

Exercice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note

$$\|A\|_{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_{\infty}}{\|\mathbf{x}\|_{\infty}}$$

la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|\bullet\|_{\infty}$.

Q. 1 *Montrer que*

$$\sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{x}\|_{\infty} = 1}} \|A\mathbf{x}\|_{\infty} \leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

Q. 2 *1. Déterminer un $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, $\|\mathbf{y}\|_{\infty} = 1$ tel que*

$$\|A\mathbf{y}\|_{\infty} = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

2. Conclure.

Q. 1 Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$. On a

$$\begin{aligned}\|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_\infty &= \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |(\mathbb{A}\mathbf{x})_i| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \\ &\leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \\ &\leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \quad \text{car } |x_j| \leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i| = \|\mathbf{x}\|_\infty = 1.\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{x}\|_\infty = 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_\infty \leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

Q. 2 1. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que

$$\sum_{j=1}^n |a_{k,j}| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

On a, pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$,

$$\|\mathbb{A}\mathbf{y}\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |(\mathbb{A}\mathbf{y})_i| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j \right|.$$

On va construire un vecteur $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, $\|\mathbf{y}\|_\infty = 1$, tel que

$$\max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{k,j}|.$$

On sait déjà que, si $\|\mathbf{y}\|_\infty = 1$,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{k,j}|.$$

On va donc construire $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, $\|\mathbf{y}\|_\infty = 1$, de telle sorte que

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{k,j} y_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{k,j}|.$$

Il suffit pour cela de prendre,

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad y_j = \begin{cases} \frac{|a_{k,j}|}{a_{k,j}} & \text{si } a_{k,j} \neq 0 \\ 1 & \text{si } a_{k,j} = 0 \end{cases}.$$

et on a bien $\|\mathbf{y}\|_\infty = 1$. On a alors

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{k,j} y_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{k,j}| \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{k,j}|$$

et donc

$$\|\mathbb{A}\mathbf{y}\|_\infty = \sum_{j=1}^n |a_{k,j}| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

2. D'après la proposition/définition des normes matricielles subordonnées, on a

$$\|\mathbb{A}\|_\infty = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{x}\|_\infty = 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_\infty.$$

En utilisant les résultats de **Q.1** et **Q.2**, on obtient

$$\|\mathbb{A}\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

◇

