# Exercice

Soient $(t_i)_{i=0}^n$, $(n+1)$ points distincts de $[-1;1]$.
On note $\mathcal{F}([-1;1];\mathbb{R})$ l'espace des fonctions définie de $[-1;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient $g \in \mathcal{F}([-1;1];\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_{-1}^{1} g(t)dt$ par $\mathcal{S}_n(g)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{S}_n(g) \stackrel{\text{def}}{=} 2\sum_{i=0}^{n} w_i g(t_i)$$

**Q. 1** *Démontrer que l'application $g \longmapsto \mathcal{S}_n(g)$ définie de $\mathcal{F}([-1;1];\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est linéaire.* □

---

**R. 1** Soient $f$ et $g$ dans $\mathcal{F}([-1;1];\mathbb{R})$ (espace vectoriel), et $\lambda$ et $\mu$ deux réels. Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{F}([-1;1];\mathbb{R})$, et on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_n(\lambda f + \mu g) &= 2\sum_{j=0}^{n} w_j (\lambda f + \mu g)(x_j) \\
&= 2\sum_{j=0}^{n} w_j \big(\lambda f(x_j) + \mu g(x_j)\big) \\
&= \lambda 2\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) + \mu 2\sum_{j=0}^{n} w_j g(x_j) \\
&= \lambda \mathcal{S}_n(f) + \mu \mathcal{S}_n(g).
\end{aligned}$$

L'application $\mathcal{S}_n$ est donc linéaire.

On pose

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad L_i(t) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j}.$$

**Q. 2** a. *Montrer que si $\mathcal{S}_n$ a pour degré d'exactitude $n$ au moins alors, on a*

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad w_i = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_i(t)dt. \tag{P-1}$$

b. *Montrer que si* (P-1) *est vérifiée, alors $\mathcal{S}_n$ a pour degré d'exactitude $n$ au moins.*

□

**R. 2** a. Soit $i \in [\![0,n]\!]$. On a $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$. Par hypothèse, la formule de quadrature a pour degré d'exactitude $n$ au moins et donc on a

$$\mathcal{S}_n(L_i) \stackrel{\mathsf{hyp}}{=} \int_{-1}^{1} L_i(t)dt.$$

Comme $L_i(t_j) = \delta_{i,j}$, $\forall j \in [\![0,n]\!]$, on en déduit

$$\mathcal{S}_n(L_i) = 2\sum_{j=0}^{n} w_j L_i(t_j) = 2w_i.$$

Ce qui donne

$$w_i = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_i(t)d.$$

b. Par hypothèse, les poids $(w_i)_{i=0}^{n}$ étant donnés par (P-1), La formule de quadrature s'écrit

$$\mathcal{S}_n(g) \overset{\text{hyp}}{=} \sum_{i=0}^{n} g(t_i)\int_{-1}^{1} L_i(t)dt.$$

On note $\mathcal{L}_n(P)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de $\mathbb{R}_n[X]$ passant par les points $(t_i, g(t_i))_{i=0}^{n}$ donné par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}_n(P)(t) = \sum_{i=0}^{n} g(t_i)L_i(t).$$

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[X]$. Par unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange, on a $\mathrm{P} = \mathcal{L}_n(P)$ et

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)dt &= \int_{-1}^{1} \mathcal{L}_n(P)(t)dt \\
&= \int_{-1}^{1}\sum_{i=0}^{n} L_i(t)\mathrm{P}(t_i)dt \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(t_i)\int_{-1}^{1} L_i(t)dt \\
&= 2\sum_{i=0}^{n} w_i\mathrm{P}(t_i) = \mathcal{S}_n(\mathrm{P}).
\end{aligned}$$

La formule de quadrature est donc exacte pour tous les polynômes de degré $n$ au moins.

