Analyse Numérique I

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 1ère année / L3 MIM

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2023/09/11

Plan du cours

Résultats connus

Proposition 1.1

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1. $\mathbb{A}$ est inversible,
2. $\operatorname{rank}(\mathbb{A}) = n$,
3. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n,\ \mathbb{A}\boldsymbol{x} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} = 0$, (i.e. $\ker \mathbb{A} = \{0\}$)
4. $\det(\mathbb{A}) \neq 0$,
5. toutes les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont non nulles,
6. il existe $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I}$,
7. il existe $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}$.

Exercice

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, montrer que

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^{\mathsf{t}} = \mathbb{B}^{\mathsf{t}}\mathbb{A}^{\mathsf{t}}, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \tag{1}$$
$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^* = \mathbb{B}^*\mathbb{A}^*, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \tag{2}$$

Exercice

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles. Montrer que $\mathbb{A}\mathbb{B}$ inversible et

$$(\mathbb{A}^{\mathsf{t}})^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^{\mathsf{t}}, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \tag{3}$$
$$(\mathbb{A}^*)^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^*, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \tag{4}$$
$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1} \tag{5}$$
$$(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A} \tag{6}$$

Matrices particulières

Definition 2.1

Une matrice **carrée** $\mathbb{A}$ est :

- **symétrique** si $\mathbb{A}$ est réelle et $\mathbb{A} = \mathbb{A}^{\mathsf{t}}$,
- **hermitienne** si $\mathbb{A} = \mathbb{A}^*$,
- **normale** si $\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A}$,
- **orthogonale** si $\mathbb{A}$ est réelle et $\mathbb{A}\mathbb{A}^{\mathsf{t}} = \mathbb{A}^{\mathsf{t}}\mathbb{A} = \mathbb{I}$,
- **unitaire** si $\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A} = \mathbb{I}$,

Definition

Une matrice carrée $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ est :

- **diagonale** si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$,
- **triangulaire supérieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$,
- **triangulaire inférieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$,
- **triangulaire** si elle est triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure
- **à diagonale dominante** si
$$|a_{ii}| \geqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \tag{7}$$
- **à diagonale strictement dominante** si
$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i \in [\![1, n]\!]. \tag{8}$$

Proposition

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses éléments diagonaux

$\Rightarrow$ Exercice!

Proposition

Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaires inférieures (resp. triangulaires supérieures). Alors la matrice $\mathbb{AB}$ est aussi triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure).
De plus on a

$$(\mathbb{AB})_{i,i} = A_{i,i}B_{i,i}, \ \forall i \in [\![1, n]\!].$$

$\Rightarrow$ Exercice!

Proposition

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure).

- $\mathbb{A}$ est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls (i.e. $A_{i,i} \neq 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$).
- Si $\mathbb{A}$ est inversible alors son inverse est triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure) et

$$(\mathbb{A}^{-1})_{i,i} = \frac{1}{(\mathbb{A})_{i,i}}$$

Matrices blocs

Definition

On appelle **matrice bloc** une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{N,M}$ écrite sous la forme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \mathbb{A}_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbb{A}_{p,1} & \cdots & \mathbb{A}_{p,q} \end{pmatrix}$$

où $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\forall j \in [\![1, q]\!]$, $\mathbb{A}_{i,j}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n_i,m_j}$. On a $N = \sum_{i=1}^{p} n_i$ et $M = \sum_{j=1}^{q} m_j$.

On dit que $\mathbb{A}$ et une matrice **bloc-carrée** si $p = q$ et si tous les blocs diagonaux sont des matrices carrées.

