

Proposition

La formule de quadrature élémentaire (5.1) à $(n + 1)$ points est de degré d'exactitude k (au moins) si et seulement si

$$(b - a) \sum_{i=0}^n w_i x_i^r = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r + 1}, \quad \forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket. \quad (\text{P-1})$$

Proof. • \Rightarrow Si la formule (5.1) est de degré d'exactitude k , elle est donc exacte pour tout polynôme de $\mathbb{R}_k[X]$ et plus particulièrement pour tous les monômes $1, X, X^2, \dots, X^k$. Soit $r \in \llbracket 0, k \rrbracket$. En prenant $f(x) = x^r$, la formule (5.1) étant exacte par hypothèse, on obtient

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r, a, b) = (b - a) \sum_{i=0}^n w_i x_i^r \stackrel{\text{hyp}}{=} \int_a^b x^r dx = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r + 1}$$

- \Leftarrow On suppose que l'on a (P-1). Soit $P \in \mathbb{R}_k[X]$. On va montrer que la formule de quadrature (5.1) est alors exacte. Le polynôme P peut s'écrire comme combinaison linéaire des monômes de $\{1, X, X^2, \dots, X^k\}$, base de $\mathbb{R}_k[X]$.

1ère démonstration: On a donc

$$P(x) = \sum_{j=0}^k \alpha_j x^j, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En prenant $f = P$, la formule de quadrature (5.1) donne

$$\int_a^b P(x) dx \approx (b - a) \sum_{i=0}^n w_i P(x_i) = (b - a) \sum_{i=0}^n w_i \sum_{j=0}^k \alpha_j x_i^j$$

De plus, par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_a^b P(x)dx = \sum_{j=0}^k \alpha_j \int_a^b x^j dx = \sum_{j=0}^k \alpha_j \frac{b^{j+1} - a^{j+1}}{j+1}$$

et en utilisant (P-1) on obtient

$$\int_a^b P(x)dx = (b-a) \sum_{j=0}^k \alpha_j \sum_{i=0}^n w_i x_i^j$$

Ce qui donne

$$\int_a^b P(x)dx = (b-a) \sum_{i=0}^n w_i P(x_i).$$

La formule de quadrature est donc de degré d'exactitude k .

2ème démonstration: On a donc

$$P = \sum_{j=0}^k \alpha_j X^j$$

et par linéarité de l'application $f \longmapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ (voir Proposition 5.4) on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_n(P, a, b) &= \mathcal{Q}_n\left(\sum_{j=0}^k \alpha_j X^j, a, b\right) \\ &= \sum_{j=0}^k \alpha_j \mathcal{Q}_n(X^j, a, b). \end{aligned}$$

Par hypothèse, on a (P-1) et, comme par définition X^j est le polynôme $x \mapsto x^j$, on obtient

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \mathcal{Q}_n(X^j, a, b) \stackrel{\text{hyp}}{=} \int_a^b X^j(x) dx = \int_a^b x^j dx = \frac{b^{j+1} - a^{j+1}}{j+1}.$$

De plus, par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_a^b P(x) dx = \sum_{j=0}^k \alpha_j \int_a^b x^j dx = \sum_{j=0}^k \alpha_j \frac{b^{j+1} - a^{j+1}}{j+1}$$

et donc

$$\int_a^b P(x) dx = \sum_{j=0}^k \alpha_j \mathcal{Q}_n(X^j, a, b) = \mathcal{Q}_n(P, a, b).$$

□

