

## EXERCICE

Soient  $(x_i)_{i=0}^n$   $(n + 1)$  points donnés et distincts 2 à 2 d'un intervalle  $[a, b]$  ( $a < b$ ). Ecrire une fonction algorithmique **WEIGHTS-FROMPOINTS** permettant de déterminer les poids  $(w_i)_{i=0}^n$  de telle sorte que la formule de quadrature élémentaire associée soit de degré d'exactitude  $n$  au moins en s'inspirant de résultats obtenus dans la démonstration de la Proposition 5.7. On pourra utiliser la fonction algorithmique  $\mathbf{x} \leftarrow \text{SOLVE}(\mathbb{A}, \mathbf{b})$  permettant de résoudre le système linéaire  $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

**Correction** Nous avons vu, dans la Proposition 5.7, que pour avoir une formule de quadrature élémentaire de degré d'exactitude  $n$ , il est nécessaire et suffisant que les  $(n + 1)$  poids  $(w_i)_{i=0}^n$  soient solution du système linéaire suivant:

$$(b - a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - a \\ \frac{b^2 - a^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}$$

---

**Algorithme 1** Fonction **WEIGHTSFROMPOINTS** retournant le tableau des poids  $\mathbf{w}$  associé à un tableau de points  $\mathbf{x}$  donnés (points 2 à 2 distincts) appartenant à un intervalle  $[a, b]$ .

---

**Données :**  $\mathbf{x}$  : tableau de  $\mathbb{R}^{n+1}$  contenant  $(n + 1)$  points distincts deux à deux dans un intervalle  $[a, b]$  avec la convention  $\mathbf{x}(i) = x_{i-1}, \forall i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$   
 $a, b$  : deux réels,  $a < b$ .

**Résultat :**  $\mathbf{w}$  : vecteur de  $\mathbb{R}^{n+1}$  avec  $\mathbf{w}(i) = w_{i-1}, \forall i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$

```
1: Fonction  $\mathbf{w} \leftarrow$  WEIGHTSFROMPOINTS (  $\mathbf{x}, a, b$  )
2:    $\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{O}_{n+1}$ 
3:    $\mathbb{A} \leftarrow \mathbb{O}_{n+1, n+1}$ 
4:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n + 1$  faire
5:     Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n + 1$  faire
6:        $\mathbb{A}(i, j) \leftarrow \mathbf{x}(j)^{(i-1)}$ 
7:     Fin Pour
8:      $\mathbf{b}(i) \leftarrow (b^i - a^i) / (i * (b - a))$ 
9:   Fin Pour
10:   $\mathbf{w} \leftarrow \text{SOLVE}(\mathbb{A}, \mathbf{b})$ 
11: Fin Fonction
```

---

