\mathcal{L}_n(f)$, est donné par

$$\mathcal{L}_n(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathrm{L}_i(x), \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{4}$$

avec

$$\mathrm{L}_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \ \forall i \in [\![0,n]\!], \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([0;1];\mathbb{R})$ alors, $\forall x \in [0,1]$, $\exists \xi_x \in (min(x_i, x), max(x_i, x))$,

$$f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\pi_n(x) \tag{6}$$

où $\pi_n(x) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

**Q. 3** ***a***. *Déterminer explicitement* $L_i(x_j)$, $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]$.

***b***. *Quels sont les degrés des polynômes* $L_i$, $i \in [\![0,n]\!]$?

***c***. *Montrer que* $\mathcal{Q}_n$ *est de degré d'exactitude* $n$ *au moins si et seulement si*

$$w_i = \int_0^1 L_i(x)dx, \quad \forall i \in [\![0,n]\!]. \tag{7}$$

***d***. *Montrer que si* $\mathcal{Q}_n$ *est de degré d'exactitude* $n$ *au moins alors*

$$\int_0^1 \mathcal{L}_n(f)(x)dx = \mathcal{Q}_n(f). \tag{8}$$

***e***. *On suppose que* $\mathcal{Q}_n$ *est de degré d'exactitude* $n$ *au moins et que* $f \in \mathcal{C}^{n+1}([0;1];\mathbb{R})$. *Montrer que*

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \mathcal{Q}_n(f) \right| \leqslant \frac{\left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty}{(n+1)!} \int_0^1 |\pi_n(x)|dx. \tag{9}$$

On admet le résultat suivant:
**Prop. 1 :** *Soit* $k \in \mathbb{N}^*$. *Si* $\mathcal{Q}_n$, *définie en* (1), *est de degré d'exactitude* $n$ *au moins alors* $\mathcal{Q}_n$ *est de degré d'exactitude* $(n+k)$ *au moins si et seulement si*

$$\int_0^1 \pi_n(x)x^r dx = 0, \quad \forall r \in [\![0,k-1]\!]. \tag{10}$$

*Le degré maximum d'exactitude de* $\mathcal{Q}_n$ *est* $(2n+1)$. □

**Q. 4** ***Application avec*** $n = 1$

***a***. *En utilisant la proposition précédente, déterminer les points* $x_0$ *et* $x_1$, $x_0 < x_1$ *pour que la formule de quadrature élémentaire* $\mathcal{Q}_1$ *puisse être de degré d'exactitude* 3.
*Indication: on pourra introduire les variables auxiliaires* $X = x_0 + x_1$ *et* $Y = x_0 x_1$.

***b***. *En déduire, à l'aide de* (3) *ou de* (7), *les poids* $w_0$ *et* $w_1$ *pour que la formule soit de dégré d'exactitude* 3.

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & 0 & c_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_n & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } c_k = \sqrt{\frac{k^2}{4k^2-1}}. \tag{11}$$

On admet que ses valeurs propres $(\lambda_i)_{i=0}^n$ sont réelles et que

$$-1 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < 1.$$

**Par la suite, on choisit les** $(n+1)$ **points de** $\mathcal{Q}_n$ **comme étant** $x_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda_i$, $i \in [\![0,n]\!]$. **Les** $(n+1)$ **poids de** $\mathcal{Q}_n$ **sont alors donnés par** (7) **et** $\mathcal{Q}_n$ **est alors de degré d'exactitude** $(2n+1)$.

On suppose que l'on dispose de la fonction algorithmique $\boldsymbol{\lambda} \leftarrow \texttt{Eig}(\mathbb{H})$ retournant l'ensemble des valeurs propres d'une matrice symétrique $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ dans l'ordre croissant sous la forme d'un vecteur $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^d$.

**Q. 5 (algo.)** ***a***. *Ecrire la fonction* $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}] \leftarrow \texttt{PointsPoids}(n)$ *retournant le tableau des points* $\boldsymbol{x}$ *et le tableau des poids* $\boldsymbol{w}$ *associés à* $\mathcal{Q}_n$. *On pourra utiliser, au besoin, les fonctions algorithmes déjà écrites. Attention, les points sont ici dans l'intervalle* $[0;1]$.

***b***. *Ecrire la fonction* $I \leftarrow \texttt{QuadElem}(g,n)$ *retournant une approximation de* $\int_0^1 g(x)dx$ *en utilisant la formule de quadrature élémentaire à* $(n+1)$ *points sur l'intervalle* $[0,1]$ *de degré d'exactitude* $(2n+1)$. *On pourra utiliser, au besoin, les fonctions algorithmes déjà écrites.*

***c***. *Proposer un programme permettant de tester/valider le degré d'exactitude de la fonction précédente.*