

Exercice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ une matrice et (λ, \mathbf{u}) un élément propre de A avec $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$.

Q. 1 En s'aidant de la base canonique $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, construire une base orthonormée $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ telle que $\mathbf{x}_1 = \mathbf{u}$.

Notons P la matrice de changement de base canonique $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ dans la base $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$:

$$P = \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \mathbf{x}_1 & \dots & \mathbf{x}_n \\ & & \end{array} \right)$$

Soit B la matrice définie par $B = P^*AP$.

Q. 2 1. Exprimer les coefficients de la matrice B en fonction de la matrice A et des vecteurs \mathbf{x}_i , $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$B = P^*AP.$$

2. En déduire que la première colonne de B est $(\lambda, 0, \dots, 0)^t$.

Q. 3 Montrer par récurrence sur l'ordre de la matrice que la matrice A s'écrit

$$A = U\mathbb{T}U^*$$

où U est une matrice unitaire et \mathbb{T} une matrice triangulaire supérieure.

Q. 4 En supposant A inversible et la décomposition $A = U\mathbb{T}U^*$ connue, expliquer comment résoudre "simplement" le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Correction Exercice

Q. 1 La première chose à faire est de construire une base contenant \mathbf{u} à partir de la base canonique $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Comme le vecteur propre \mathbf{u} est non nul, il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_j \rangle \neq 0$. La famille $\{\mathbf{u}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{e}_{j+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$ forme alors une base de \mathbb{C}^n car \mathbf{u} n'est pas combinaison linéaire des $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{e}_{j+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

On note $\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n\}$ la base dont le premier élément est $\mathbf{z}_1 = \mathbf{u}$:

$$\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n\} = \{\mathbf{u}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{e}_{j+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}.$$

On peut ensuite utiliser le **procédé de Gram-Schmidt**, rappelé en Proposition B.19, pour construire une base orthonormée à partir de cette base.

On calcule successivement les vecteurs \mathbf{x}_i à partir de la base $\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n\}$ en construisant un vecteur \mathbf{w}_i orthogonal aux vecteurs $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}$.

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{z}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_i \rangle \mathbf{x}_k$$

puis on obtient le vecteur \mathbf{x}_i en normalisant

$$\mathbf{x}_i = \frac{\mathbf{w}_i}{\|\mathbf{w}_i\|}$$

Q. 2 1. En conservant l'écriture colonne de la matrice \mathbb{P} on obtient

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^* \\ \text{---} \\ \mathbf{x}_2^* \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \mathbf{x}_n^* \end{pmatrix} \mathbb{A} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^* \\ \text{---} \\ \mathbf{x}_2^* \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \mathbf{x}_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{A}\mathbf{x}_1 & \mathbb{A}\mathbf{x}_2 & \dots & \mathbb{A}\mathbf{x}_n \end{pmatrix}$$

Ce qui donne

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^* \mathbb{A}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_1^* \mathbb{A}\mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_1^* \mathbb{A}\mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}_2^* \mathbb{A}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2^* \mathbb{A}\mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_2^* \mathbb{A}\mathbf{x}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{x}_n^* \mathbb{A}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_n^* \mathbb{A}\mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n^* \mathbb{A}\mathbf{x}_n \end{pmatrix}$$

On a donc

$$B_{i,j} = \mathbf{x}_i^* \mathbb{A}\mathbf{x}_j, \quad \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$$

2. On a $\mathbb{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, $\|\mathbf{u}\| = 1$, la base $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ est orthonormée et $\mathbf{x}_1 = \mathbf{u}$. on obtient alors

$$\mathbb{B} = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda\mathbf{u}^*\mathbf{u} & \mathbf{u}^*\mathbb{A}\mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{u}^*\mathbb{A}\mathbf{x}_n \\ \hline \lambda\mathbf{x}_2^*\mathbf{u} & \mathbf{x}_2^*\mathbb{A}\mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_2^*\mathbb{A}\mathbf{x}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda\mathbf{x}_n^*\mathbf{u} & \mathbf{x}_n^*\mathbb{A}\mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n^*\mathbb{A}\mathbf{x}_n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & \mathbf{u}^*\mathbb{A}\mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{u}^*\mathbb{A}\mathbf{x}_n \\ \hline 0 & \mathbf{x}_2^*\mathbb{A}\mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_2^*\mathbb{A}\mathbf{x}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \mathbf{x}_n^*\mathbb{A}\mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n^*\mathbb{A}\mathbf{x}_n \end{array} \right)$$

Q. 3 On veut démontrer, par récurrence faible, la proposition suivante pour $n \geq 2$

$(\mathcal{P}_n) \quad \forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists \mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, $\exists \mathbb{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure, telles que $\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*$.

Initialisation : Montrons que (\mathcal{P}_2) est vérifié.

Soit $\mathbb{A}_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Elle admet au moins un élément propre (λ, \mathbf{u}) (voir Proposition B.40 par ex.) avec $\|\mathbf{u}\| = 1$. On peut donc appliquer le résultat de la question précédente : il existe une matrice unitaire $\mathbb{P}_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que la matrice $\mathbb{B}_2 = \mathbb{P}_2\mathbb{A}_2\mathbb{P}_2^*$ ait comme premier vecteur colonne $(\lambda, 0)^t$. La matrice \mathbb{B}_2 est donc triangulaire supérieure et comme \mathbb{P}_2 est unitaire on en déduit

$$\mathbb{A}_2 = \mathbb{P}_2^*\mathbb{B}_2\mathbb{P}_2.$$

On pose $\mathbb{U}_2 = \mathbb{P}_2^*$ matrice unitaire et $\mathbb{T}_2 = \mathbb{B}_2$ matrice triangulaire supérieure pour conclure que la proposition (\mathcal{P}_2) est vraie.