Exercice

Proposer une écriture matrice bloc-carrée de chacune des matrices suivantes:

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{F} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{G} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 8 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Proposition: Multiplication de matrices blocs

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{N,M}$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{M,S}$. Le produit $\mathbb{P} = \mathbb{AB} \in \mathcal{M}_{N,S}$ peut s'écrire sous forme bloc si les matrices $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont *compatibles par blocs* : il faut que le nombre de blocs colonne de $\mathbb{A}$ soit égale au nombre de blocs ligne de $\mathbb{B}$ avec correspondance des dimensions, i.e.:

$$\mathbb{A} = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ \\ n_p \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} m_1 & & m_q \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \mathbb{A}_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbb{A}_{p,1} & \cdots & \mathbb{A}_{p,q} \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad \mathbb{B} = \begin{array}{c} \\ m_1 \\ \\ m_q \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} s_1 & & s_r \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbb{B}_{1,1} & \cdots & \mathbb{B}_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbb{B}_{q,1} & \cdots & \mathbb{B}_{q,r} \end{pmatrix} \end{array}$$

avec $\mathbb{A}_{i,k} \in \mathcal{M}_{n_i,m_k}$ et $\mathbb{B}_{k,j} \in \mathcal{M}_{m_k,s_j}$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $k \in [\![1, q]\!]$ et $j \in [\![1, r]\!]$. La matrice produit $\mathbb{P}$ s'écrit alors sous la forme bloc

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ \\ n_p \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} s_1 & & s_r \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbb{P}_{1,1} & \cdots & \mathbb{P}_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbb{P}_{p,1} & \cdots & \mathbb{P}_{p,r} \end{pmatrix} \end{array}$$

avec $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\forall j \in [\![1, r]\!]$ $\mathbb{P}_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i,s_j}$ et

$$\mathbb{P}_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} \mathbb{A}_{i,k}\mathbb{B}_{k,j}.$$

Exercice

Soient

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:cc:ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ \hdashline 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ et } \mathbb{B} = \left(\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hdashline -1 & -2 \\ -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{array}\right)$$

Utiliser la multiplication par blocs pour calculer $\mathbb{AB}$.

Definition

On dit qu'une matrice bloc-carrée $\mathbb{A}$ est **triangulaire inférieure** (resp. **supérieure**) **par blocs** si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices $\mathbb{A}_{i,j} = \mathbb{0}$ pour $i < j$ (resp. $i > j$). . Elle s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{0} \\ \hdashline \mathbb{A}_{n,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,n} \end{array}\right) \quad \left(\text{resp. } \mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,1} \\ \hdashline \mathbb{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} & \mathbb{A}_{n,n} \end{array}\right)\right).$$

Definition

On dit qu'une matrice bloc-carrée $\mathbb{A}$ est **diagonale par blocs** ou **bloc-diagonale** si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices $\mathbb{A}_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$. Elle s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \hdashline \mathbb{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{0} \\ \hdashline \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} & \mathbb{A}_{n,n} \end{array}\right)$$

Proposition

Soit $\mathbb{A}$ une matrice bloc-carrée décomposée en $n \times n$ blocs, $n \geqslant 2$. Si $\mathbb{A}$ est **bloc-diagonale** ou **triangulaire par blocs** alors son déterminant est le produit des déterminant des blocs diagonaux :

$$\det \mathbb{A} = \prod_{i=1}^{n} \det \mathbb{A}_{i,i} \tag{9}$$

Exercice

Soient $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ et $\mathbb{F} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q.1 *Donner les dimensions des blocs pour que le produit suivant soit possible et effectuer le calcul:*

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{E} & \mathbb{0} \\ \hdashline \mathbb{0} & \mathbb{I}_2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:c} \mathbb{I}_1 & \mathbb{0} \\ \hdashline \mathbb{0} & \mathbb{F} \end{array}\right)$$

où $\mathbb{I}_1$ et $\mathbb{I}_2$ sont des matrices identités.

Q.2 *En déduire le déterminant de $\mathbb{A}$ en fonction des déterminants de $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$.*

Q.3 *Démontrer par récurrence la proposition pour bloc-diagonal.*

Proposition

Soit $\mathbb{A}$ une matrice bloc-carré **inversible** décomposée en $n \times n$ blocs.

