

Analyse Numérique I

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 1ère année / L3 MIM

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

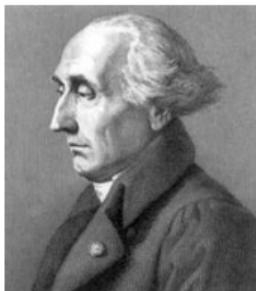
2023/11/24

Chapitre V

Interpolation

- 1 Interpolation de Lagrange
 - Stabilité

- 2 Interpolation de Lagrange-Hermite
 - Exercice
 - Résultats



(a) *Joseph-Louis Lagrange* 1736-1813, mathématicien italien puis français



(b) *Pafnouti Lvovitch Tchebychev* 1821-1894, mathématicien russe



(c) *Charles Hermite* 1822-1901, mathématicien français



(d) *Henri-Léon Lebesgue* 1875-1941, mathématicien français



Exercice 1:



Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $n + 1$ couples de \mathbb{R}^2 , $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux. On note

Q.1

- 1 Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i de degré n vérifiant

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (1)$$

- 2 Montrer que les $(L_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n).

On définit le polynôme P_n par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x). \quad (2)$$

- Q.2 Montrer que polynôme P_n est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant $P_n(x_i) = y_i, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

♥ Definition 1.1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ avec $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ et les x_i distincts deux à deux. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange** associé aux $n + 1$ points $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, noté P_n , est donné par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3)$$

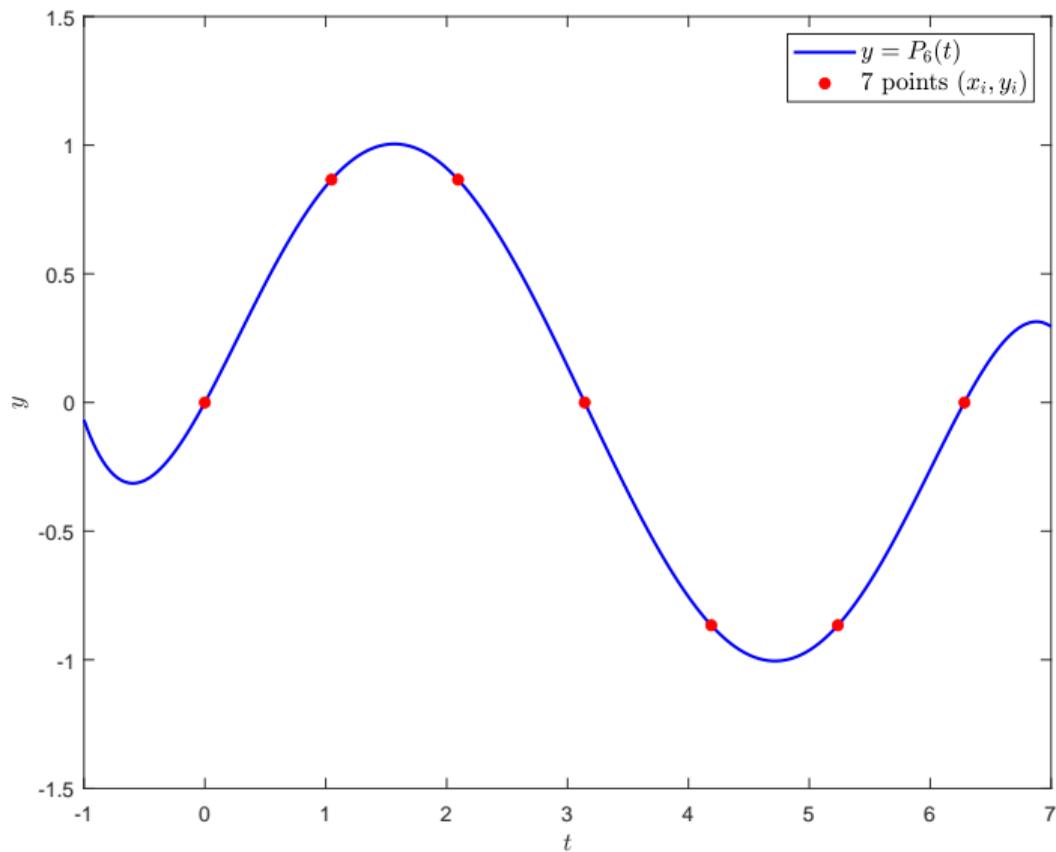
avec

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

📖 Théorème 1.2

Le **polynôme d'interpolation de Lagrange**, P_n , associé aux $n + 1$ points $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, est l'unique polynôme de degré au plus n , vérifiant

$$P_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (5)$$



Polynôme d'interpolation de Lagrange avec 7 points donnés



Exercice 2:

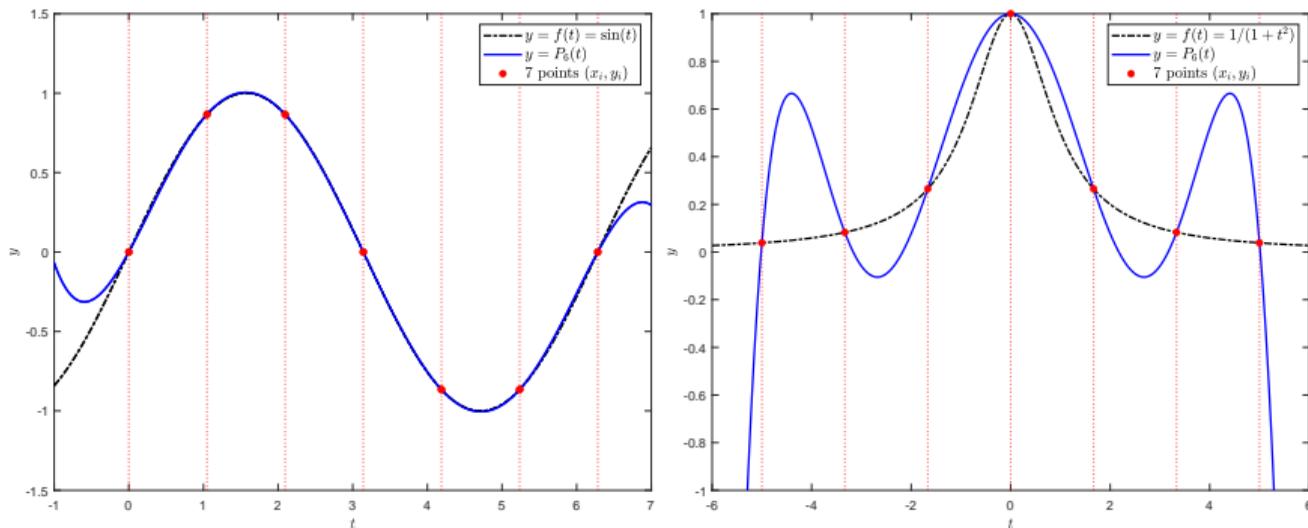


Écrire la fonction **LAGRANGE** permettant de calculer \mathcal{P}_n (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n + 1$ points $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$) au point $t \in \mathbb{R}$.

Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (6)$$

On cherche à évaluer l'erreur $E_n(t) = f(t) - \mathcal{P}_n(t)$, $\forall t \in [a, b]$.

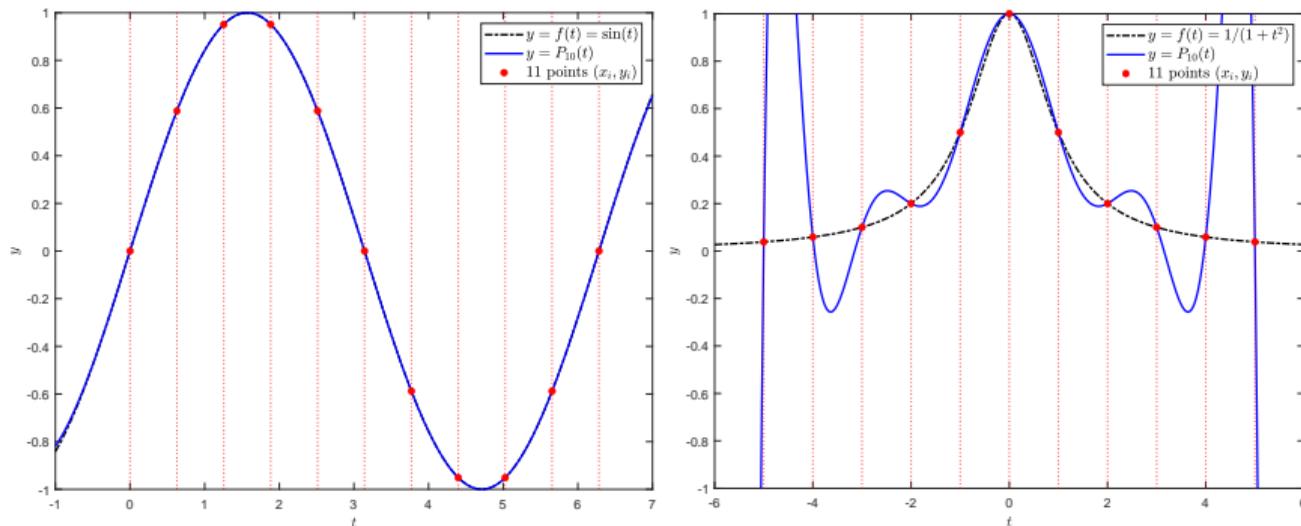


Polynômes d'interpolation de Lagrange avec $n = 6$ (7 points) uniformément répartis. A gauche pour la fonction $f : t \rightarrow \sin(t)$ avec $x_0 = 0$, $x_6 = 2\pi$ et à droite pour la fonction $f : t \rightarrow 1/(1+t^2)$ avec $x_0 = -5$, $x_6 = 5$.

Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (6)$$

On cherche à évaluer l'erreur $E_n(t) = f(t) - \mathcal{P}_n(t)$, $\forall t \in [a, b]$.

