Analyse Numérique I

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 1ère année / L3 MIM

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2023/12/01

Chapitre VI

Intégration numérique

Plan

Bibliographie

M. Crouzeix and A.L. Mignot.
Analyse numérique des équations différentielles.
Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson, 1992.

J.P. Demailly.
Analyse numérique et équations différentielles.
Grenoble Sciences. EDP Sciences, 2012.

On propose de chercher des approximations de

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

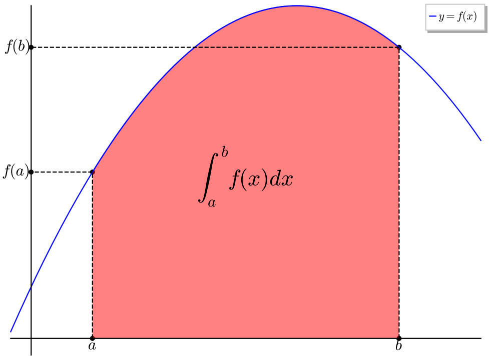


Figure: Représentation de $\int_a^b f(x)dx$ (aire de la surface colorée)

Definition

Soient $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ la **formule de quadrature élémentaire** donnée par :

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \tag{1}$$

avec $\forall j \in [\![0, n]\!]$ $w_j \in \mathbb{R}$ et $x_j \in [a, b]$ distincts deux à deux. L'erreur associée à cette formule de quadrature, notée $\mathcal{E}_{a,b}(f)$, est définie par

$$\mathcal{E}_{a,b}(f) = \int_a^b f(x)dx - \mathcal{Q}_n(f, a, b), \quad \forall f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}) \tag{2}$$

Definition

On dit qu'une formule d'intégration (ou formule de quadrature) est d'ordre p ou a pour **degré d'exactitude** p si elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à p.

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

Proposition:

Soit $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ definie en (1), une formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points.
L'application $f \longmapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie de $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, muni de la norme infini, à valeurs dans $\mathbb{R}$ est linéaire continue.

Proposition:

Soit $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ definie en (1), une formule de quadrature élémentaire à $(n+1)$ points $(x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ (distincts deux à deux dans $[a, b]$).
Alors, $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est de degré d'exactitude k si et seulement si

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r, a, b) = \int_a^b x^r dx, \quad \forall r \in [\![0, k]\!].$$

Plan

Formule du rectangle à gauche

$$f(x) \approx f(a)$$

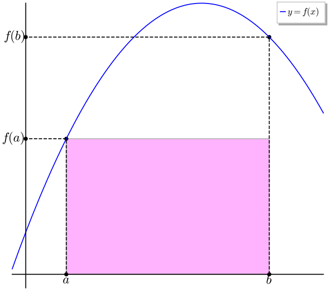


Figure: Formule du rectangle à gauche : $\int_a^b f(x)dx \approx \mathcal{Q}_0(f, a, b) = (b - a)f(a)$ (aire de la surface colorée)

Formule du rectangle à droite

$$f(x) \approx f(b)$$

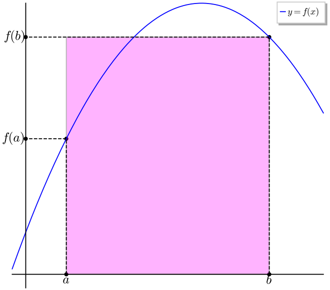


Figure: Formule du rectangle à droite : $\int_a^b f(x)dx \approx \mathcal{Q}_0(f, a, b) = (b-a)f(b)$ (aire de la surface colorée)

Formule du point milieu

$$f(x) \approx f((a+b)/2)$$

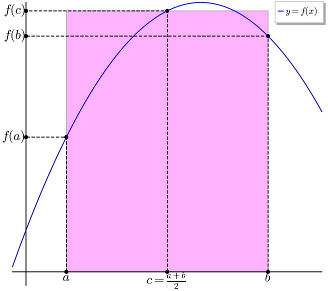


Figure: Formule du point milieu : $\int_a^b f(x)dx \approx \mathcal{Q}_0(f, a, b) = (b-a)f((a+b)/2)$ (aire de la surface colorée)

Exercice 1

Montrer que les formules des rectangles sont de degré d'exactitude 0 et que la formule du point milieu est de degré d'exactitude 1.

La *précision* de ces formules n'est pas bonne!

Comment y remédier?

Exercice 2

Montrer que les formules des rectangles sont de degré d'exactitude 0 et que la formule du point milieu est de degré d'exactitude 1.

La *précision* de ces formules n'est pas bonne!

Comment y remédier?

En approchant la fonction f par des polynômes d'interpolation de degré $\geqslant 1$.

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

Proposition:

Soit $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ definie en (1), une formule de quadrature élémentaire à $(n+1)$ points $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ (distincts deux à deux dans $[a,b]$).
On note $x=\varphi(t)=\alpha+\beta t$, $\beta\in\mathbb{R}^*$, le changement de variable affine, $t_i=\varphi^{-1}(x_i)$, $\forall i\in[\![0,n]\!]$, et

$$\mathcal{Q}_n(g,\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(b)) = \left(\varphi^{-1}(b)-\varphi^{-1}(a)\right)\sum_{i=0}^{n} w_i g(t_i). \qquad (3)$$

Alors $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ est de degré d'exactitude k si et seulement si $\mathcal{Q}_n(g,\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(b))$ est de degré d'exactitude k.