- Si $\mathbb{A}$ est **bloc-diagonale** alors son inverse (décomposée en $n \times n$ blocs) est aussi **bloc-diagonale**.
- Si $\mathbb{A}$ est **triangulaire inférieure par blocs** (resp. supérieure) alors son inverse (décomposée en $n \times n$ blocs) est aussi **triangulaire inférieure par blocs** (resp. supérieure).

Dans ces deux cas les blocs diagonaux de la matrice inverse sont les inverses des blocs diagonaux de $\mathbb{A}$. On a donc

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \hdashline \mathbb{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{0} \\ \hdashline \mathbb{0} & \cdots & \circ & \mathbb{A}_{n,n} \end{array}\right) \text{ et } \mathbb{A}^{-1} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}_{1,1}^{-1} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \hdashline \mathbb{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{0} \\ \hdashline \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} & \mathbb{A}_{n,n}^{-1} \end{array}\right)$$

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{0} \\ \hdashline \mathbb{A}_{n,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,n} \end{array}\right) \text{ et } \mathbb{A}^{-1} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}_{1,1}^{-1} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \hdashline \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{0} \\ \hdashline \bullet & \cdots & \bullet & \mathbb{A}_{n,n}^{-1} \end{array}\right)$$

Autres résultats

Exercice:

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ une matrice et $(\lambda, \boldsymbol{u})$ un élément propre de $\mathbb{A}$ avec $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$.

Q.1 *En s'aidant de la base canonique $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, construire une base orthonormée $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ telle que $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{u}$.*

Notons $\mathbb{P}$ la matrice de changement de base canonique $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ dans la base $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$:

$$\mathbb{P} = \left(\begin{array}{c:c:c} \boldsymbol{x}_1 & \ldots & \boldsymbol{x}_n \end{array}\right)$$

Soit $\mathbb{B}$ la matrice définie par $\mathbb{B} = \mathbb{P}^*\mathbb{A}\mathbb{P}$.

Q.2

1. *Exprimer les coefficients de la matrice $\mathbb{B}$ en fonction de la matrice $\mathbb{A}$ et des vecteurs $\boldsymbol{x}_i$, $i \in [\![1, n]\!]$.*

$$\mathbb{B} = \mathbb{P}^*\mathbb{A}\mathbb{P}.$$

2. *En déduire que la première colonne de $\mathbb{B}$ est $(\lambda, 0, \ldots, 0)^t$.*

Q.3 *Montrer par récurrence sur l'ordre de la matrice que la matrice $\mathbb{A}$ s'écrit*

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*$$

où $\mathbb{U}$ est une matrice unitaire et $\mathbb{T}$ une matrice triangulaire supérieure.

Q.4 *En supposant $\mathbb{A}$ inversible et la décomposition $\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*$ connue, expliquer comment résoudre "simplement" le système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*

Théorème 5: Décomposition de Schur

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe une matrice unitaire $\mathbb{U}$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{T}$ telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^* \tag{10}$$

Théorème 6: Réduction de matrices

1. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe une matrice **unitaire** $\mathbb{U}$ telle que $\mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U}$ soit **triangulaire**.
2. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice **normale**. Il existe une matrice **unitaire** $\mathbb{U}$ telle que $\mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U}$ soit **diagonale**.
3. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice **symétrique**. Il existe une matrice **orthogonale** $\mathbb{P}$ telle que $\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P}$ soit **diagonale**.

Proposition 6.1

- une matrice symétrique ou hermitienne est nécessairement normale.
- une matrice orthogonale (resp. unitaire) est nécessairement normale et inversible d'inverse $\mathbb{A}^t$ (resp. $\mathbb{A}^*$).

Definition 6.2

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice **hermitienne**.