On rappele que la formule de quadrature $\mathcal{S}_n$ à $(n+1)$ points distincts, dont les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont données par (P-1), a pour degré d'exactitude $(n+m)$, $m \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si

$$\int_{-1}^{1} \pi_n(t)\mathrm{Q}(t)dt = 0, \ \forall \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{m-1}[X] \tag{P-2}$$

avec $\pi_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^{n}(t - t_i)$.

Par la suite, on suppose que les $(t_i)_{i=0}^n$ sont les $(n+1)$ racines distinctes dans $]-1;1[$ du polynôme de Legendre de degré $(n+1)$ et que les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont données par (P-1).

Les polynômes de Legendre peuvent être définis par la formule de récurrence de Bonnet

$$(n+1)\mathrm{P}_{n+1}(t) = (2n+1)t\mathrm{P}_n(t) - n\mathrm{P}_{n-1}(t),\ \forall n \geqslant 1 \tag{P-3}$$

avec $\mathrm{P}_0(t) = 1$ et $\mathrm{P}_1(t) = t$.
On a les propriétés suivantes:

**prop.1** le polynôme de Legendre $\mathrm{P}_n$ est de degré $n$,

**prop.2** la famille $\{\mathrm{P}_k\}_{k=0}^{n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$,

**prop.3** pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_m(t)\mathrm{P}_n(t)dt = \frac{2}{2n+1}\delta_{m,n}, \tag{P-4}$$

ce qui correspond à l'orthogonalité des polynômes de Legendre pour le produit scalaire

$$\langle \mathrm{P}_m, \mathrm{P}_n \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}_m(t)\mathrm{P}_n(t)dt.$$

**prop.4** Soit $n \geqslant 1$, $\mathrm{P}_n$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et ses $n$ racines, notées $(t_i)_{i=0}^{n}$, sont simples dans $]-1,1[$, c'est à dire

$$\mathrm{P}_n(t) = C\prod_{i=0}^{n-1}(t-t_i),\ C \in \mathbb{R}^*$$

où les $t_i$ sont 2 à 2 distincts (et ordonnés). Les $(n+1)$ racines simples de $\mathrm{P}_{n+1}$ sont alors chacunes dans l'un des $(n+1)$ intervalles $]-1,t_0[$, $]t_0,t_1[$, $\ldots$, $]t_{n-2},t_{n-1}[$, $]t_{n-1},1[$.

**Q. 3** *a. En utilisant les polynômes de Legendre, démontrer que la formule de quadrature $\mathcal{S}_n$ est de degré d'exactitude $2n+1$.*

*b. Montrer que la formule de quadrature $\mathcal{S}_n$ n'est pas de degré d'exactitude $2n+2$.*

*c. Démontrer que $\mathcal{S}_n$ est l'unique formule de quadrature à $(n+1)$ points distincts dans $[-1;1]$ ayant pour degré d'exactitude $2n+1$.*

□

---

**R. 3** a. Par hypothèse, les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont données par (P-1), $\mathcal{S}_n$ a pour degré d'exactiude $2n+1$ si et seulement si on a (P-2) avec $m = n+1$.

D'après les propriétés des polynômes de Legendre $\mathrm{P}_n$, on a $\mathrm{P}_{n+1}(t) = C\pi_n(t)$ avec $C \in \mathbb{R}^*$.

On en déduit que (P-2) avec $m = n+1$ est équivalent à

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_{n+1}(t)\mathrm{Q}(t)dt = 0, \ \forall \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[X].$$

Or, la famille des les polynômes de Legendre $\{\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et comme les polynômes de Legendre sont orthogonaux, la relation précedente est vérifiée.

b. Supposons qu'il existe une autre formule de quadrature élémentaire à $(n+1)$ points distincts dans $[-1,1]$

$$\tilde{\mathcal{S}}_n(g) \stackrel{\text{def}}{=} 2\sum_{i=0}^{n} \tilde{w}_i g(\tilde{t}_i)$$

ayant pour degré d'exactitude $(2n+1)$ précisement. D'après la **Q. 2**, on a donc