Par ex. $\varphi(t)=a+(b-a)t$, $\varphi(t)=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{b-a}{2}t$.

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

Proposition:

La formule de quadrature élémentaire (1) à $(n+1)$ points est de degré d'exactitude k (au moins) si et seulement si

$$(b-a) \sum_{i=0}^{n} w_i x_i^r = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}, \quad \forall r \in [\![0, k]\!]. \tag{4}$$

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

Proposition:

Soient $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ des points deux à deux distincts de l'intervalle $[a, b]$ donnés. Il existe alors une unique formule de quadrature élémentaire (1) à $(n+1)$ points de degré d'exactitude n au moins.

Exercice 3:

Soient $(x_i)_{i=0}^n$ $(n+1)$ points donnés et distincts 2 à 2 d'un intervalle $[a,b]$ $(a<b)$. Ecrire une fonction algorithmique WeightsFromPoints permettant de déterminer les poids $(w_i)_{i=0}^n$ de telle sorte que la formule de quadrature élémentaire associée soit de degré d'exactitude n au moins en s'inspirant de résultats obtenus dans la démonstration de la Proposition 5.7. On pourra utiliser la fonction algorithmique $\boldsymbol{x} \leftarrow \text{Solve}(\mathbb{A}, \boldsymbol{b})$ permettant de résoudre le système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

$$(b-a)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ \frac{b^2-a^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

Proposition: **Exercice** **ou**

Soit $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ definie en (1), une formule de quadrature élémentaire à $(n+1)$ points (distincts deux à deux).On dit qu'elle est **symétrique** si

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad w_i = w_{n-i}. \tag{5}$$

Dans ce cas si cette formule est exacte pour les polynômes de degré $2m$ alors elle est nécessairement exacte pour les polynômes de degré $2m+1$.

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

Proposition: **Exercice ou**

Soit $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ definie en (1), une formule de quadrature élémentaire à $(n+1)$ points $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ (distincts deux à deux).

La formule de quadrature est de degré d'exactitude n au moins si et seulement si pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, les poids w_i sont donnés par

$$w_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{b-a}\int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}dx = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j}dt, \quad \forall i \in [\![0,n]\!] \tag{6}$$

avec $t_i = (x_i-a)/(b-a)$.

Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$ alors on a

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \mathcal{Q}_n(f,a,b)\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty \int_a^b \left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|dx \tag{7}$$

Exercice 4:

Soient $(x_i)_{i=0}^n$ des points distincts 2 à 2 de l'intervalle $[a, b]$ vérifiant

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

On note $\mathrm{L}_i \in \mathbb{R}_n[X]$, $i \in [\![0, n]\!]$ les $(n+1)$ polynômes de base de Lagrange définis par

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

et vérifiant $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $\forall (i,j) \in [\![0, n]\!]^2$

Q.1 *Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Montrer que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \mathrm{L}_i((a+b) - x) = \mathrm{L}_{n-i}(x).$$

Q.2 *Soient $(w_i)_{i=0}^n$ définis par*

$$w_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b \mathrm{L}_i(t)dt, \quad \forall i \in [\![0, n]\!]$$

Montrer que l'on a alors

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad w_i = w_{n-i}$$

Lemme 1.1

Soient $(x_i)_{i=0}^n$ des points distincts 2 à 2 de l'intervalle $[a, b]$ vérifiant

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Soient $(w_i)_{i=0}^n$ définis par

$$w_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx, \quad \forall i \in [\![0, n]\!]$$

On a alors

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad w_i = w_{n-i}$$

et la formule de quadrature élémentaire associée est de degré d'exactitude au moins n si n est impaire et au moins $n+1$ sinon.

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

Proposition: **Exercice ou**

Soit $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ défini par (1) une formule de quadrature élémentaire de degré d'exactitude au moins n. Elle est alors de degré d'exactitude $n+m$, $m \in \mathbb{N}^*$, au moins si et seulement si

$$\int_a^b \pi_n(x)\mathrm{Q}(x)dx = 0, \ \forall \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{m-1}[X] \tag{8}$$

où π_n est le polynôme de degré $n+1$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i). \tag{9}$$

Le degré maximal d'exactitude d'une formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points est $2n+1$.
De plus, on a

$$(8) \iff \int_a^b \pi_n(x)x^k dx = 0, \ \forall k \in [\![0, m-1]\!]. \tag{10}$$

Avec une **discrétisation régulière** de l'intervalle $[a, b]$:

Méthode de Newton-Cotes.

Bien d'autres méthodes peuvent être obtenues (avec d'autres points), certaines permettant le calcul d'intégrales avec poids de la forme $\int_a^b w(x)f(x)dx$:

- méthode de Newton-Cotes ouvertes,
- méthode de Gauss-Legendre,
- méthode de Gauss-Jacobi,
- méthode de Gauss-Tchebychev,
- méthode de Gauss-Laguerre,
- méthode de Gauss-Hermitte,
- méthode de Gauss-Lobatto,
- méthode de Romberg...