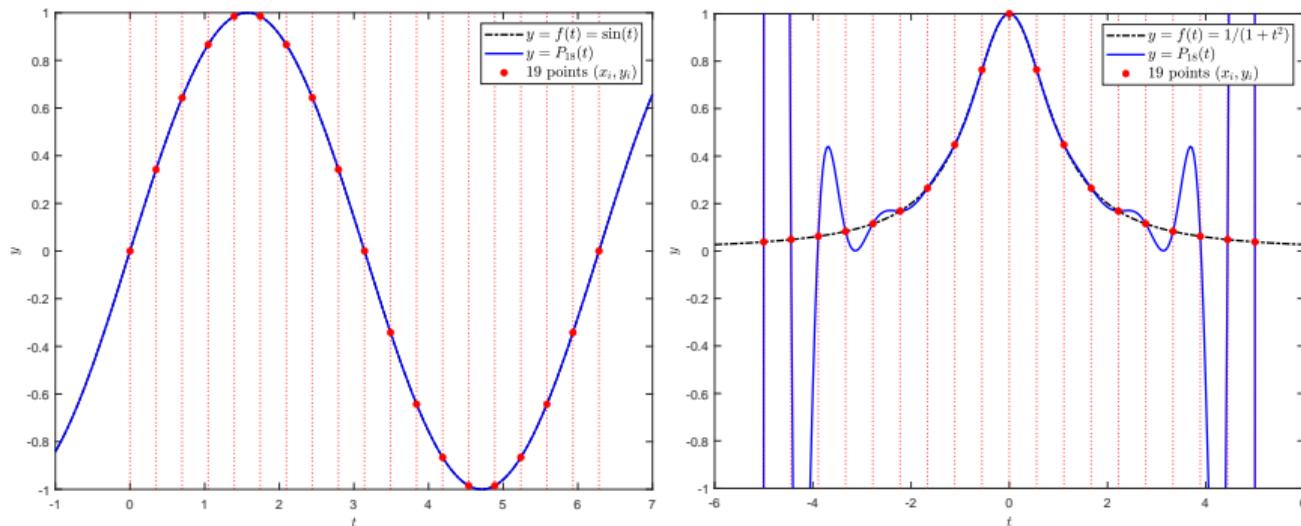


Polynômes d'interpolation de Lagrange avec $n = 10$ (11 points) uniformément répartis. A gauche pour la fonction $f : t \rightarrow \sin(t)$ avec $x_0 = 0$, $x_{10} = 2\pi$ et à droite pour la fonction $f : t \rightarrow 1/(1+t^2)$ avec $x_0 = -5$, $x_{10} = 5$.

Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (6)$$

On cherche à évaluer l'erreur $E_n(t) = f(t) - \mathcal{P}_n(t)$, $\forall t \in [a, b]$.



Polynômes d'interpolation de Lagrange avec $n = 18$ (19 points) uniformément répartis. A gauche pour la fonction $f : t \longrightarrow \sin(t)$ avec $x_0 = 0$, $x_{18} = 2\pi$ et à droite pour la fonction $f : t \longrightarrow 1/(1+t^2)$ avec $x_0 = -5$, $x_{18} = 5$.



Exercice 3:



On rappelle le théorème de Rolle:



Théorème: Rolle

Soient a, b deux réels, $a < b$, et, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que

- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$,
- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et n un entier, $n \geq 2$.

Q.1 Soient $g \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$ et p un entier, $p \geq 1$. On suppose que g admet au moins $(p + 1)$ zéros distincts dans I , notés $(x_i)_{i=0}^p$, et ordonnés $x_0 < x_1 < \dots < x_p$.

Montrer que g' admet au moins p zéros distincts dans I , séparant strictement les $(p + 1)$ zéros de g .

Q.2 Soient $u \in \mathcal{C}^n(I; \mathbb{R})$, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et q un entier, $q \geq 1$. On suppose que $u^{(k)}$, dérivée $k^{\text{ième}}$ de u , admet au moins $(q + 1)$ zéros distincts dans I , notés $(t_i)_{i=0}^q$, et ordonnés $t_0 < t_1 < \dots < t_q$.

Montrer que $u^{(k+1)}$ admet au moins q zéros distincts dans I , séparant strictement les $(q + 1)$ zéros de $u^{(k)}$.

Q.3 Soit $f \in \mathcal{C}^n(I; \mathbb{R})$. On suppose que f admet au moins $(n + 1)$ zéros distincts dans I , notés $(z_i)_{i=0}^n$.

- ➊ Montrer que $f^{(n)}$ admet au moins un zéro dans I .
- ➋ Peut-on abaisser la régularité de la fonction f ?



Exercice 4:



Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b]; \mathbb{R})$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $n + 1$ couples de \mathbb{R}^2 , $(x_i, y_i)_{i \in [0, n]}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux et $y_i = f(x_i)$.

On note par P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $(x_i, y_i)_{i \in [0, n]}$ et π_n le polynôme de degré $n + 1$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i). \quad (7)$$

Q.1 Montrer que, $\forall x \in [a; b]$, il existe ξ_x appartenant au plus petit intervalle fermé contenant x, x_0, \dots, x_n tel que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \quad (8)$$

Indication : Etudier les zéros de la fonction $F(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n(t)$.



Théorème 1.3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et x_0, \dots, x_n $n + 1$ points distincts de l'intervalle $[a, b]$. Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$ et \mathcal{P}_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n passant par $(x_i, f(x_i))$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors, $\forall x \in [a, b]$, $\exists \xi_x \in (\min(x_i, x), \max(x_i, x))$,

$$f(x) - \mathcal{P}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad (9)$$

Comment "minimiser" $f(x) - \mathcal{P}_n(x)$?



Théorème 1.4

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et x_0, \dots, x_n $n + 1$ points distincts de l'intervalle $[a, b]$. Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$ et \mathcal{P}_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n passant par $(x_i, f(x_i))$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors, $\forall x \in [a, b]$, $\exists \xi_x \in (\min(x_i, x), \max(x_i, x))$,

$$f(x) - \mathcal{P}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad (9)$$

Comment "minimiser" $f(x) - \mathcal{P}_n(x)$?

"jouer" sur le choix des points x_i

Trouver $(\bar{x}_i)_{i=0}^n$, $\bar{x}_i \in [a, b]$, distincts deux à deux, tels que
 $\forall (x_i)_{i=0}^n$, $x_i \in [a, b]$, distincts 2 à 2

$$\max_{t \in [a, b]} \prod_{i=0}^n |t - \bar{x}_i| \leq \max_{t \in [a, b]} \prod_{i=0}^n |t - x_i|, \quad (10)$$

On a alors le résultat suivant



Théorème 1.5: admis

Les points réalisant (10) sont les points de Tchebychev donnés par

$$\bar{x}_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\right), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (11)$$

