Exercice

Soient $(x_i)_{i=0}^n$ des points distincts 2 à 2 de l'intervalle $[a,b]$ vérifiant

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

On note $\mathrm{L}_i \in \mathbb{R}_n[X]$, $i \in [\![0,n]\!]$ les $(n+1)$ polynômes de base de Lagrange définis par

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

et vérifiant $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2$

Q. 1 *Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Montrer que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{L}_i((a+b)-x) = \mathrm{L}_{n-i}(x).$$

□

R. 1 Soit $i \in [\![0,n]\!]$. On note $\varphi(x) = (a+b) - x$ le polynôme de degré 1 et $\mathrm{P} = \mathrm{L}_i \circ \varphi$ le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ (la composé de 2 polynômes est de degré le produit des degrés des 2 polynômes).
On a

$$\forall j \in [\![0,n]\!],\quad x_{n-j} = (a+b) - x_j$$

et

$$\mathrm{P}(x_j) = \mathrm{L}_i((a+b)-x_j) = \mathrm{L}_i(x_{n-j}) = \delta_{i,n-j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = n-j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = n-i \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} = \delta_{n-i,j}.$$

C'est à dire

$$\forall j \in [\![0,n]\!],\ \mathrm{P}(x_j) = \delta_{n-i,j}.$$

Or L_{n-i} est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant la relation précédente dont $\mathrm{P} = \mathrm{L}_{n-i}$ (voir Exercice 4.1.1, page 136).

Q. 2 *Soient* $(w_i)_{i=0}^n$ *définis par*

$$w_i = \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{L}_i(t)dt, \quad \forall i \in [\![0,n]\!]$$

Montrer que l'on a alors

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad w_i = w_{n-i}$$

□

R. 2 Soit $i \in [\![0, n]\!]$. On note $t = \varphi(x) = (a+b) - x$ le changement de variable affine. On a alors $\varphi^{-1}(t) = (a+b) - t$ et

$$\begin{aligned}
w_i &= \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{L}_i(t)dt \\
&= \frac{1}{b-a}\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \mathrm{L}_i \circ \varphi(x)\varphi'(x)dt \\
&= \frac{1}{b-a}\int_b^a \mathrm{L}_i((a+b)-x)(-1)dx \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{L}_i((a+b)-x)dx \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{L}_{n-i}(x)dx \quad \text{d'après la question précédente} \\
&= w_{n-i}.
\end{aligned}$$