Plan

Proposition

Soient $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ et $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une discrétisation régulière de l'intervalle $[a,b]$: $x_i = a + ih$ avec $h = (b-a)/n$. Les formules de quadrature élémentaires de Newton-Cotes s'écrivent sous la forme

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

où les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont donnés par (6).
Elles sont symétriques et leur degré d'exactitude (d.e. dans le tableau suivant) est égal n si n est impair et $n+1$ sinon.

n	**d.e.**	w_i (poids)									**nom**
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$								trapèze
2	3	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$							Simpson
3	3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$						Newton
4	5	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$					Villarceau
5	5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$				?
6	7	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$			Weddle
7	7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{49}{640}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{49}{640}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$		?
8	9	$\frac{989}{28350}$	$\frac{2944}{14175}$	$-\frac{464}{14175}$	$\frac{5248}{14175}$	$-\frac{454}{2835}$	$\frac{5248}{14175}$	$-\frac{464}{14175}$	$\frac{2944}{14175}$	$\frac{989}{28350}$	?

Table: Méthodes de Newton-Cotes

Par exemple, la formule de Simpson ($n = 2$) est

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right) \tag{11}$$

Calcul des coefficients w_i? :

Par exemple, la formule de Simpson ($n = 2$) est

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right) \tag{11}$$

Calcul des coefficients w_i? : **Méthode 1 :**

Formule doit être exacte pour les monômes $1, X, X^2$: on résoud le système

$$\begin{cases} w_0 + w_1 + w_2 & = & 1, & (f(x) = 1) \\ aw_0 + (a+h)w_1 + (a+2h)w_2 & = & \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = a+h, & (f(x) = x) \\ a^2w_0 + (a+h)^2w_1 + (a+2h)^2w_2 & = & \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx = \frac{1}{3}(3a^2 + 6ah + 4h^2), & (f(x) = x^2). \end{cases}$$

Mais il y a plus simple ...

Par exemple, la formule de Simpson ($n = 2$) est

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right) \tag{11}$$

Calcul des coefficients w_i? : **Méthode 2 :**

Formule doit être exacte pour les monômes $1, X, X^2$ et les w_i ne dépendent pas de l'intervalle $[a, b]$: on peut les calculer sur l'intervalle $[0, 1]$ en résolvant le système

$$\begin{cases} w_0 + w_1 + w_2 & = & 1, & (f(x) = 1) \\ 0 \times w_0 + \frac{1}{2}w_1 + 1 \times w_2 & = & \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}, & (f(x) = x) \\ 0^2 \times w_0 + (\frac{1}{2})^2 \times w_1 + (1)^2 \times w_2 & = & \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}, & (f(x) = x^2). \end{cases}$$

Par exemple, la formule de Simpson ($n = 2$) est

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\Big(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\Big) \tag{11}$$

Calcul des coefficients w_i ? : **Méthode** 3 **:** $\forall i \in [\![0, n]\!]$

$$w_i = \int_0^1 L_i(t)dt, \quad \text{avec } L_i(t) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t - t_j}{t_i - t_j} = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{nt - j}{i - j}$$

$$\begin{aligned}
L_0(t) &= \frac{2t-1}{-1}\frac{2t-2}{-2} = (2\,t-1)(t-1) \\
L_1(t) &= \frac{2t}{1}\frac{2t-2}{-1} = -4\,(t-1)t \\
L_2(t) &= \frac{2t}{2}\frac{2t-1}{1} = (2\,t-1)t
\end{aligned}$$

Par exemple, la formule de Simpson ($n = 2$) est

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right) \tag{11}$$

Degré d'exactitude 3 **:** au moins ordre 3

$$\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5} \neq \frac{1}{6}\left(0^4 + 4(\frac{1}{2})^4 + 1^4\right) = \frac{5}{24}$$

Exercice 5:

Q.1 *Ecrire une fonction algorithmique* $\textsc{WeightsPointsNC}$ *retournant les* $(n+1)$ *points et les* $(n+1)$ *poids de la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes à* $(n+1)$ *points.*

Q.2 *Ecrire une fonction algorithmique* $\textsc{QuadElemNC}$ *retournant la valeur de* $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ *correpondant à la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes à* $(n+1)$ *points.*

Sage http://www.sagemath.org/

```
sage: %paste
var('t')
def BaseLagrange(n,i):
  L=1
  for j in range(n+1):
    if i!=j:
      L=L*(n*t-j)/(i-j)
  return L

def NewtonCotes(n):
  W=[];
  for i in range(n+1):
    W.append(integrate(BaseLagrange(n,i),t,0,1))
  return W

## -- End pasted text --
t
sage: NewtonCotes(3)
[1/8, 3/8, 3/8, 1/8]
sage: NewtonCotes(4)
[7/90, 16/45, 2/15, 16/45, 7/90]
sage: 
```

Problème lorsque n devient grand! : illustration sur un exemple simple.
Soit $f(x) = 3x + 2$, $a = 0$ et $b = 1$.

- Les formules de Newton-Cotes à $(n+1)$ points, $n \geqslant 1$, sont exactes car f est un polynôme de degré 1.
- les poids $(w_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ peuvent être calculés sous forme fractionnaire.

