

Proposition

Etant donné une norme vectorielle $\|\bullet\|$ sur \mathbb{K}^n , l'application $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|\mathbb{A}\|_s \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad (\text{P-1})$$

est une norme matricielle, appelée **norme matricielle subordonnée** (à la norme vectorielle donnée). Elle vérifie

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \|\mathbf{v}\| \leq 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \|\mathbf{v}\| = 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \}. \quad (\text{P-2})$$

De plus, pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ on a

$$\|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{v}\| \quad (\text{P-3})$$

et il existe au moins un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que

$$\|\mathbb{A}\mathbf{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{u}\|. \quad (\text{P-4})$$

Soit \mathbb{I} la matrice identité d'ordre n , on a

$$\|\mathbb{I}\|_s = 1. \quad (\text{P-5})$$

Proof. On note $\mathcal{B} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n ; \|\mathbf{v}\| \leq 1\}$ la boule unitée de \mathbb{K}^n et $\mathcal{S} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n ; \|\mathbf{v}\| = 1\}$ la sphère unitée de \mathbb{K}^n . On note que les ensembles \mathcal{B} et \mathcal{S} sont des compacts car image réciproque de l'application continue $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\|$ par le fermé borné $[0, 1]$ (pour la boule) et le singleton $\{1\}$ (pour la sphère).

- Vérifions que les égalités suivantes sont vraies :

$$\|\mathbb{A}\|_s \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{B}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|$$

On a

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \left\| \mathbb{A} \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \right\| = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|$$

Comme $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ on a aussi

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{B}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \geq \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|. \quad (\text{P-6})$$

On peut aussi remarquer que

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{B}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathcal{B} \\ \mathbf{v} \neq 0}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \quad (\text{P-7})$$

De plus, $\forall \mathbf{w} \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$, en posant $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \in \mathcal{S}$. on a $\mathbf{w} = \|\mathbf{w}\| \mathbf{u}$ et

$$\|\mathbb{A}\mathbf{w}\| = \|\mathbf{w}\| \|\mathbb{A}\mathbf{u}\| \leq \|\mathbb{A}\mathbf{u}\| \text{ car } \|\mathbf{w}\| \leq 1.$$

Or on a

$$\|\mathbb{A}\mathbf{u}\| \leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|.$$

et on obtient alors

$$\sup_{\substack{\mathbf{w} \in \mathcal{B} \\ \mathbf{w} \neq 0}} \|\mathbb{A}\mathbf{w}\| \leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|.$$

En utilisant (P-6) et (P-7), on en déduit

$$\sup_{\mathbf{w} \in \mathcal{B}} \|\mathbb{A}\mathbf{w}\| = \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{u}\|.$$

- Vérifions que l'application $\|\bullet\|_s$ est bien définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ i.e. $\forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|\mathbb{A}\|_s < +\infty$.

L'application $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|$ est continue donc son sup sur la sphère unité qui est compacte est atteint.

- Montrons que $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n, \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{v}\|$.

On a par définition du sup

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{u} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \geq \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}.$$

et donc

$$\|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}.$$

- Montrons qu'il existe $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\mathbf{u} \neq 0 \quad \text{et} \quad \|\mathbb{A}\mathbf{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{u}\|.$$

On a

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|$$

La sphère unité étant compacte et l'application $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|$ étant continue, il existe $\mathbf{w} \in \mathcal{S}$ tel que $\|\mathbb{A}\|_s = \|\mathbb{A}\mathbf{w}\|$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{w} \neq 0$. On a $\|\mathbf{u}\| = |\lambda|$ et

$$\|\mathbb{A}\|_s = \|\mathbb{A}\mathbf{w}\| = \left\| \mathbb{A} \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \right\| = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \|\mathbb{A}\mathbf{u}\|.$$

- On a immédiatement

$$\|\cdot\|_s = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = 1.$$

- Montrons que $\|\cdot\|_s$ est une norme matricielle.

$$1. \quad \|\mathbb{A}\|_s = 0 \iff \mathbb{A}_s = \mathbb{O} ?$$

$$\boxed{\Longleftarrow} \text{ trivial.}$$

$$\boxed{\Longrightarrow} \text{ Soit } \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}\|_s = 0 &= \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \implies \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \\ &\implies \mathbb{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Soit $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ la base canonique de \mathbb{K}^n . On a alors $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{A}\mathbf{e}_j = \mathbf{0}$ et on en déduit que

$$A_{i,j} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbb{A}\mathbf{e}_j \rangle = 0, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

et donc $\mathbb{A} = \mathbf{0}$.

2. Montrons que $\|\alpha\mathbb{A}\| = |\alpha| \|\mathbb{A}\|, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$.

Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\alpha\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel) et

$$\begin{aligned} \|\alpha\mathbb{A}\|_s &= \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\|\alpha\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{|\alpha| \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad \text{car } \|\alpha\mathbf{u}\| = |\alpha| \|\mathbf{u}\| \\ &= |\alpha| \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = |\alpha| \|\mathbb{A}\|_s. \end{aligned}$$

3. Montrons que $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\|_s \leq \|\mathbb{A}\|_s + \|\mathbb{B}\|_s, \quad \forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

Soient \mathbb{A} et \mathbb{B} deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\mathbb{A} + \mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel et

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A} + \mathbb{B}\|_s &= \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\|(\mathbb{A} + \mathbb{B})\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v} + \mathbb{B}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \\ &\leq \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\| + \|\mathbb{B}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad \text{par inégalité triangulaire dans } \mathbb{K}^n \\ &\leq \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} + \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\|\mathbb{B}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \|\mathbb{A}\|_s + \|\mathbb{B}\|_s. \end{aligned}$$

4. Montrons que $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\|_s \leq \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbb{B}\|_s, \quad \forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2.$

Soient \mathbb{A} et \mathbb{B} deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\mathbb{A}\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par définition du produit matriciel et

$$\begin{aligned}\|\mathbb{A}\mathbb{B}\|_s &= \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|(\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbf{v})\|}{\|\mathbf{v}\|} \\ &\leq \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\|_s \|\mathbb{B}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad \text{car } \|\mathbb{A}\mathbf{u}\| \leq \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{u}\| \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{K}^n \\ &\leq \|\mathbb{A}\|_s \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{B}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbb{B}\|_s.\end{aligned}$$

□