Hérédité : Supposons que (\mathcal{P}_{n-1}) soit vérifiée. Montrons que (\mathcal{P}_n) est vraie.

Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Elle admet au moins un élément propre (λ, \mathbf{u}) (voir Proposition B.40 par ex.) avec $\|\mathbf{u}\| = 1$. On peut donc appliquer le résultat de la question précédente : il existe une matrice unitaire $\mathbb{P}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $\mathbb{B}_n = \mathbb{P}_n\mathbb{A}_n\mathbb{P}_n^*$ s'écrive

$$\mathbb{B}_n = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & \mathbf{c}_{n-1}^* & & \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{A}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

où $\mathbf{c}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})$ et $\mathbb{A}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. Par hypothèse de récurrence, $\exists \mathbb{U}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ unitaire et $\mathbb{T}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telles que

$$\mathbb{A}_{n-1} = \mathbb{U}_{n-1} \mathbb{T}_{n-1} \mathbb{U}_{n-1}^*$$

ou encore

$$\mathbb{T}_{n-1} = \mathbb{U}_{n-1}^* \mathbb{A}_{n-1} \mathbb{U}_{n-1}.$$

Soit $\mathbb{Q}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\mathbb{Q}_n = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right).$$

La matrice \mathbb{Q}_n est unitaire. En effet on a

$$\mathbb{Q}_n \mathbb{Q}_n^* = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1}^* & \\ 0 & & & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \underbrace{\mathbb{U}_{n-1} \mathbb{U}_{n-1}^*}_{=\mathbb{I}_{n-1}} & \\ 0 & & & \end{array} \right) = \mathbb{I}_n.$$

On note \mathbb{T}_n la matrice définie par $\mathbb{T}_n = \mathbb{Q}_n^* \mathbb{B}_n \mathbb{Q}_n$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & \mathbb{U}_{n-1}^* & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{c}_{n-1}^* \\ 0 & \\ \vdots & \mathbb{A}_{n-1} \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & \mathbb{U}_{n-1} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{c}_{n-1}^* \\ 0 & \\ \vdots & \mathbb{U}_{n-1}^* \mathbb{A}_{n-1} \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & \mathbb{U}_{n-1} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{c}_{n-1}^* \mathbb{U}_{n-1}^* \\ 0 & \\ \vdots & \underbrace{\mathbb{U}_{n-1}^* \mathbb{A}_{n-1} \mathbb{U}_{n-1}}_{=\mathbb{T}_{n-1}} \\ 0 & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice \mathbb{T}_n est donc triangulaire supérieure et on a par définition de \mathbb{B}_n

$$\mathbb{T}_n = \mathbb{Q}_n^* \mathbb{P}_n \mathbb{A}_n \mathbb{P}_n^* \mathbb{Q}_n.$$

On note $\mathbb{U}_n = \mathbb{P}_n^* \mathbb{Q}_n$. Cette matrice est unitaire car les matrices \mathbb{Q}_n et \mathbb{P}_n le sont. En effet, on a

$$\mathbb{U}_n \mathbb{U}_n^* = \mathbb{P}_n^* \mathbb{Q}_n (\mathbb{P}_n^* \mathbb{Q}_n)^* = \mathbb{P}_n^* \underbrace{\mathbb{Q}_n \mathbb{Q}_n^*}_{=\mathbb{I}_n} \mathbb{P}_n = \mathbb{P}_n^* \mathbb{P}_n = \mathbb{I}_n.$$

On a $\mathbb{T}_n = \mathbb{U}_n^* \mathbb{A}_n \mathbb{U}_n$ et en multipliant cette équation à gauche par \mathbb{U}_n et à droite par \mathbb{U}_n^* on obtient l'équation équivalente $\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n \mathbb{T}_n \mathbb{U}_n^*$. La propriété (\mathcal{P}_n) est donc vérifiée. Ce qui achève la démonstration.

Q. 4 Résoudre $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est équivalent à résoudre

$$\mathbb{U} \mathbb{T} \mathbb{U}^* \mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{P-1}$$

Comme \mathbb{U} est unitaire, on a $\mathbb{U} \mathbb{U}^* = \mathbb{I}$ et \mathbb{U}^* inversible. Donc en multipliant (P-1) par \mathbb{U}^* on obtient le système équivalent

$$\underbrace{\mathbb{U}^* \mathbb{U}}_{=\mathbb{I}} \mathbb{T} \mathbb{U}^* \mathbf{x} = \mathbb{U}^* \mathbf{b} \iff \mathbb{T} \mathbb{U}^* \mathbf{x} = \mathbb{U}^* \mathbf{b}.$$

On pose $\mathbf{y} = \mathbb{U}^* \mathbf{x}$. Le système précédant se résout en deux étapes

1. on cherche \mathbf{y} solution de $\mathbb{T}\mathbf{y} = \mathbb{U}^*\mathbf{b}$. Comme \mathbb{U} est unitaire on a $\det(\mathbb{U})\det(\mathbb{U}^*) = \det(\mathbb{I}) = 1$ et donc

$$\begin{aligned}\det(\mathbb{A}) &= \det(\mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*) = \det(\mathbb{U})\det(\mathbb{T})\det(\mathbb{U}^*) \\ &= \det(\mathbb{T})\end{aligned}$$

Or \mathbb{A} inversible équivaut à $\det(\mathbb{A}) \neq 0$ et donc la matrice \mathbb{T} est inversible. La matrice \mathbb{T} étant triangulaire supérieure on peut résoudre facilement le système par la *méthode de remontée*.

2. une fois \mathbf{y} déterminé, on résout $\mathbb{U}^*\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Comme \mathbb{U} est unitaire, on obtient directement $\mathbf{x} = \mathbb{U}\mathbf{y}$.

◇

