Exercice

Soient f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs réelles et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \tag{P-1}$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a,b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels vérifiant

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad w_i = w_{n-i}. \tag{P-2}$$

Q. 1 *a. Donner explicitement un exemple de points* $(x_i)_{i=0}^n$ *vérifiant* (P-2) *(n restant quelconque).*

b. Etablir que

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad x_i - \frac{a+b}{2} = -\left(x_{n-i} - \frac{a+b}{2}\right).$$

c. Si n est impair, montrer que $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $x_i \neq \dfrac{a+b}{2}$.

d. Si n est pair, montrer qu'il existe un unique $i \in [\![0,n]\!]$ *tel que* $x_i = \dfrac{a+b}{2}$.

□

R. 1 a. Soit $(x_i)_{i=0}^n$ la discrétisation régulière de l'intervalle $[a,b]$,

$$h = \frac{b-a}{2}, \quad \forall i \in [\![0,n]\!],\ x_i = a + ih.$$

Dans ce cas, tous les points sont distincts deux à deux et on a pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $n-i \in [\![0,n]\!]$ et

$$\frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+ih+a+(n-i)h}{2}.$$

Or $a+nh=b$, ce qui donne

$$\frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

b. De (P-2), on déduit

$$\text{(P-2)} \quad \Leftrightarrow \quad x_i + x_{n-i} = a+b \quad \Leftrightarrow \quad x_i - \frac{a+b}{2} = -\left(x_{n-i} - \frac{a+b}{2}\right)$$

c. Si $n = 2k-1$, (n impair), on a alors un nombre **pair** de points. Par l'absurde supposons $\exists i \in [\![0,n]\!]$ tel que $x_i = \dfrac{a+b}{2}$. Dans ce cas, on a $x_{n-i} = \dfrac{a+b}{2} = x_i$. Comme les points $(x_j)_{j=0}^n$ sont distincts deux à deux, pour avoir une contradiction, il suffit de monter que $i \neq n-i$. En effet, on a

$$[\![0,n]\!] = [\![0,2k-1]\!] = [\![0,k-1]\!] \cup [\![k,2k-1]\!].$$

- si $i \in [\![0,k-1]\!]$ alors

$$0 \leqslant i \leqslant k-1 \;\Leftrightarrow\; n-(k-1) \leqslant n-i \leqslant n \;\Leftrightarrow\; k \leqslant n-i \leqslant n,$$

  et donc $n-i \neq i$

- si $i \in [\![k, 2k-1]\!]$ alors

$$k \leqslant i \leqslant 2k-1 \;\Leftrightarrow\; n-(2k-1) \leqslant n-i \leqslant n-k \;\Leftrightarrow\; 0 \leqslant n-i \leqslant k-1,$$

  et donc $n-i \neq i$.

d. Si $n = 2k$, (n pair), on a alors un nombre **impair** de points. Comme $n-k = k$, on obtient à partir de (P-2)

$$\frac{x_k + x_{n-k}}{2} = \frac{a+b}{2}$$

c'est à dire

$$x_k = \frac{a+b}{2}.$$

Comme les points sont distincts deux à deux, on obtient l'unicité.

Q. 2 *Démontrer que l'application* $f \longmapsto \mathcal{Q}_n(f,a,b)$ *définie de* $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$, *muni de la norme infini, à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *est linéaire et continue.* □

R. 2 On commence par démontrer la linéarité. Soient f et g dans $\mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$, et λ et μ deux réels. Alors $\lambda f+\mu g \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$, et on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_n(\lambda f+\mu g,a,b) &= (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j(\lambda f+\mu g)(x_j)\\
&= (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j\big(\lambda f(x_j)+\mu g(x_j)\big)\\
&= \lambda(b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j)+\mu(b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j g(x_j)\\
&= \lambda\mathcal{Q}_n(f,a,b)+\mu\mathcal{Q}_n(g,a,b).
\end{aligned}$$

L'application $f\longmapsto \mathcal{Q}_n(f,a,b)$ est donc linéaire. Pour démontrer qu'elle est continue, il suffit alors de démontrer que

$$\exists C>0,\quad \text{tel que } |\mathcal{Q}_n(f,a,b)| \leqslant C\left\|f\right\|_\infty,\ \forall f\in\mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}).$$

Or, on a, pour tout $f\in\mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{Q}_n(f,a,b)| &= |(b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j)|\\
&\leqslant (b-a)\sum_{j=0}^{n} |w_j||f(x_j)|\\
&\leqslant C\left\|f\right\|_\infty,\quad \text{avec}\ \ C=(b-a)\sum_{j=0}^{n}|w_j|\ \text{indépendant de}\ \ f.
\end{aligned}$$

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et P un polynôme de degré $2m+1$ s'écrivant sous la forme

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{j=0}^{2m+1} a_j x^j$$

avec $(a_j)_{j=0}^{2m+1}$ des réels et $a_{2m+1} \neq 0$.