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad \tilde{w}_i = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{L}_i(t)dt, \quad \text{où } \tilde{L}_i(t) \overset{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j}.$$

Notons $\tilde{\pi}_n(t) = \prod_{i=0}^{n}(t-\tilde{t}_i)$. Comme $\mathcal{S}_n$ et $\tilde{\mathcal{S}}_n$ ont pour degré d'exactitude $(2n+1)$ précisement, on déduit de (P-2) avec $m = n+1$, que

$$\int_{-1}^{1} \pi_n(t)\mathrm{Q}(t)dt = \int_{-1}^{1} \tilde{\pi}_n(t)\mathrm{Q}(t)dt = 0, \ \forall \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[X]$$

Le polynôme $\mathrm{R} = \pi_n - \tilde{\pi}_n$ est dans $\mathbb{R}_n[X]$ car les polynômes $\pi_n$ et $\tilde{\pi}_n$ de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ sont unitaires. On a alors

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{R}(t)\mathrm{Q}(t)dt = 0, \ \forall \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[X]$$

En choisissant $\mathrm{Q} = \mathrm{R}$, on obtient

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{R}^2(t)dt = 0$$

ce qui entraine $\mathrm{R} = 0$ et donc les points $(\tilde{t}_i)_{i=0}^{n}$ et $(t_i)_{i=0}^{n}$ sont identiques à une permutation des indices près, c'est à dire

$$\tilde{t}_{\sigma(i)} = t_i, \ \forall i \in [\![0,n]\!].$$

On a alors $\tilde{w}_{\sigma(i)} = w_i, \ \forall i \in [\![0,n]\!]$ et

$$\tilde{\mathcal{S}}_n(g) \overset{\text{def}}{=} 2\sum_{i=0}^{n} \tilde{w}_i g(\tilde{t}_i) = 2\sum_{i=0}^{n} \tilde{w}_{\sigma(i)} g(\tilde{t}_{\sigma(i)}) = 2\sum_{i=0}^{n} w_i g(t_i) = \mathcal{S}_n(g).$$

Soient $a, b$ deux réels, $a < b$. On note $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_i$, $\forall i \in [\![0, n]\!]$, où les $(t_i)_{i=0}^n$ sont les $(n+1)$ racines distinctes dans $]-1; 1[$ du polynôme de Legendre de degré $(n+1)$.
Soient $f \in \mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$, espace des fonctions définies de $[a; b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$., et $n \in \mathbb{N}$.
On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^{n} w_i^\star f(x_i)$$

On pose

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad L_i^\star(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

**Q. 4** *a. Montrer que la formule de quadrature $\mathcal{Q}_n$ est de degré d'exactitude $n$ au moins si et seulement si*

$$w_i^\star = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_i^\star(x)dx, \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{P-5}$$

*b. En déduire que la formule de quadrature $\mathcal{Q}_n$ est de degré d'exactitude $n$ au moins si et seulement si*

$$w_i^\star = w_i, \quad \forall i \in [\![0, n]\!].$$

*où les $w_i$ sont donnée par* (P-1).

□

**R. 4** a. Démontrons l'équivalence

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $i \in [\![0, n]\!]$. On a $L_i^\star \in \mathbb{R}_n[X]$. Par hypothèse, la formule de quadrature a pour degré d'exactitude $n$ au moins et donc on a

$$\mathcal{Q}_n(L_i^\star, a, b) \stackrel{\text{hyp}}{=} \int_a^b L_i^\star(x)dx.$$

Or comme $L_i^\star(x_j) = \delta_{i,j}$, $\forall j \in [\![0, n]\!]$, on a

$$\mathcal{Q}_n(L_i^\star, a, b) = (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j^\star L_i^\star(x_j) = (b-a)w_i^\star.$$