Or x_i et w_i sont approchés à $\approx 1e-16$ près sur ordinateur

$$x_i = i/n \approx \tilde{x}_i \quad \text{et} \quad w_i \approx \tilde{w}_i$$

- **Newton-Cotes exacte** : $\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$
- **Newton-Cotes approchée** : $\sum_{i=0}^{n} \tilde{w}_i f(\tilde{x}_i)$

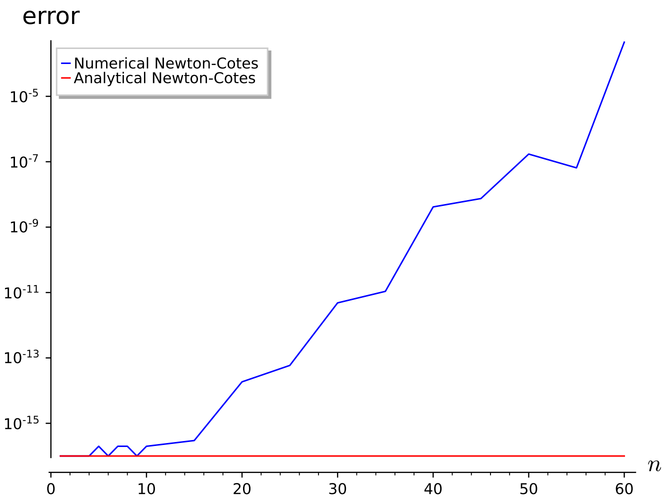


Figure: Instabilité des méthodes de Newton-Cotes élémentaires

Remarque 1

Pour les méthode de Newton-Cotes, il ne faut pas trop "monter" en ordre car le phénomène de Runge (forte oscillation possible du polynôme d'interpolation sur les bords de l'intervalle) peut conduire à de très grandes erreurs. Au delà de $n = 7$, des poids négatifs apparaissent dans les formules et les rendent beaucoup plus sensibles aux erreurs d'arrondis.

Que faire pour pallier ce problème : Sortir couvert![1]

[1] Traduction : utiliser la relation de Chasles

Plan

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

Peut-on avoir une formule de quadrature de degré d'exactitude $2n+1$?

Pour celà il faut déterminer les points $(x_i)_{i=0}^{n}$ appartenant à $[a,b]$ distincts 2 à 2.

Exercice 6:

Q.1 *Déterminer les points* t_0, t_1 *de l'intervalle* $[-1, 1]$ *et les poids* w_0, w_1 *tel que la formule de quadrature*

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx 2\sum_{i=0}^{1} w_i g(t_i)$$

soit de degré d'exactitude 3.

Q.2 *En déduire une formule de quadrature pour le calcul de* $\int_a^b f(x)dx$ *qui soit de degré d'exactitude* 3.

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \overset{\textbf{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

Peut-on avoir une formule de quadrature de degré d'exactitude $2n+1$?

Oui pour $n=1$! Et pour $n>1$?

Pour celà il faut déterminer les points $(x_i)_{i=0}^{n}$ appartenant à $[a, b]$ distincts 2 à 2.
Les **polynômes de Legendre** vont être d'une grande utilité!

Les polynômes de Legendre peuvent être définis par la formule de récurrence de Bonnet

$$(n+1)\mathrm{P}_{n+1}(t) = (2n+1)t\mathrm{P}_n(t) - n\mathrm{P}_{n-1}(t), \;\forall n \geqslant 1 \tag{12}$$

avec $\mathrm{P}_0(t) = 1$ et $\mathrm{P}_1(t) = t$.
On a les propriétés suivantes:

prop.1 le polynôme de Legendre P_n est de degré n,

prop.2 la famille $\{\mathrm{P}_k\}_{k=0}^n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$,

prop.3 pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_m(t)\mathrm{P}_n(t)dt = \frac{2}{2n+1}\delta_{m,n}, \tag{13}$$

ce qui correspond à l'orthogonalité des polynômes de Legendre pour le produit scalaire

$$\langle \mathrm{P}_m, \mathrm{P}_n \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}_m(t)\mathrm{P}_n(t)dt.$$

prop.4 Soit $n \geqslant 1$, P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et ses n racines, notées $(t_i)_{i=0}^n$, sont simples dans $]-1,1[$, c'est à dire

$$\mathrm{P}_n(t) = C \prod_{i=0}^{n-1}(t - t_i), \;C \in \mathbb{R}^*$$

où les t_i sont 2 à 2 distincts (et ordonnés). Les $(n+1)$ racines simples de P_{n+1} sont alors chacunes dans l'un des $(n+1)$ intervalles $]-1, t_0[$, $]t_0, t_1[$, $\ldots$, $]t_{n-2}, t_{n-1}[$, $]t_{n-1}, 1[$.