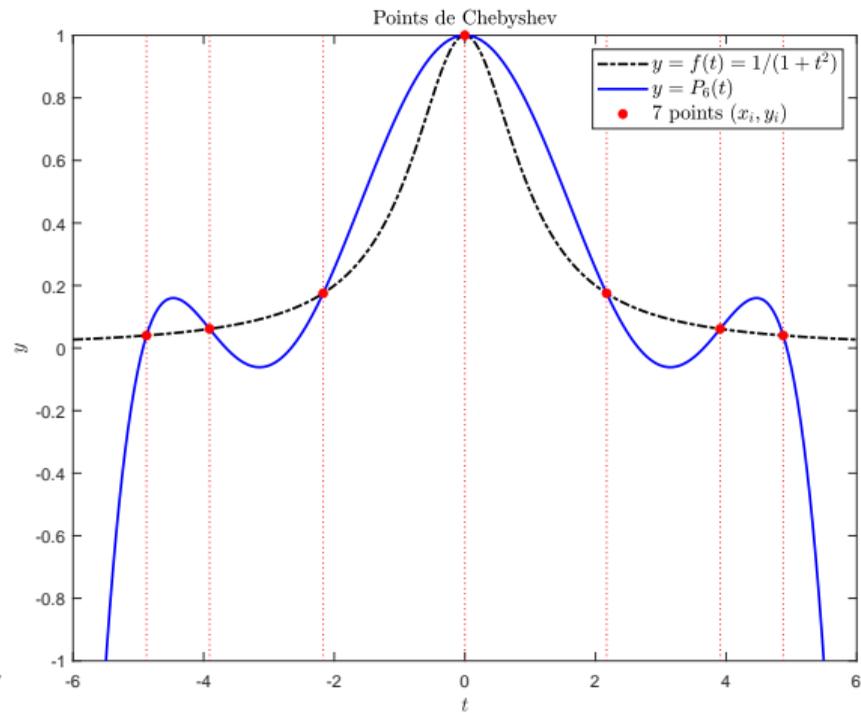
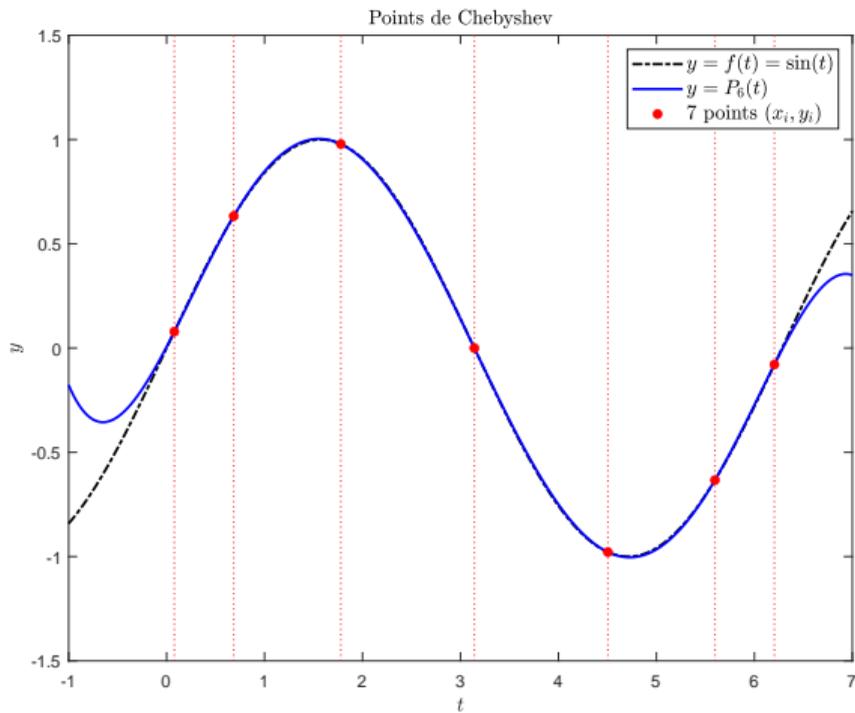


Figure: Erreurs d'interpolation avec $n = 6$

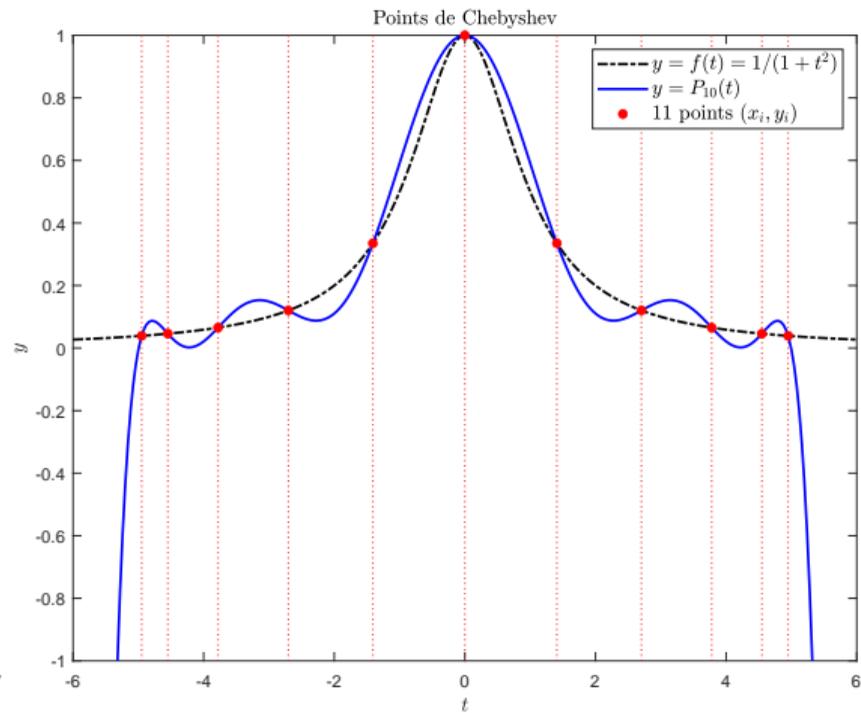
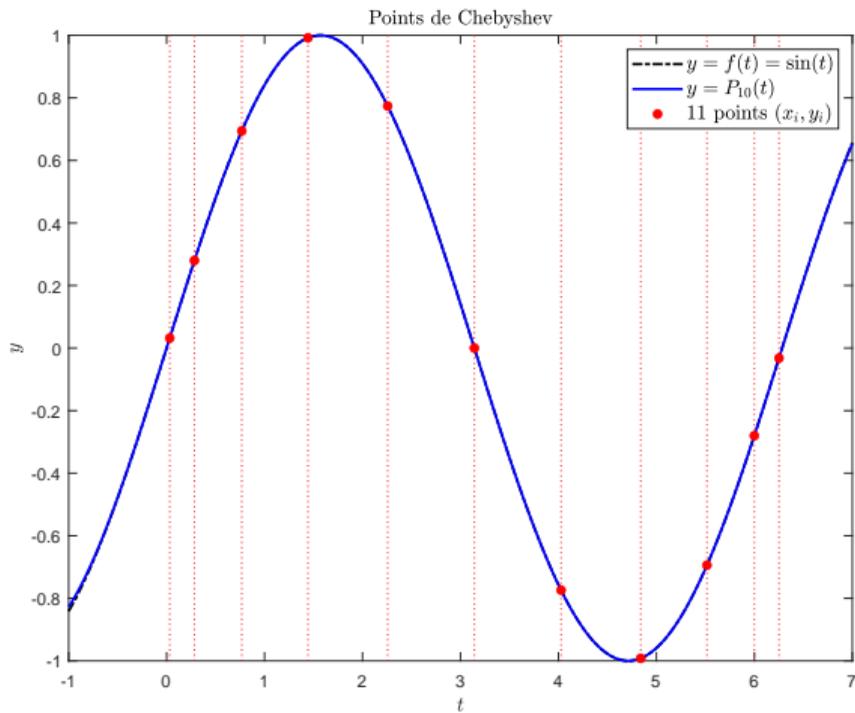