Ce qui donne

$$w_i^\star = \frac{1}{b-a}\int_a^b L_i^\star(x)dx.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Par hypothèse, les poids $(w_i^\star)_{i=0}^n$ étant donnés par (P-5), La formule de quadrature s'écrit

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{hyp}}{=} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b L_i^\star(x)dx.$$

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[X]$. Par unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange, on a $\mathrm{P} = \mathcal{L}_n(P)$ et

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathrm{P}(x)dx &= \int_a^b \mathcal{L}_n(P)(x)dx \\ &= \int_a^b \sum_{i=0}^n L_i^\star(x)\mathrm{P}(x_i)dx \\ &= \sum_{i=0}^n \mathrm{P}(x_i) \int_a^b L_i^\star(x)dx \\ &= (b-a)\sum_{i=0}^n w_i^\star \mathrm{P}(x_i) = \mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b).\end{aligned}$$

La formule de quadrature est donc exacte pour tout les polynômes de degré $n$ au moins.

b. Il suffit pour celà de démontrer que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b L_i^\star(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 L_i(t)dt. \qquad (R_1)$$

On utilise le changement de variable

$$x = \varphi(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

ce qui correspond bien à $x_i = \varphi(t_i)$, $\forall i \in [\![0, n]\!]$. On a alors

$$\begin{aligned}\int_a^b L_i^\star(x)dx &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} L_i^\star \circ \varphi(t)\varphi'(t)dt \\ &= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 L_i^\star \circ \varphi(t)dt.\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
L_i^\star \circ \varphi(t) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{\varphi(t) - x_j}{x_i - x_j} \\
&= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_j)}{\varphi(t_i) - \varphi(t_j)} \\
&= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t\right) - \left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_j\right)}{\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_i\right) - \left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_j\right)} \\
&= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{t - t_j}{t_i - t_j} = L_i(t).
\end{aligned}
$$

ce qui donne $(R_1)$.

---

On suppose que $w_i^\star = w_i$, $\forall i \in [\![0, n]\!]$.

**Q. 5** *Montrer que $\mathcal{Q}_n$ est l'unique formule de quadrature élémentaire à $(n+1)$ points distincts dans $[a, b]$ ayant pour degré d'exactitude $(2n+1)$ précisement.* □

---

**R. 5** Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$. Avec le changement de variable $x = \varphi(t) = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}t$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathrm{P}(x)dx &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \mathrm{P}\circ\varphi(t)\varphi'(t)dt \\ &= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{P}\circ\varphi(t)dt. \qquad (R_2)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b) &= (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i^\star \mathrm{P}(x_i) \\ &= (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i \mathrm{P}(\varphi(t)_i) \\ &= \frac{b-a}{2}\mathcal{S}_n(\mathrm{P}\circ\varphi) \qquad (R_3)\end{aligned}$$

Comme $\varphi \in \mathbb{R}_1[X]$, on a $\mathrm{P}\circ\varphi \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$.[1] La formule de quadrature $\mathcal{S}_n$ étant de degré d'exactitue $2n+1$, on a alors

$$\mathcal{S}_n(\mathrm{P}\circ\varphi) = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}\circ\varphi(t)dt.$$

On en déduit en utilisant $(R_2)$

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx = \frac{b-a}{2}\mathcal{S}_n(\mathrm{P}\circ\varphi)$$

[1] Rappel: Soient $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_p[X]$ et $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_q[X]$, alors $\mathrm{P}\circ\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{pq}[X]$.

puis en utilisant $(R_3)$

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx = \mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b).$$

La formule de quadrature élémentaire $\mathcal{Q}_n$ est donc de degré d'exactitude $2n+1$.
Par l'absurde on peut démontrer que $\mathcal{Q}_n$ n'est pas de degré d'exactitude $2n+2$ car sinon $\mathcal{S}_n$ serait aussi de degré d'exactitude $2n+2$.
Par l'absurde on peut démontrer que $\mathcal{Q}_n$ est unique car sinon $\mathcal{S}_n$ ne serait pas unique.