Proposition: **Exercice** ou

Soit $(t_i)_{i=0}^n$ les $(n+1)$ racines distinctes du polynôme de Legendre de degré $(n+1)$. On note $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_i$, $\forall i \in [\![0, n]\!]$ et w_i les poids donnés par (6). La formule de quadrature élémentaire

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

est appelée la formule de quadrature de Gauss-Legendre. C'est l'unique formule de quadrature élémentaire à $(n+1)$ points ayant pour degré d'exactitude $2n+1$.

n	**exactitude**	w_i (poids)	t_i (points)
0	1	1	0
1	3	$1/2, 1/2$	$-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}$
2	5	$5/18, 8/18, 5/18$	$-\sqrt{3/5}, 0, \sqrt{3/5}$

Table: Méthodes de Gauss-Legendre sur $[-1, 1]$

Théorème:

Soient $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a,b];\mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ la formule de quadrature de Gauss-Legendre définie dans la Proposition 5.13. Alors on a

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \mathcal{Q}_n(f,a,b)\right| \leqslant \frac{\left\|f^{(2n+2)}\right\|_\infty}{(2n+2)!}\int_a^b \pi_n(x)^2 dx \tag{14}$$

où $\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$, les x_i étant les points de la formule de quadrature.

Exercice 7:

L'objectif de cet exercice est de calculer les points et les poids de la formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n+1)$ points. La formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n+1)$ points sur $[-1,1]$ est donnée par

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx 2\sum_{i=0}^{n} w_i g(t_i)$$

où les $(t_i)_{i=0}^n$ sont les $n+1$ racines du polynôme de Legendre $\mathrm{P}_{n+1}(t)$. Cette formule à pour degré d'exactitude $2n+1$.
Soient $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)dt$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et $\|\mathrm{P}\| = \langle \mathrm{P}, \mathrm{P}\rangle^{1/2}$ la norme associée.
Soit M_n le polynôme de Legendre normalisé de degré $(n+1)$, $\mathrm{M}_n = \frac{\mathrm{P}_n}{\|\mathrm{P}_n\|}$. On utilisera les résultats sur les polynômes de Legendre rappelés en cours.

Q.1 *Montrer que*

$$c_{n+1}\mathrm{M}_{n+1}(t) = t\mathrm{M}_n(t) - c_n\mathrm{M}_{n-1}(t), \quad n > 1 \tag{1}$$

avec

$$\mathrm{M}_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}},\ \mathrm{M}_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t \text{ et } c_n = \sqrt{\frac{n^2}{4n^2-1}}$$

On définit le vecteur $\boldsymbol{M}(t)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ par

$$\boldsymbol{M}(t) = (\mathrm{M}_0(t), \ldots, \mathrm{M}_n(t))^t.$$

Q.2 *Montrer que l'on a*

$$t\boldsymbol{M}(t) = \mathbb{A}\boldsymbol{M}(t) + c_{n+1}\mathrm{M}_{n+1}(t)\boldsymbol{e}_{n+1} \tag{2}$$

où l'on explictera la matrice tridiagonale $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ en fonction des coefficients $c_1, \ldots, c_n$. Le vecteur $\boldsymbol{e}_{n+1}$ étant le $(n+1)$-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Q.3 *En déduire que les $(n+1)$ racines distinctes de $\mathrm{M}_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ sont les $(n+1)$ valeurs propres de $\mathbb{A}$.*

Q.4 *Montrer que*

$$2\sum_{k=0}^{n} w_k \mathrm{M}_i(t_k)\mathrm{M}_j(t_k) = \delta_{i,j},\ \forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2 \tag{3}$$

où $\delta_{i,j} = 0$, si $i \neq j$ et $\delta_{i,i} = 1$.

On note $\mathbb{W} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice diagonale, de diagonale $(w_0, \ldots, w_n)$ et $\mathbb{P} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice définie par $\mathbb{P}_{i+1,j+1} = \mathrm{M}_j(t_i)$, $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2$.

Q.5

1. *Montrer que* $2\mathbb{P}^t\mathbb{W}\mathbb{P} = \mathbb{I}$.
2. *En déduire que* $\mathbb{W}^{-1} = 2\mathbb{P}\mathbb{P}^t$.
3. *En déduire que* $\frac{1}{w_i} = 2\sum_{k=0}^{n} (\mathrm{M}_k(t_i))^2$, $\forall i \in [\![0,n]\!]$.

On suppose que l'on dispose de la fonction **algorithmique** $\textsc{eig}(\mathbb{A})$ retournant l'ensemble des valeurs propres d'une matrice symétrique $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dans l'ordre croissant sous la forme d'un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Q.6

1. *Ecrire la fonction* $[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{w}] \leftarrow \textsc{GaussLegendre}(n)$ *retournant le tableau des points* $\boldsymbol{t}$ *et le tableau des poids* $\boldsymbol{w}$ *en utilisant les résultats obtenus dans cet exercice.*
2. *Ecrire la fonction* $I \leftarrow \textsc{QuadElemGaussLegendre}(f, a, b, n)$ *retournant une approximation de* $\int_a^b f(x)dx$ *en utilisant la formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n+1)$ points sur l'intervalle $[a,b]$.*

Plan

Definition 1.2

Soit $(\alpha_i)_{i\in[\![0,k]\!]}$ une subdivison de l'intervalle $[\alpha,\beta]$:

$$\alpha=\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_k=\beta.$$

On a alors

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\sum_{i=1}^{k}\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(x)dx. \tag{15}$$

Soit $\mathcal{Q}_n(g,a,b)$ la formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points d'ordre p donnée par

