

Exercice

Etant donné une norme vectorielle $\|\bullet\|$ sur \mathbb{K}^n , on définit l'application $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ par

$$\|\mathbb{A}\|_s \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad (\text{P-1})$$

Q. 1 Montrer que $\|\mathbb{I}\|_s = 1$.

On note $\mathcal{B} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n ; \|\mathbf{v}\| \leq 1\}$ la boule unité de \mathbb{K}^n et $\mathcal{S} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n ; \|\mathbf{v}\| = 1\}$ la sphère unité de \mathbb{K}^n .

Q. 2 1. Montrer que \mathcal{B} et \mathcal{S} sont des compacts.

2. Montrer que

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \quad (\text{P-2})$$

3. En déduire que

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{B}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \quad (\text{P-3})$$

4. En déduire que l'application $\|\bullet\|_s$ est bien définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ i.e. $\forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|\mathbb{A}\|_s < +\infty$.

Q. 3 1. Montrer

$$\|\mathbb{A}\|_s \leq \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \}.$$

2. Montrer qu'il existe $\mathbf{w} \in \mathcal{S}$ tel que $\|\mathbb{A}\|_s = \|\mathbb{A}\mathbf{w}\|$.

3. En déduire que

$$\|\mathbb{A}\|_s = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \}. \quad (\text{P-4})$$

Q. 4 1. Montrer que $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n, \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{v}\|$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Montrer qu'il existe $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\|\mathbf{u}\| = |\lambda|$ vérifiant

$$\|\mathbb{A}\mathbf{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{u}\|.$$

Q. 5 Montrer que $\|\bullet\|_s$ est une norme matricielle.

Correction Exercice

Q. 1 On a immédiatement

$$\|\mathbb{I}\|_s = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{I}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = 1.$$

Q. 2 1. Les ensembles \mathcal{B} et \mathcal{S} sont des compacts car image réciproque de l'application continue $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\|$ par le fermé borné $[0, 1]$ (pour la boule) et le singleton $\{1\}$ (pour la sphère).

2. On a

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \left\| \mathbb{A} \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \right\| = \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{u}\|$$

3. Comme $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ on a aussi

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{B}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \geq \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|. \quad (\text{P-5})$$

On peut aussi remarquer que

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{B}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathcal{B} \\ \mathbf{v} \neq 0}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \quad (\text{P-6})$$

De plus, $\forall \mathbf{w} \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$, en posant $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \in \mathcal{S}$, on a $\mathbf{w} = \|\mathbf{w}\| \mathbf{u}$ et

$$\|\mathbb{A}\mathbf{w}\| = \|\mathbf{w}\| \|\mathbb{A}\mathbf{u}\| \leq \|\mathbb{A}\mathbf{u}\| \text{ car } \|\mathbf{w}\| \leq 1.$$

Or on a

$$\|\mathbb{A}\mathbf{u}\| \leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|.$$

et on obtient alors

$$\sup_{\substack{\mathbf{w} \in \mathcal{B} \\ \mathbf{w} \neq 0}} \|\mathbb{A}\mathbf{w}\| \leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|.$$

En utilisant (P-5) et (P-6), on en déduit

$$\sup_{\mathbf{w} \in \mathcal{B}} \|\mathbb{A}\mathbf{w}\| = \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{u}\|.$$

4. L'application $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|$ est continue donc son sup sur la sphère unitée qui est compacte est atteint.

Q. 3 1. Comme $\|\bullet\|_s$ est bien définie il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $\|\mathbb{A}\|_s \leq \alpha$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $\|\mathbb{A}\|_s \leq \alpha$. On a

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}\|_s \leq \alpha &\Leftrightarrow \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \leq \alpha \\ &\Leftrightarrow \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \leq \alpha, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \\ &\Leftrightarrow \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \\ &\Leftrightarrow \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|\mathbb{A}\|_s \leq \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n\} \quad (\text{P-7})$$

2. Comme \mathcal{S} est compact et l'application $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|$ est continue, il existe $\mathbf{w} \in \mathcal{S}$ tel que

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| = \|\mathbb{A}\mathbf{w}\|.$$

3. On en déduit $\|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{w}\| = \|\mathbb{A}\mathbf{w}\|$ car $\|\mathbf{w}\| = 1$. On a alors

$$\|\mathbb{A}\|_s \in \{\alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n\}$$

et donc

$$\inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n\} \leq \|\mathbb{A}\|_s.$$

On conclut en utilisant (P-7).

Q. 4 1. On a par définition du sup

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{u} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \geq \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}.$$

et donc

$$\|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}.$$

qui est équivalent à

$$\|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n.$$

2. D'après la **Q. 3** 2. ,il existe $\mathbf{w} \in \mathcal{S}$ tel que $\|\mathbb{A}\|_s = \|\mathbb{A}\mathbf{w}\|$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{w} \neq 0$. On a $\|\mathbf{u}\| = |\lambda|$ et

$$\|\mathbb{A}\|_s = \|\mathbb{A}\mathbf{w}\| = \left\| \mathbb{A} \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \right\| = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \|\mathbb{A}\mathbf{u}\| \Leftrightarrow \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{u}\| = \|\mathbb{A}\mathbf{u}\|$$

Q. 5 • $\|\mathbb{A}\|_s = 0 \iff \mathbb{A}_s = \mathbb{O}$?

$\boxed{\Leftarrow}$ trivial.

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}\|_s = 0 &= \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \implies \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \\ &\implies \mathbb{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Soit $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ la base canonique de \mathbb{K}^n . On a alors $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{A}\mathbf{e}_j = \mathbf{0}$ et on en déduit que

$$A_{i,j} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbb{A}\mathbf{e}_j \rangle = 0, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

et donc $\mathbb{A} = \mathbb{O}$.

- Montrons que $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\alpha A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel) et

$$\begin{aligned}\|\alpha A\|_s &= \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\alpha A \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{|\alpha| \|A \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad \text{car } \|\alpha \mathbf{u}\| = |\alpha| \|\mathbf{u}\| \\ &= |\alpha| \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|A \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = |\alpha| \|A\|_s.\end{aligned}$$

- Montrons que $\|A + B\|_s \leq \|A\|_s + \|B\|_s$, $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $A + B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel et

$$\begin{aligned}\|A + B\|_s &= \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|(A + B)\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|A\mathbf{v} + B\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \\ &\leq \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|A\mathbf{v}\| + \|B\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad \text{par inégalité triangulaire dans } \mathbb{K}^n \\ &\leq \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|A\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} + \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|B\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \|A\|_s + \|B\|_s.\end{aligned}$$

- Montrons que $\|AB\|_s \leq \|A\|_s \|B\|_s$, $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par définition du produit matriciel et

$$\begin{aligned}\|AB\|_s &= \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|(AB)\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|A(B\mathbf{v})\|}{\|\mathbf{v}\|} \\ &\leq \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|A\|_s \|B\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad \text{car } \|A\mathbf{u}\| \leq \|A\|_s \|\mathbf{u}\| \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{K}^n \\ &\leq \|A\|_s \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|B\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \|A\|_s \|B\|_s.\end{aligned}$$