Figure: Erreurs d'interpolation avec $n = 10$

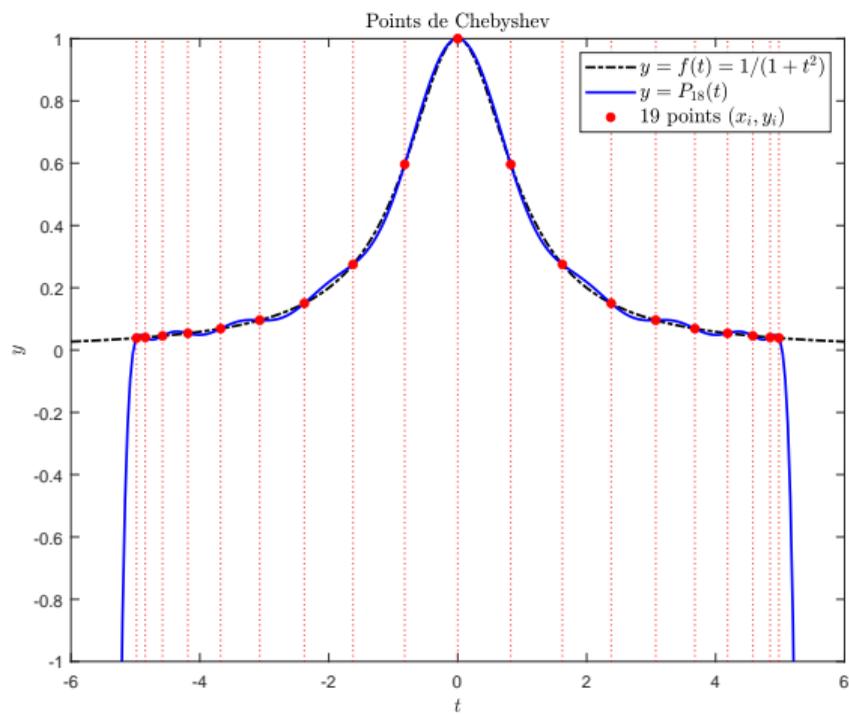
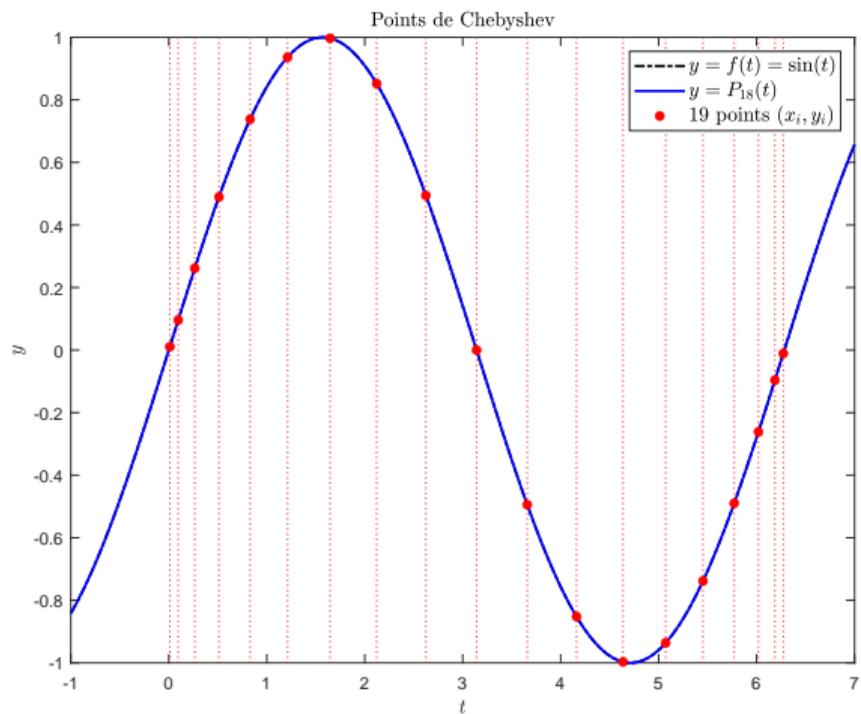