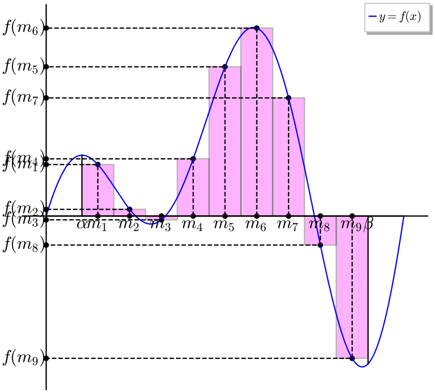
$$\mathcal{Q}_n(g,a,b)\stackrel{\text{def}}{=}(b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j g(x_j)\approx\int_a^b g(x)dx.$$

La **méthode de quadrature composée associée à** $\mathcal{Q}_n$, notée $\mathcal{Q}_{k,n}^{\mathrm{comp}}$, est donnée par

$$\mathcal{Q}_{k,n}^{\mathrm{comp}}(f,\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{k}\mathcal{Q}_n(f,\alpha_{i-1},\alpha_i)\approx\int_\alpha^\beta f(x)dx \tag{16}$$

$\mathcal{Q}_n$ degré d'exactitude $p\Rightarrow\mathcal{Q}_{k,n}^{\mathrm{comp}}$ degré d'exactitude p

Formule composite des points milieux



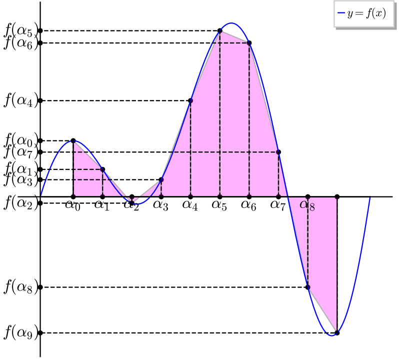
$$\mathcal{Q}_0(g, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) g\left(\frac{a + b}{2}\right)$$

m_j milieu de l'intervalle $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$,

$$m_j = \frac{\alpha_{j-1} + \alpha_j}{2}$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \sum_{j=1}^{k} \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{k} \mathcal{Q}_0(f, \alpha_{j-1}, \alpha_j) = h \sum_{j=1}^{k} f(m_j)$$

Formule composite des trapèzes

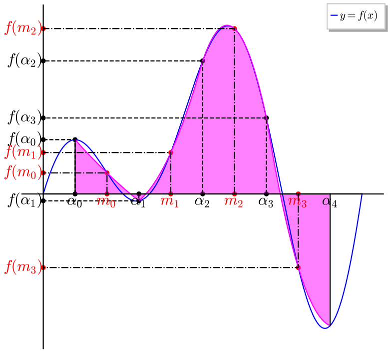


$$\mathcal{Q}_1(g, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b-a}{2}(g(a) + g(b))$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \sum_{j=1}^{k} \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{k} \mathcal{Q}_0(f, \alpha_{j-1}, \alpha_j)$$

$$\approx \frac{h}{2} \sum_{j=1}^{k} (f(\alpha_{j-1}) + f(\alpha_j))$$

Formule composite de Simpson



$$\mathcal{Q}_2(g, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b-a}{6}\left(g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b)\right)$$

m_j milieu de l'intervalle $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$,

$$m_j = \frac{\alpha_{j-1} + \alpha_j}{2}$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \sum_{j=1}^{k} \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{k} \mathcal{Q}_2(f, \alpha_{j-1}, \alpha_j)$$

$$\approx \frac{h}{6}\sum_{j=1}^{k}(f(\alpha_{j-1}) + 4f(m_j) + f(\alpha_j))$$

Exercice 8:

Ecrire une fonction algorithmique QuadSimpson retournant une approximation de l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ utilisant la méthode de quadrature composée de Simpson en **minimisant** le nombre d'appels à la fonction f. On rappelle que la formule élémentaire de Simpson est donnée par

$$\mathcal{Q}_2(g, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b-a}{6}(g(a) + 4g(\frac{a+b}{2}) + g(b)).$$

Plan

$$\mathcal{E}^{\text{comp}}_{\alpha,\beta}(f,\alpha,\beta) \overset{\text{def}}{=} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \mathcal{Q}^{\text{comp}}_{k,n}(f,\alpha,\beta). \tag{17}$$

On a alors

$$\mathcal{E}^{\text{comp}}_{\alpha,\beta}(f) = \sum_{j=1}^{k}\left(\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x)dx - \mathcal{Q}_n(f,\alpha_{j-1},\alpha_j)\right) = \sum_{j=1}^{k}\mathcal{E}_{\alpha_{j-1},\alpha_j}(f)$$

et on a vu que si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$

$$|\mathcal{E}_{a,b}(f)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\max_{x\in[a,b]}|f^{(n+1)}(x)|\int_a^b|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)|dx$$

Si x_i **discrétisation régulière** de $[a,b]$, on peut démontrer (voir [1])

$$\max_{x\in[a,b]}|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)| \leqslant C\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}\log(n)}(b-a)^{n+1}.$$

En notant $h_j = \alpha_j - \alpha_{j-1}$, $h = \max_{j\in[\![1,k]\!]} h_j$ et K_n un majorant de $\max_{x\in[a,b]} |\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)|$

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{E}^{\mathrm{comp}}_{\alpha,\beta}(f)| &\leqslant \sum_{j=1}^{k} |\mathcal{E}_{\alpha_{j-\mathbf{1}},\alpha_j}(f)| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{k} \frac{K_n}{(n+1)!} \max_{x\in[\alpha_{j-\mathbf{1}},\alpha_j]} |f^{(n+1)}(x)| h_j^{n+2} \\
&\leqslant K_n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \max_{x\in[\alpha,\beta]} |f^{(n+1)}(x)| \sum_{j=1}^{k} h_j \\
&\leqslant K_n(\beta-\alpha)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty
\end{aligned}
$$

Mais majoration non optimale!