Q. 3 *a. Calculer les dérivées* $\mathrm{P}^{(2m+1)}$ *et* $\mathrm{P}^{(2m+2)}$.

b. Montrer que

$$\mathrm{P}(x) = C\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} + \mathrm{R}(x) \tag{P-3}$$

en déterminant le degré maximum de R *et en exprimant* C *en fonction des* $(a_j)_{j=0}^{2m+1}$.

□

R. 3 a. On a $\mathrm{P}(x) = a_{2m+1}x^{2m+1} + \sum_{j=0}^{2m} a_j x^j$ et comme la dérivée $(2m+1)$ d'un polynôme de degré $2m$ est nulle, on obtient

$$\mathrm{P}^{(2m+1)}(x) = a_{2m+1}\frac{d^{2m+1}x^{2m+1}}{dx^{2m+1}} = a_{2m+1}(2m+1)!$$

et

$$\mathrm{P}^{(2m+2)}(x) = 0.$$

b. C'est la division euclidienne du polynôme P de degré $(2m+1)$ par le polynôme $x \mapsto \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1}$ de degré $(2m+1)$. On a donc C constante et $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_{2m}[X]$. Pour calculer C, on dérive $(2m+1)$ fois (P-3), ce qui donne

$$\mathrm{P}^{(2m+1)}(x) = C(2m+1)!.$$

En identifiant, avec la sous-question précédente, on obtient $C = a_{2m+1}$.

Q. 4 *Montrer que*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2k+1} dx = 0. \tag{P-4}$$

□

R. 4 En effectuant le changement de variable $t \mapsto \frac{a+b}{2} + t\frac{b-a}{2}$ on obtient

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 t^{2m+1} dt = 0.$$

On peut aussi utiliser directement la primitive de $\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1}$ qui est $\dfrac{1}{2m+2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+2}$...

Q. 5 *On suppose que la formule de quadrature élémentaire* (P-1) *est exacte pour les polynômes de* $\mathbb{R}_{2m}[X]$.

a. *Déduire de* (P-3) *et* (P-4) *que la formule de quadrature élémentaire* (P-1) *est exacte pour* P *si et seulement si*

$$(b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} = 0. \tag{P-5}$$

b. *En utilisant **Q. 1**, démontrer que* (P-4) *est toujours vérifiée.*

□

R. 5 a. On a, en utilisant la linéarité de l'intégrale et (P-3)

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx \;=\; C\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} dx + \int_a^b \mathrm{R}(x)dx$$

En utilisant la linéarité de $\mathcal{Q}_n(\bullet, a, b)$ et (P-3) on obtient

$$\mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b) = (b-a)C\sum_{i=0}^{n} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} + (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i \mathrm{R}(x_i).$$

On a $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_{2m}[X]$ et, par hypothèse, la formule de quadrature est exacte pour les polyômes de les polynômes de $\mathbb{R}_{2m}[X]$ ce qui donne

$$\mathcal{Q}_n(\mathrm{R}, a, b) = (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i \mathrm{R}(x_i).$$

Or, la formule de quadrature élémentaire (P-1) est exacte pour P si et seulement si

$$\mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b) = \int_a^b \mathrm{P}(x)dx$$

ce qui est donc équivalent à

$$(b-a)C\sum_{i=0}^{n} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} = C\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} dx.$$

En utilisant (P-4) et le fait que $C = a_{2m+1} \neq 0$, on en déduit que la formule de quadrature élémentaire (P-1) est exacte pour P si et seulement si (P-5) est vérifiée.

b. • Si $n = 2k$, (n paire), on a alors un nombre **impair** de points avec nécessairement $x_k = x_{n-k} = \frac{a+b}{2}$ et

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} &= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} + 0 \times w_k + \sum_{i=k+1}^{2k} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} - \sum_{i=k+1}^{2k} w_{n-i} \left(x_{n-i} - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} - \sum_{j=0}^{k-1} w_j \left(x_j - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

- Si $n = 2k-1$, (n impaire), on alors un nombre **pair** de points (avec $x_i \neq \frac{a+b}{2}$, $\forall i \in [\![0, n]\!]$) et

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} &= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} + \sum_{i=k}^{2k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} - \sum_{i=k}^{2k-1} w_{n-i} \left(x_{n-i} - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} - \sum_{j=0}^{k-1} w_j \left(x_j - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Q. 6 *Ecrire de manière très précise le résultat démontré.* $\square$

R. 6 Soit $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par (P-1) où les $(x_i)_{i=0}^{n}$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$ et les $(w_i)_{i=0}^{n}$ sont des réels vérifiant (P-2). Si cette formule est exacte pour les polynômes de degré $2m$ alors elle est nécessairement exacte pour les polynômes de degré $2m+1$.
