Proposition

Soit $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ definie en (5.1), une formule de quadrature élémentaire à $(n+1)$ points $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ (distincts deux à deux dans $[a,b]$). Alors, $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ est de degré d'exactitude k si et seulement si

$$\mathcal{Q}_n(x\mapsto x^r,a,b)=\int_a^b x^r dx,\quad \forall r\in[\![0,k]\!].$$

Proof. $\Rightarrow$ Soit $r\in[\![0,k]\!]$, Comme $x\mapsto x^r$ est dans $\mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$, et que la formule de quadrature est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à k, on en déduit

$$\mathcal{Q}_n(x\mapsto x^r,a,b)=\int_a^b x^r dx,\quad \forall r\in[\![0,k]\!].$$

$\Leftarrow$ Soit $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_k[X]$. On peut le décomposer dans la base des monomes: il existe $(a_i)_{i=0}^k$ réels tels que

$$\mathrm{P}(x)=\sum_{i=0}^k a_i x^i.$$

Par linéarité de l'application $f\longmapsto \mathcal{Q}_n(f,a,b)$, on a

$$\mathcal{Q}_n(x\mapsto P(x),a,b)=\sum_{i=0}^k a_i\mathcal{Q}_n(x\mapsto x^i,a,b).$$

Par hypothèse, on a

$$\mathcal{Q}_n(x\mapsto x^r,a,b)=\int_a^b x^r dx,\quad \forall r\in[\![0,k]\!]$$

et donc

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto \mathrm{P}(x), a, b) = \sum_{i=0}^{k} a_i \int_a^b x^i dx.$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto \mathrm{P}(x), a, b) = \int_a^b \sum_{i=0}^{k} a_i x^i dx = \int_a^b \mathrm{P}(x) dx.$$

On en déduit donc que $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est de degré d'exactitude k.

$\square$