Proposition

Soit $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ definie en (5.1), une formule de quadrature élémentaire à $(n+1)$ points $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ (distincts deux à deux).
La formule de quadrature est de degré d'exactitude n au moins si et seulement si pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, les poids w_i sont donnés par

$$w_i \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{b-a}\int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}dx = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j}dt, \quad \forall i \in [\![0,n]\!] \tag{P-1}$$

avec $t_i = (x_i - a)/(b-a)$.
Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$ alors on a

$$|\mathcal{E}_{a,b}(f)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty \int_a^b |\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)|dx \tag{P-2}$$

Proof. Montrons tout d'abord que l'on a l'égalité suivante

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}dx = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j}dt.$$

Par le changement de variables $s : t \longrightarrow a + (b-a)t$ on obtient

$$\int_a^b L_i(x)dx = (b-a)\int_0^1 L_i \circ s(t)dt$$

et l'on a $x_i = s(t_i) = a + (b-a)t_i$ où $t_i = (x_i - a)/(b-a)$. On en déduit

$$\begin{aligned}\int_0^1 L_i \circ s(t)dt &= \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{s(t)-s(t_j)}{s(t_i)-s(t_j)}dt = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{(b-a)(t-t_j)}{(b-a)(t_i-t_j)}dt \\ &= \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j}dt\end{aligned}$$

L'égalité est donc démontré.
Pour démontrer la proposition, on note $\mathcal{L}_n(f)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange associés aux points $(x_i, f(x_i))_{i\in[\![0,n]\!]}$:

$$\mathcal{L}_n(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)f(x_i) \quad \text{avec } L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

On a alors

$$\int_a^b \mathcal{L}_n(f)(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b L_i(x)dx.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que la formule de quadrature est de degré d'exactitude n. Soit $i \in [\![0,n]\!]$, $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ et on a alors par hypothèse

$$\mathcal{Q}_n(L_i, a, b) \overset{\text{hyp}}{=} \int_a^b L_i(x)dx.$$

Or comme $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$ on a

$$\mathcal{Q}_n(L_i, a, b) = (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j L_i(x_j) = (b-a)w_i.$$

On obtient donc

$$w_i = \frac{1}{b-a}\int_a^b L_i(x)dx.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose les poids $(w_i)_{i=0}^n$ donnés par (P-1). La formule de quadrature s'écrit alors

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \overset{\mathsf{hyp}}{=} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b L_i(x)dx.$$

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[X]$. Par unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange, on a $\mathrm{P} = \mathcal{L}_n(P)$ et

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathrm{P}(x)dx &= \int_a^b \mathcal{L}_n(P)(x)dx \\ &= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\mathrm{P}(x_i)dx \\ &= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(x_i)\int_a^b L_i(x)dx \\ &= (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i\mathrm{P}(x_i) = \mathcal{Q}_n(\mathrm{P},a,b).\end{aligned}$$

La formule de quadrature est donc exacte pour tout les polynômes de degré n au moins.

Pour démontrer l'inégalité (P-2), comme $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$, on peut appliquer le théorème 4.3 pour obtenir

$$\forall x \in [a,b],\ \exists \xi_x \in [a,b],\quad f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

On en déduit

$$\begin{aligned}|f(x)-\mathcal{L}_n(f)(x)| &= \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\pi_n(x)\right| \\ &\leqslant \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty}{(n+1)!}|\pi_n(x)|\end{aligned}$$

L'application $f-\mathcal{L}_n(f)$ étant intégrable sur $[a,b]$, l'application $|f-\mathcal{L}_n(f)|$ l'est aussi. De même $|\pi_n(x)|$ est intégrable sur $[a,b]$. On obtient alors

$$\int_a^b |f(x)-\mathcal{L}_n(f)(x)|dx \leqslant \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty}{(n+1)!}\int_a^b |\pi_n(x)|dx.$$

De plus

$$\left|\int_a^b f(x)-\mathcal{L}_n(f)(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)-\mathcal{L}_n(f)(x)|dx$$

ce qui donne

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\int_a^b \mathcal{L}_n(f)(x)dx\right| \leqslant \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty}{(n+1)!}\int_a^b |\prod_{i=0}^n (x-x_i)|dx.$$

La formule de quadrature est de degré d'exactitude n au moins et le polynôme d'interpolation de Lagrange $\mathcal{L}_n(f)$ est de degré n donc on a

$$\begin{aligned}
\int_a^b \mathcal{L}_n(f)(x)dx &= \mathcal{Q}_n(\mathcal{L}_n(f), a, b) \\
&= (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i \mathcal{L}_n(f)(x_i) \\
&= (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \text{ car } \mathcal{L}_n(f)(x_i) = f(x_i) \\
&= \mathcal{Q}_n(f, a, b)
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}_{a,b}(f)| &= \left| \int_a^b f(x)dx - \mathcal{Q}_n(f, a, b) \right| \\
&= \left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \mathcal{L}_n(f)(x)dx \right| \\
&\leqslant \frac{\left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty}{(n+1)!} \int_a^b |\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)| dx.
\end{aligned}$$

$\square$