- Elle est **définie positive** si
$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle > 0, \ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\} \tag{11}$$
- Elle est **semi définie positive** si
$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle \geqslant 0, \ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\} \tag{12}$$

Exercice

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q.1 *Que peut-on dire de la matrice $\mathbb{A}\mathbb{A}^*$? Et si la matrice $\mathbb{A}$ est inversible?*

Q.2 *Proposer une technique permettant de générer une matrice hermitienne semi-définie positive à partir d'une matrice aléatoire quelconque.*

Q.3 *Proposer une technique permettant de générer une matrice hermitienne définie positive à partir d'une matrice triangulaire inférieure inversible aléatoire.*

Normes vectorielles

Definition

L'application $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ définie pour tout $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ par

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \boldsymbol{u}^t.\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^t.\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^n u_i v_i, \quad \text{si} \quad \mathbb{K} = \mathbb{R} \tag{13}$$

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \boldsymbol{u}^*.\boldsymbol{v} = \overline{\boldsymbol{v}^*.\boldsymbol{u}} = \overline{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle} = \sum_{i=1}^n \overline{u_i} v_i, \quad \text{si} \quad \mathbb{K} = \mathbb{C} \tag{14}$$

est appelée **produit scalaire** euclidien si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, hermitien[a] si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Pour rappeler la dimension de l'espace, on écrit

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle_n .$$

[a] La convention choisie pour le produit scalaire hermitien étant ici : linéarité à droite et semi-linéarité à gauche. Il est aussi possible de définir le produit scalaire hermitien par le complexe conjugué de (14) :

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \boldsymbol{v}^*.\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^n u_i \overline{v_i}.$$

Dans ce cas le produit scalaire est une forme sesquilinéaire à droite.

Definition

Une **norme** sur un espace vectoriel V est une application $\|\bullet\| : V \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes

- $\|\boldsymbol{v}\| = 0 \iff \boldsymbol{v} = 0$,
- $\|\alpha \boldsymbol{v}\| = |\alpha| \, \|\boldsymbol{v}\|, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \forall \boldsymbol{v} \in V$,
- $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leqslant \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|, \ \forall (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in V^2$ (inégalité triangulaire).

Une norme sur V est également appelée **norme vectorielle** . On appelle **espace vectoriel normé** un espace vectoriel muni d'une norme.

Proposition

Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$. Pour tout nombre réel $p \geqslant 1$, l'application $\|\bullet\|_p$ définie par

$$\|\boldsymbol{v}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}$$

est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Normes usitées :

$$\|\boldsymbol{v}\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|, \quad \|\boldsymbol{v}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^2 \right)^{1/2}, \quad \|\boldsymbol{v}\|_\infty = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |v_i| .$$

Lemme 7.1: Inégalité de Cauchy-Schwarz

$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{K}^n$

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2 \, \|\boldsymbol{y}\|_2 . \tag{15}$$

Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**. On a égalité si et seulement si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont colinéaires.

Exercice:

Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$.

Q.1 *Trouver $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\langle \alpha \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle = 0$.*

Q.2 *En calculant $\|\alpha \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2^2$, montrer que*

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2 \, \|\boldsymbol{y}\|_2 . \tag{16}$$

Q.3 *Soit $\boldsymbol{x} \neq 0$. Montrer alors que l'inégalité (16) est une égalité si et seulement si $\boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{x}$.*

Lemme 7.2: Inégalité de Hölder

Pour $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{K}^n$

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q} = \|\boldsymbol{x}\|_p \, \|\boldsymbol{y}\|_q . \tag{17}$$

Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Hölder**.

Exercice:

Q.1 *Soit la fonction $f(t) = (1 - \lambda) + \lambda t - t^\lambda$ avec $0 < \lambda < 1$. Montrer que pour tous $\alpha \geqslant 0$ et $\beta \geqslant 0$ on a*

$$\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leqslant \lambda \alpha + (1 - \lambda)\beta. \tag{18}$$

Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{C}^n$. Soient $p > 1$ et $q > 1$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Q.2 *On pose $\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_p}$ et $\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|_q}$. En utilisant l'inégalite (18), montrer que l'on a l'inégalité*

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leqslant \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |u_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n |v_i|^q = 1. \tag{19}$$

Q.3 *En déduire l'inégalité de Holder suivante*

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_p \, \|\boldsymbol{y}\|_q . \tag{20}$$

Quel est le lien entre l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Cauchy-Schwarz?

