Proposition

Soit $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ défini par (5.1) une formule de quadrature élémentaire de degré d'exactitude au moins n. Elle est alors de degré d'exactitude $n+m$, $m \in \mathbb{N}^*$, au moins si et seulement si

$$\int_a^b \pi_n(x)\mathrm{Q}(x)dx = 0, \ \forall \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{m-1}[X] \tag{P-1}$$

où π_n est le polynôme de degré $n+1$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i). \tag{P-2}$$

Le degré maximal d'exactitude d'une formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points est $2n+1$.
De plus, on a

$$\text{(P-1)} \Longleftrightarrow \int_a^b \pi_n(x)x^k dx = 0, \ \forall k \in [\![0, m-1]\!]. \tag{P-3}$$

Proof. On a par définition

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) = (b-a)\sum_{j=1}^{n} w_j f(x_j)$$

où les $n+1$ points x_j sont distincts deux à deux dans l'intervalle $[a,b]$.
La formule de quadrature est exacte pour les polynômes de degré $n+m$ si et seulement si

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx = \mathcal{Q}_n(\mathrm{P},a,b), \ \forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n+m}[X]$$

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n+m}[X]$, on peut effectuer la division euclidienne de P par $\pi_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$. Il existe donc $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$ (quotient) et $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_n[X]$ (reste) tels que

$$\mathrm{P} = \mathrm{Q}\pi_n + \mathrm{R}.$$

On a alors par linéarite de l'intégrale

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx = \int_a^b \mathrm{Q}(x)\pi_n(x)dx + \int_a^b \mathrm{R}(x)dx$$

et par linéarite de $\mathcal{Q}_n$

$$\mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b) = \mathcal{Q}_n(\mathrm{Q}\pi_n, a, b) + \mathcal{Q}_n(\mathrm{R}, a, b).$$

Par hypothèse, la formule de quadrature a pour degré d'exactitude n et comme $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_n[X]$ on obtient

$$\int_a^b \mathrm{R}(x)dx = \mathcal{Q}_n(\mathrm{R}, a, b).$$

On en déduit alors que

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx - \mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b) = \int_a^b \mathrm{Q}(x)\pi_n(x)dx - \mathcal{Q}_n(\mathrm{Q}\pi_n, a, b).$$

Par construction $\pi_n(x_j) = 0$, $\forall j \in [\![0, n]\!]$, ce qui donne

$$\mathcal{Q}_n(\mathrm{Q}\pi_n, a, b) = (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j \mathrm{Q}(x_j)\pi_n(x_j) = 0$$

et donc

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx - \mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b) = \int_a^b \mathrm{Q}(x)\pi_n(x)dx. \tag{P-4}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ si (P-1) est vérifié alors,

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx - \mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b) = 0.$$

La formule de quadrature est donc de degré d'exactitude $n + m$.

$\boxed{\Rightarrow}$ si la formule de quadrature est de degré d'exactitude $n + m$ alors pour tout $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$, le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{Q}\pi_n \in \mathbb{R}_{n+m}[X]$ et donc

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx - \mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b) = 0.$$

En utilisant (P-4), on obtient alors

$$\int_a^b \mathrm{Q}(x)\pi_n(x)dx = 0.$$

- La plus grande valeur que puisse prendre m est $n + 1$ (i.e. $m + n = 2n + 1$). En effet si $m = n + 2$ alors $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ dans (P-1). Or $\pi_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ et en prenant $\mathrm{Q} = \pi_n$ on obtient

$$\int_a^b \pi_n(x)\mathrm{Q}(x)dx = \int_a^b \mathrm{Q}^2(x)dx > 0.$$

- Dans l'équivalence (P-3), $\boxed{\Rightarrow}$ est immédiat car $x \mapsto x^k \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$.
Pour établir l'implication $\boxed{\Leftarrow}$, on utilise la linéarite de l'intégrale. En effet, soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$, il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k x^k.$$

On a alors

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \mathrm{P}(x)\pi_n(x)dx &= \int_a^b \pi_n(x)\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k x^k dx \\
&= \sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k \int_a^b \pi_n(x)x^k dx \\
&\overset{\mathsf{hyp}}{=} \sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k \times 0 = 0.
\end{aligned}
$$

$\square$