Figure: Erreurs d'interpolation avec $n = 18$

- 1 Interpolation de Lagrange
 - Stabilité

- 2 Interpolation de Lagrange-Hermite
 - Exercice
 - Résultats

On commet des erreurs sur les données

$$f_i \approx f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x) \quad \text{et} \quad \hat{P}_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i L_i(x)$$

$$\begin{aligned} |\hat{P}_n(x) - P_n(x)| &= \left| \sum_{i=0}^n (f_i - f(x_i))L_i(x) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^n |f_i - f(x_i)| |L_i(x)| \\ &\leq \max_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} |f_i - f(x_i)| \sum_{i=0}^n |L_i(x)|. \end{aligned}$$

Constante de Lebesgue : $\Lambda_n = \max_{x \in [a, b]} \sum_{i=0}^n |L_i(x)|.$

$$\left\| \hat{P}_n - P_n \right\|_{\infty} \leq \Lambda_n \max_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} |f_i - f(x_i)|.$$



Proposition 1.6:



Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et x_0, \dots, x_n des points distincts de $[a, b]$. L'application $\mathcal{L}_n : \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ qui à toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ donne le polynôme d'interpolation de Lagrange P_n associés aux couples de $(x_i, f(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est bien définie et linéaire. De plus, en munissant $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[X]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, on a

$$\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leq \Lambda_n \|f\|_\infty, \quad (12)$$

ce qui assure la continuité de \mathcal{L}_n , et

$$\|\mathcal{L}_n\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}) \\ f \neq 0}} \frac{\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \Lambda_n. \quad (13)$$



Théorème 1.7:



Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, on a

$$\|f - \mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \inf_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - Q\|_\infty \quad (14)$$

- Pour les **points équi-distants** $x_i = a + ih$, $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $h = (b - a)/n$,

$$\Lambda_n \geq \frac{2^n}{4n^2} \quad (15)$$

et le comportement asymptotique

$$\Lambda_n \approx \frac{2^{n+1}}{e \cdot n \ln(n)} \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty \quad (16)$$

- Pour les **points de Tchebychev**,

$$\Lambda_n \leq C \ln(n), \quad \text{avec } C > 0 \quad (17)$$

et le comportement asymptotique

$$\Lambda_n \approx \frac{2}{\pi} \ln(n) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty \quad (18)$$



Proposition: admis

Pour toute famille de points d'interpolation, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ telle que la suite des polynômes d'interpolation associés ne converge pas uniformément.



Proposition: admis

Soit f une fonction lipschitzienne sur $[a, b]$ à valeurs réelles, i.e. il existe une constante $K \geq 0$ telle que $\forall (x, y) \in [a, b]^2$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et x_0, \dots, x_n les points de Tchebychev $[a, b]$. On note $\mathcal{L}_n(f)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange associés aux couples de $(x_i, f(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$.
Alors la suite $(\mathcal{L}_n(f))_{n \geq 1}$ des polynômes d'interpolation converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

L'interpolation de Lagrange en des points équidistants n'est à utiliser qu'avec un nombre de points assez faible : des phénomènes d'instabilités pouvant apparaître.

- 1 Interpolation de Lagrange
 - Stabilité

- 2 Interpolation de Lagrange-Hermite
 - Exercice
 - Résultats



Exercice 5: Interpolation de Lagrange-Hermite



Soient $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ $n+1$ triplets de \mathbb{R}^3 , où les x_i sont des points distincts deux à deux de l'intervalle $[a, b]$. Le polynôme d'interpolation de **Lagrange-Hermite**, noté H_n , associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, est défini par

$$H_n(x_i) = y_i \text{ et } H'_n(x_i) = z_i, \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad (19)$$

Q.1 Quel est a priori le degré de H_n ?

On définit le polynôme P_n par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^n z_i B_i(x) \quad (20)$$

avec, pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, A_i et B_i polynômes de degré au plus $2n+1$ indépendants des valeurs y_i et z_i .

Q.2

- ➊ Déterminer des conditions suffisantes sur A_i et B_i pour que P_n vérifie (19).
- ➋ En déduire les expressions de A_i et B_i en fonction de L_i et de $L'_i(x_i)$ où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Q.3 Démontrer qu'il existe un unique polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite de degré au plus $2n+1$ défini par (19).

- 1 Interpolation de Lagrange
 - Stabilité

- 2 Interpolation de Lagrange-Hermite
 - Exercice
 - Résultats

♥ Definition 2.1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ $n + 1$ triplets de \mathbb{R}^3 , où les x_i sont des points distincts deux à deux de l'intervalle $[a, b]$. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite**, noté H_n , associé aux $n + 1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, est défini par

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^n z_i B_i(x) \quad (21)$$

avec

$$A_i(x) = (1 - 2L'_i(x_i)(x - x_i))L_i^2(x) \quad \text{et} \quad B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x) \quad (22)$$

où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$



Théorème 2.2

Le **polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite**, H_n , associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, est l'unique polynôme de degré au plus $2n + 1$, vérifiant

$$H_n(x_i) = y_i \text{ et } H'_n(x_i) = z_i, \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad (23)$$



Exercice 6: Interpolation de Lagrange-Hermite



Soit $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$. On suppose de plus que, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x_i \in [a, b]$, $y_i = f(x_i)$ et $z_i = f'(x_i)$.
On note

$$\pi_n^2(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2$$

et H_n le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux triplets $(x_i, f(x_i), f'(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$.

Q.1 Montrer que

$$|f(x) - H_n(x)| \leq \frac{\|f^{(2n+2)}\|_\infty}{(2n+2)!} \pi_n^2(x). \quad (24)$$

Indications : Etudier les zéros de la fonction $F(y) = f(y) - H_n(y) - \frac{f(x) - H_n(x)}{\pi_n^2(x)} \pi_n^2(y)$ et appliquer le théorème de Rolle.



