

Exercice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note

$$\|A\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1}$$

la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|\bullet\|_1$.

Q. 1 *Montrer que*

$$\sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{x}\|_1 = 1}} \|A\mathbf{x}\|_1 \leq \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|.$$

Q. 2 *1. Déterminer un $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, $\|\mathbf{y}\|_1 = 1$ tel que*

$$\|A\mathbf{y}\|_1 = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|.$$

2. Conclure.

Q. 1 Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$. On a

$$\begin{aligned}\|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^n |(\mathbb{A}\mathbf{x})_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}x_j| = \sum_{j=1}^n \left(|x_j| \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \\ &\leq \left(\max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad \text{car } \|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j| = 1.\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{x}\|_1 = 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_1 \leq \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

Q. 2 1. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que

$$\sum_{i=1}^n |a_{i,k}| = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|.$$

On a

$$\|\mathbb{A}\mathbf{y}\|_1 = \sum_{i=1}^n |(\mathbb{A}\mathbf{y})_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j \right|.$$

Pour obtenir

$$\sum_{i=1}^n |a_{i,k}| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j \right|$$

on prend $y_j = \delta_{k,j}$, $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, c'est à dire $\mathbf{y} = \mathbf{e}_k$ le $k^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique. Dans ce cas on a $\|\mathbf{y}\|_1 = 1$

et

$$\begin{aligned}\|\mathbb{A}\mathbf{y}\|_1 &= \|\mathbb{A}\mathbf{e}_k\|_1 = \|\mathbb{A}_{:,k}\|_1 \\ &= \sum_{i=1}^n |a_{i,k}| = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|.\end{aligned}$$

2. D'après la proposition/définition des normes matricielles subordonnées, on a

$$\|\mathbb{A}\|_1 = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{x}\|_1=1}} \|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_1.$$

En utilisant les résultats de **Q.1** et **Q.2**, on obtient

$$\|\mathbb{A}\|_1 = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|.$$



◇