Definition 7.3

Deux **normes** $\|\bullet\|$ et $\|\bullet\|'$, définies sur un même espace vectoriel V, sont **équivalentes** s'il exite deux constantes C et C' telles que

$$\|\boldsymbol{x}\|' \leqslant C\,\|\boldsymbol{x}\| \quad \text{et} \quad \|\boldsymbol{x}\| \leqslant C'\,\|\boldsymbol{x}\|' \quad \text{pour tout } \boldsymbol{x} \in V. \tag{21}$$

Proposition

Sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Normes matricielles

Definition 8.1

Une **norme matricielle** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une application $\|\bullet\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ vérifiant

1. $\|\mathbb{A}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{A} = 0$,
2. $\|\alpha\mathbb{A}\| = |\alpha|\,\|\mathbb{A}\|,\ \forall\alpha \in \mathbb{K},\ \forall\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
3. $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\| \leqslant \|\mathbb{A}\| + \|\mathbb{B}\|,\ \forall(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ (inégalité triangulaire)
4. $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|\,\|\mathbb{B}\|,\ \forall(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

Peut-on étendre cette définition sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$?

Proposition: exercice

Etant donné une norme vectorielle $\|\bullet\|$ sur $\mathbb{K}^n$, l'application $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|\mathbb{A}\|_s \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \tag{22}$$

est une norme matricielle, appelée **norme matricielle subordonnée** (à la norme vectorielle donnée).
Elle vérifie

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \|\boldsymbol{v}\|\leqslant 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \|\boldsymbol{v}\|=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha\,\|\boldsymbol{v}\|,\ \forall\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\}. \tag{23}$$

De plus, pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$ on a

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s\,\|\boldsymbol{v}\| \tag{24}$$

et il existe au moins un vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n\backslash\{0\}$ tel que

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s\,\|\boldsymbol{u}\|. \tag{25}$$

Soit $\mathbb{I}$ la matrice identité d'ordre n, on a

$$\|\mathbb{I}\|_s = 1. \tag{26}$$

Théorème 9: $\|\bullet\|_1$: , $\|\bullet\|_\infty$: , $\|\bullet\|_2$:

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\|\mathbb{A}\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|_1}{\|\boldsymbol{v}\|_1} = \max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \tag{27}$$

$$\|\mathbb{A}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|_2}{\|\boldsymbol{v}\|_2} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A})} \tag{28}$$

$$\|\mathbb{A}\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|_\infty}{\|\boldsymbol{v}\|_\infty} = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{29}$$

La norme $\|\bullet\|_2$ est invariante par transformation unitaire :

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I} \Longrightarrow \|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2. \tag{30}$$

Corollaire 9.1

1. Si une matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne,on a $\|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A})$.
2. Si une matrice $\mathbb{A}$ est unitaire, on a $\|\mathbb{A}\|_2 = 1$.

Suites de vecteurs et de matrices

Definition 10.1

Soit V un espace vectoriel muni d'une norme $\|\bullet\|$, on dit qu'une suite $(\boldsymbol{v}_k)$ d'éléments de V **converge vers un élément** $\boldsymbol{v} \in V$, si

$$\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}\| = 0$$

et on écrit

$$\boldsymbol{v} = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{v}_k.$$

Théorème 11: admis

Soit $\mathbb{B}$ une matrice carrée. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_{k\to\infty} \mathbb{B}^k = 0$,
2. $\lim_{k\to\infty} \mathbb{B}^k \boldsymbol{v} = 0$ pour tout vecteur $\boldsymbol{v}$,
3. $\rho(\mathbb{B}) < 1$,
4. $\|\mathbb{B}\| < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée $\|\bullet\|$.

Théorème 12: admis

Soit $\mathbb{B}$ une matrice carrée, et $\|\bullet\|$ une norme matricielle quelconque. Alors

$$\lim_{k\to\infty} \left\|\mathbb{B}^k\right\|^{1/k} = \rho(\mathbb{B}).$$