On vient de montrer, pour Newton-Cotes composées : si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$

$$|\mathcal{E}^{\text{comp}}_{\alpha,\beta}(f)| \leqslant K_n(\beta - \alpha)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty$$

A l'aide des **noyaux de Peano** :

Théorème 2: [1], page 43 (admis)

Soient $\mathcal{Q}^{\text{comp}}_{k,n}$ une méthode de quadrature composée associée à une méthode de quadrature élémentaire $\mathcal{Q}_n$ de degré d'exactitude $p \geqslant n$ et $f \in \mathcal{C}^{p+1}([\alpha, \beta]; \mathbb{R})$. On a alors

$$|\int_\alpha^\beta f(x)dx - \mathcal{Q}^{\text{comp}}_{k,n}(f, \alpha, \beta)| \leqslant C_p(\beta - \alpha)h^{p+1}\left\|f^{(p+1)}\right\|_\infty \tag{18}$$

avec $h = \max_{j \in [\![1,k]\!]}(\alpha_j - \alpha_{j-1})$ et $C_p > 0$. Ceci s'écrit aussi sous la forme

$$|\int_\alpha^\beta f(x)dx - \mathcal{Q}^{\text{comp}}_{k,n}(f, \alpha, \beta)| = \mathcal{O}(h^{p+1}) \tag{19}$$

et son **ordre de convergence** est $p + 1$.

Préssentir l'ordre de convergence? (Trapèze ordre 2 et Simpson ordre 4)

- Pour Simpson: $E(h) = \mathcal{O}(h^4) = Ch^4$
- Pour Trapèze: $E(h) = \mathcal{O}(h^2) = Ch^2$

$$E(h) = Ch^p, \implies E(h/10) = C\left(h/10\right)^p = \frac{E(h)}{10^p}$$

Listing: : Script Matlab/Octave pour illustrer l'ordre des méthodes des Trapèzes et de Simpson

```
f=@(x) cos(x);
F=@(x) sin(x);
a=0;b=pi/2;
Iex=F(b)-F(a);
I1=QuadTrapeze(f,a,b,10);
I2=QuadTrapeze(f,a,b,100);
fprintf('Erreurs Trapeze: (N=10) %.5e - (N=100) %.5e\n',abs(I1-Iex),abs(I2-Iex))
I1=QuadSimpson(f,a,b,10);
I2=QuadSimpson(f,a,b,100);
fprintf('Erreurs Simpson: (N=10) %.5e - (N=100) %.5e\n',abs(I1-Iex),abs(I2-Iex))
```

Output

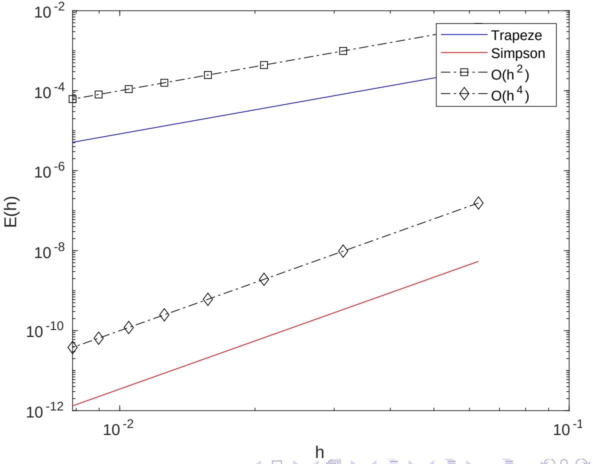
```
Erreurs Trapeze: (N=10) 2.05701e-03 - (N=100) 2.05618e-05
Erreurs Simpson: (N=10) 2.11547e-07 - (N=100) 2.11393e-11
```

