Analyse Numérique I

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 1ère année / L3 MIM

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

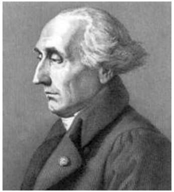
2023/11/17

Chapitre V

Interpolation

Plan

Historique



(a) *Joseph-Louis Lagrange* 1736-1813, mathématicien italien puis français

(b) *Pafnouti Lvovitch Tchebychev* 1821-1894, mathématicien russe

(c) *Charles Hermite* 1822-1901, mathématicien français

(d) *Henri-Léon Lebesgue* 1875-1941, mathématicien français

Exercice 1:

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $n+1$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux. On note

Q.1

1. *Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i de degré n vérifiant*

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \ \forall j \in [\![0, n]\!]. \tag{1}$$

2. *Montrer que les $(L_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n).*

On défini le polynôme P_n par

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x). \tag{2}$$

Q.2 *Montrer que polynôme P_n est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant $\mathrm{P}_n(x_i) = y_i, \ \forall i \in [\![1, n]\!]$.*

Definition 1.1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ avec $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ et les x_i distincts deux à deux. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange** associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, noté P_n, est donné par

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \mathrm{L}_i(x), \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

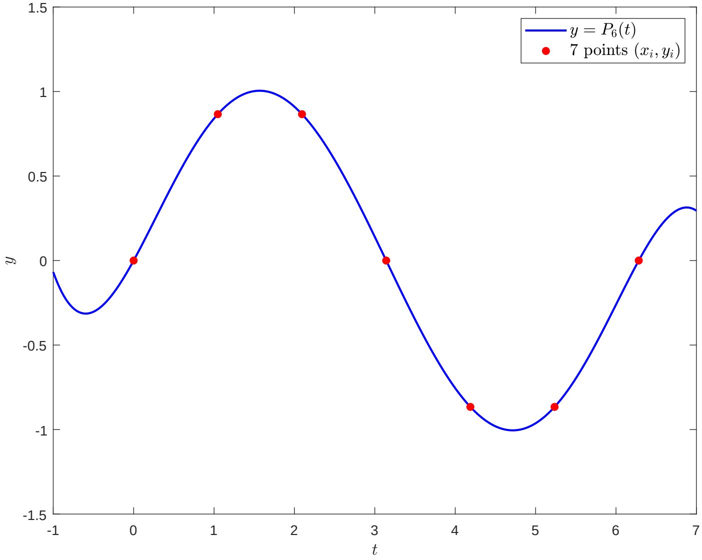
avec

$$\mathrm{L}_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \ \forall i \in [\![0, n]\!], \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Théorème 1.2

Le **polynôme d'interpolation de Lagrange**, $\mathcal{P}_n$, associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, est l'unique polynôme de degré au plus n, vérifiant

$$\mathcal{P}_n(x_i) = y_i, \ \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{5}$$



Polynôme d'interpolation de Lagrange avec 7 points donnés

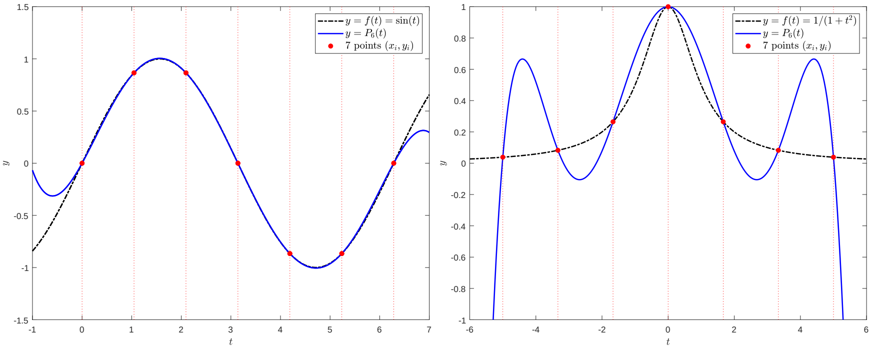
Exercice 2:

Ecrire la fonction Lagrange permettant de calculer $\mathcal{P}_n$ (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$) au point $t \in \mathbb{R}$.

Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{6}$$

On cherche à évaluer l'erreur $E_n(t) = f(t) - \mathcal{P}_n(t)$, $\forall t \in [a, b]$.