Théorème 2.3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et x_0, \dots, x_n , $n+1$ points distincts de l'intervalle $[a, b]$. Soient $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a; b]; \mathbb{R})$ et H_n le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux $n+1$ triplets $(x_i, f(x_i), f'(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$. On a alors $\forall x \in [a, b]$, $\exists \xi_x \in (\min(x_i, x), \max(x_i, x))$, tels que

$$f(x) - H_n(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2 \quad (25)$$

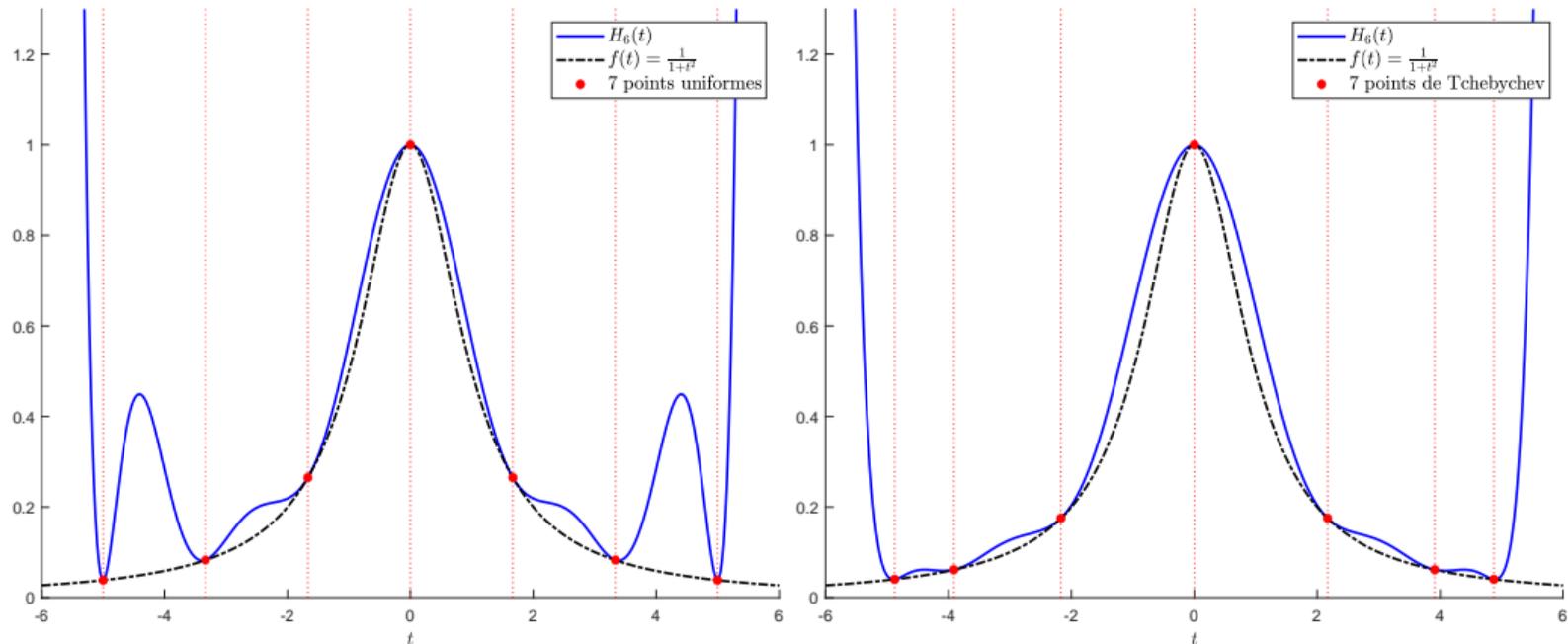


Figure: Polynôme d'interpolation de lagrange-Hermite avec $n = 6$ (7 points) pour la fonction $f : x \longrightarrow 1/(1 + 25x^2)$. A gauche avec des points uniformément répartis et à droite avec des points de Tchebychev