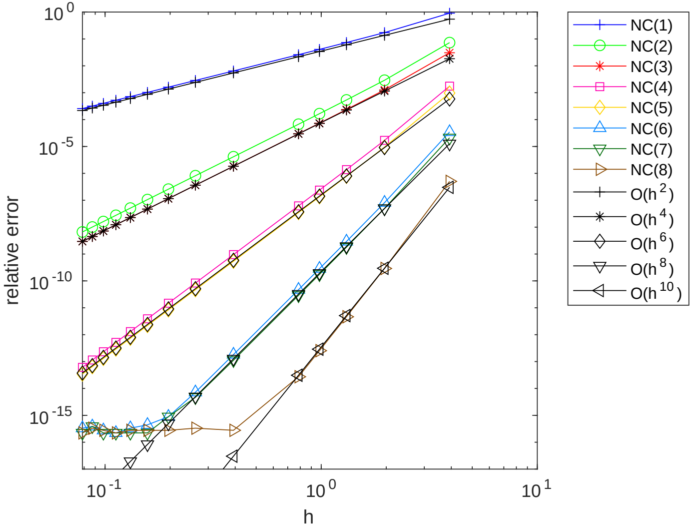
Représenter graphiquement l'ordre de convergence? (Trapèze ordre 2 et Simpson ordre 4)

$$E(h) = Ch^p, \implies \log(E(h)) = \log(C) + p\log(h)$$

En échelle logarithmique, $h \mapsto E(h)$ est une droite de pente p

```
f=@(x) cos(x);
F=@(x) sin(x);
a=0;b=pi/2;
Iex=F(b)-F(a);
LN=25:25:200;
k=1;
for N=LN
  H(k)=(b-a)/N;
  E1(k)=abs(QuadTrapeze(f,a,b,N)-Iex);
  E2(k)=abs(QuadSimpson(f,a,b,N)-Iex);
  k=k+1;
end
loglog(H,E1,'b',H,E2,'r',H,H.^2,'k-.s', ...
       H,0.01*H.^4,'k-.d')
xlabel('h');ylabel('E(h)')
legend('Trapeze','Simpson','O(h^2)','O(h^4)')
```





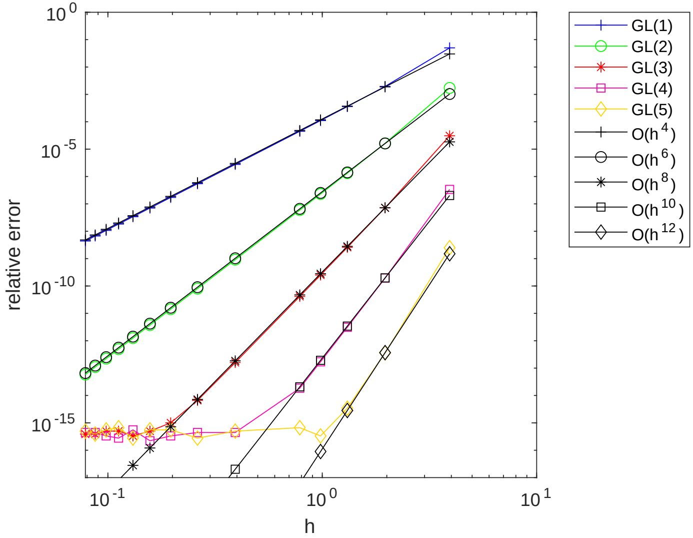
Degré d'exactitude (D.E.) de $\mathtt{NC}(n)$:

n si n impair, $n+1$ sinon.

Ordre de convergence de $\mathtt{NC}(n)$:

D.E. $+ 1$

Figure: Erreur des méthodes de Newton-Cotes composées pour le calcul de $\int_0^{5\pi/2} cos(x)dx$, $\mathtt{NC(n)}$ correspondant à $\mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}$ et $h = \frac{5\pi}{2k}$.



Degré d'exactitude (D.E.) de $\texttt{GL}(n)$:

$$2n+1$$

Ordre de convergence de $\texttt{GL}(n)$:

$$\text{D.E.} + 1 = 2n+2.$$

Figure: Erreur des méthodes de Gauss-Legendre composées pour le calcul de $\int_0^{5\pi/2} cos(x)dx$, $\texttt{GL(n)}$ correspondant à $\mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}$ et $h = \frac{5\pi}{2k}$.

Soit f une application définie sur $[\alpha, \beta]$, on souhaite approcher

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

par une méthode de quadrature composée de Newton-Cotes.

Q.1 *Ecrire une fonction algorithmique* QuadCompNC *retournant une approximation de l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ utilisant la méthode de quadrature composée (k intervalles) de Newton-Cotes (avec localement $n + 1$ points).*

Q.2 *Proposer un exemple simple d'utilisation permettant de tester cette fonction.*

Q.3 *Proposer un exemple de validation de cette fonction par le degré d'exactitude de la méthode.*

Q.4 *Proposer un exemple de validation de cette fonction par l'ordre de convergence de la méthode.*

Soit f une application définie sur $[\alpha, \beta]$, on souhaite approcher

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

par une méthode de quadrature composée de Gauss-Legendre.

Q.5 *Ecrire une fonction algorithmique* QuadCompGL *retournant une approximation de l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ utilisant la méthode de quadrature composée (k intervalles) de Gauss-Legendre (avec localement $n+1$ points).*

Q.6 *Proposer un exemple simple d'utilisation permettant de tester cette fonction.*

Q.7 *Proposer un exemple de validation de cette fonction par le degré d'exactitude de la méthode.*

Q.8 *Proposer un exemple de validation de cette fonction par l'ordre de convergence de la méthode.*

Conclusion

- Il existe un grand nombre d'autres méthodes!
- Intégration en dimensions supérieures?
  - Sur un orthotope (hyperrectangle), généralisation possible.
  - Sur un domaine fermé, borné : méthode des éléments finis
  - Sur une surface ...