### Proposition

Soient $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ des points deux à deux distincts de l'intervalle $[a,b]$ donnés. Il existe alors une unique formule de quadrature élémentaire (5.1) à $(n+1)$ points de degré d'exactitude $n$ au moins.

*Proof.* En fixant les points $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ deux à deux distincts, pour obtenir explicitement la formule de quadrature de type (5.1) il faut déterminer les $n+1$ poids $(w_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$. Or, de (5.4), en prenant $k=n$, on obtient exactement $n+1$ équations linéaires en les $(w_i)$ s'écrivant matriciellement sous la forme :

$$(b-a)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ \frac{b^2-a^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}$$

La matrice intervenant dans le système précédent s'appelle **la matrice de Vandermonde** et elle est inversible (car les $(x_i)$ sont deux à deux distincts, voir Exercice **??**). Ceci établi donc l'existence et l'unicité de poids $(w_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ tels que la formule de quadrature élémentaire (5.1) soit d'ordre (au moins) $n$.

Il est aussi possible de démontrer l'unicité classiquement. Supposons qu'il existe $(w_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ et $(\tilde{w}_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ tels que pour tout $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_n[X]$, on ait

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx = (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i \mathrm{P}(x_i) = (b-a)\sum_{i=0}^{n} \tilde{w}_i \mathrm{P}(x_i).$$

On a alors $\forall \mathrm{P}\in\mathbb{R}_n[X]$,

$$\sum_{i=0}^{n} (w_i-\tilde{w}_i)\mathrm{P}(x_i) = 0. \tag{P-1}$$

On rappelle que les fonctions de base de Lagrange associées aux $(n+1)$ points $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ définies en (4.5), notées $L_i$, sont dans $\mathbb{R}_n[X]$ et vérifient

$$L_i(x_j) = \delta_{i,j}, \ \forall j \in [\![0, n]\!]$$

Soit $j \in [\![0, n]\!]$. En choisissant $\mathrm{P} = L_j$ dans (P-1), on obtient

$$0 = \sum_{i=0}^{n} (w_i - \tilde{w}_i) L_j(x_i) = (w_j - \tilde{w}_j)$$

ce qui prouve l'unicité. $\square$