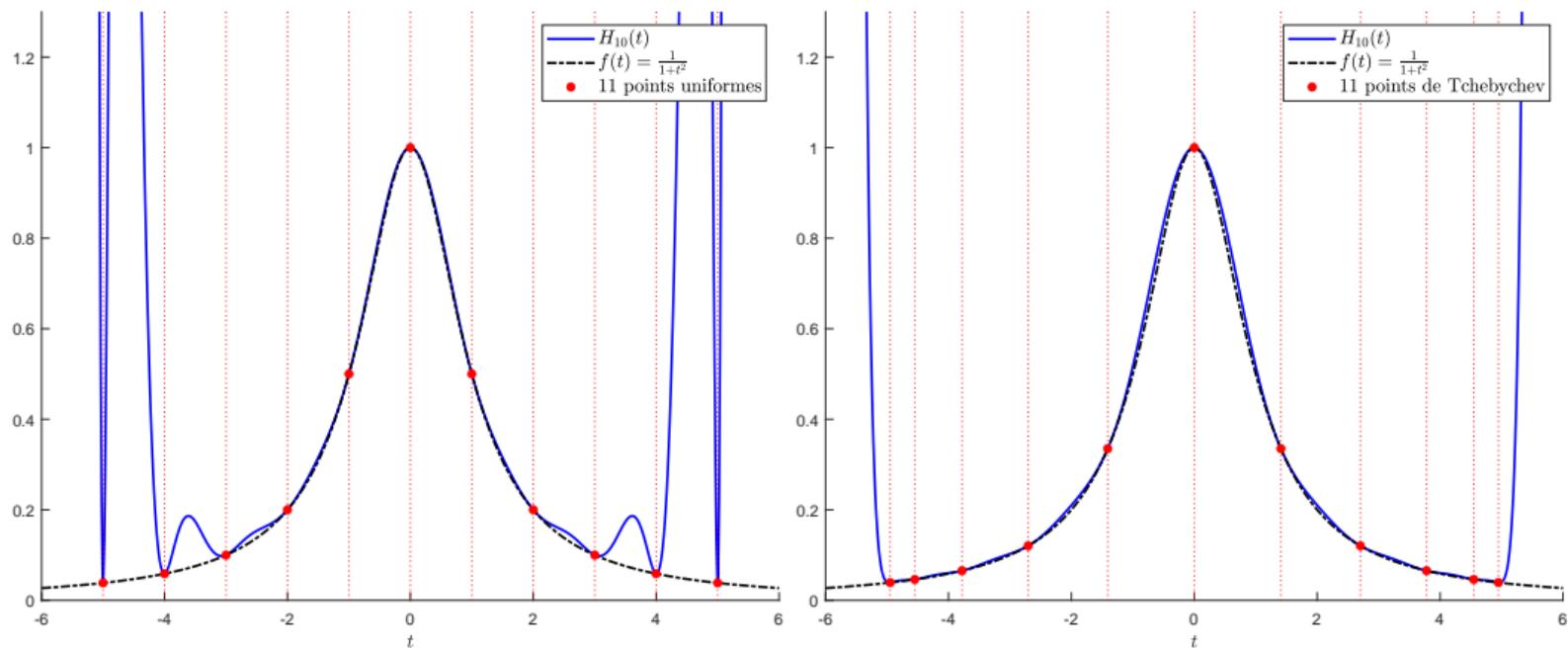


Figure: Polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite avec $n = 10$ (11 points) pour la fonction $f : x \rightarrow 1/(1+x^2)$. À gauche avec des points uniformément répartis et à droite avec des points de Tchebychev

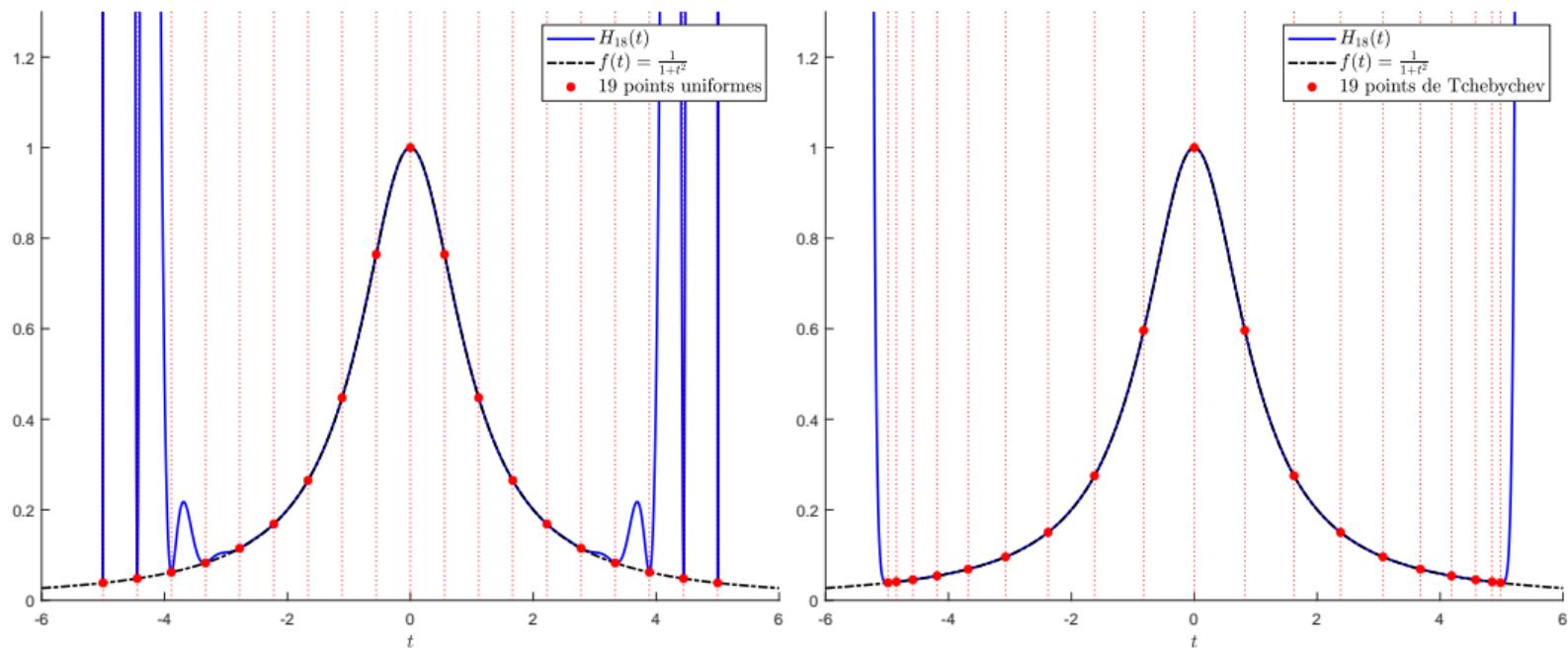


Figure: Polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite avec $n = 18$ (19 points) pour la fonction $f : x \longrightarrow 1/(1 + x^2)$. A gauche avec des points uniformément répartis et à droite avec des points de Tchebychev

♥ Definition: (rappel)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ $n + 1$ triplets de \mathbb{R}^3 , où les x_i sont des points distincts deux à deux de l'intervalle $[a, b]$. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite**, noté H_n , associé aux $n + 1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, est défini par

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^n z_i B_i(x) \quad (26)$$

avec

$$A_i(x) = (1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i))L_i^2(x) \quad \text{et} \quad B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x) \quad (27)$$

où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$



Exercice 7: Interpolation de Lagrange-Hermite



Ecrire une fonction algorithmique **HERMITE** permettant de calculer H_n (polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux $n + 1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$) en $t \in \mathbb{R}$.

Il existe de nombreuses autres façons d'approcher une fonction:

- interpolation linéaire par morceau,
- interpolation par fonctions splines,
- méthodes des moindres carrés,
- interpolation trigonométrique et FFT,
- ...