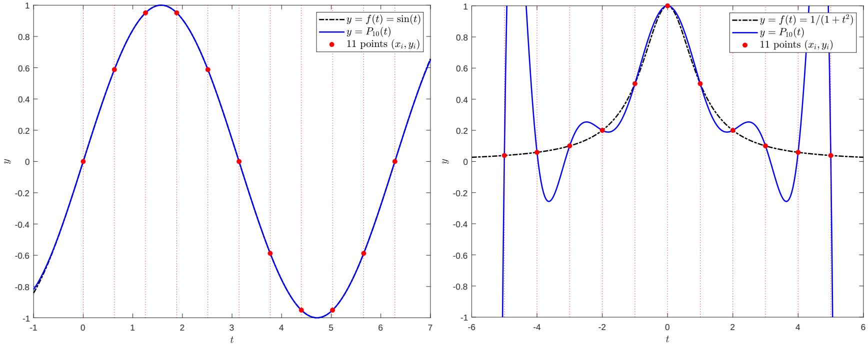


Polynômes d'interpolation de lagrange avec $n = 6$ (7 points) uniformément répartis. A gauche pour la fonction $f : t \longrightarrow sin(t)$ avec $x_0 = 0$, $x_6 = 2\pi$ et à droite pour la fonction $f : t \longrightarrow 1/(1 + t^2)$ avec $x_0 = -5$, $x_6 = 5$.

Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{6}$$

On cherche à évaluer l'erreur $E_n(t) = f(t) - \mathcal{P}_n(t)$, $\forall t \in [a, b]$.

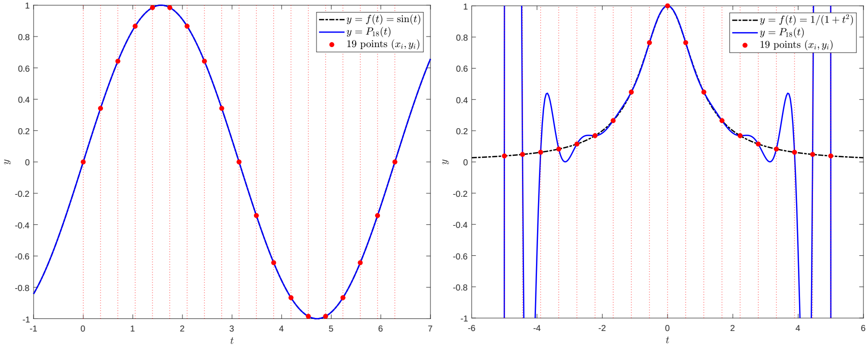


Polynômes d'interpolation de lagrange avec $n = 10$ (11 points) uniformément répartis. A gauche pour la fonction $f : t \longrightarrow sin(t)$ avec $x_0 = 0$, $x_{10} = 2\pi$ et à droite pour la fonction $f : t \longrightarrow 1/(1 + t^2)$ avec $x_0 = -5$, $x_{10} = 5$.

Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{6}$$

On cherche à évaluer l'erreur $E_n(t) = f(t) - \mathcal{P}_n(t)$, $\forall t \in [a, b]$.



Polynômes d'interpolation de lagrange avec $n = 18$ (19 points) uniformément répartis. A gauche pour la fonction $f : t \longrightarrow sin(t)$ avec $x_0 = 0$, $x_{18} = 2\pi$ et à droite pour la fonction $f : t \longrightarrow 1/(1 + t^2)$ avec $x_0 = -5$, $x_{18} = 5$.

Exercice 3:

On rappelle le théorème de Rolle:

Théorème: Rolle

Soient a, b deux réels, $a < b$, et, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que

- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$,
- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et n un entier, $n \geqslant 2$.

Q.1 *Soient $g \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$ et p un entier, $p \geqslant 1$. On suppose que g admet au moins $(p+1)$ zeros distincts dans I, notés $(x_i)_{i=0}^{p}$, et ordonnés $x_0 < x_1 < \ldots < x_p$.*
Montrer que g' admet au moins p zéros distincts dans I, séparant strictement les $(p+1)$ zéros de p.

Q.2 *Soient $u \in \mathcal{C}^n(I; \mathbb{R})$, $k \in [\![1, n[\![$ et q un entier, $q \geqslant 1$. On suppose que $u^{(k)}$, dérivée $k^{\text{ième}}$ de u, admet au moins $(q+1)$ zeros distincts dans I, notés $(t_i)_{i=0}^{q}$, et ordonnés $t_0 < t_1 < \ldots < t_q$.*
Montrer que $u^{(k+1)}$ admet au moins q zéros distincts dans I, séparant strictement les $(q+1)$ zéros de $u^{(k)}$.

Q.3 *Soit $f \in \mathcal{C}^n(I; \mathbb{R})$. On suppose que f admet au moins $(n+1)$ zeros distincts dans I, notés $(z_i)_{i=0}^{n}$.*

1. *Montrer que $f^{(n)}$ admet au moins un zéro dans I.*
2. *Peut-on abaisser la régularité de la fonction f?*

Exercice 4:

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a;b];\mathbb{R})$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $n+1$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux et $y_i = f(x_i)$.
On note par P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ et π_n le polynôme de degré $n+1$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i). \tag{7}$$

Q.1 *Montrer que, $\forall x \in [a;b]$, il existe ξ_x appartenant au plus petit intervalle fermé contenant $x, x_0, \ldots, x_n$ tel que*

$$f(x) - \mathrm{P}_n(x) = \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \tag{8}$$

Indication : *Etudier les zéros de la fonction* $F(t) = f(t) - \mathrm{P}_n(t) - \dfrac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{\pi_n(x)}\pi_n(t)$.

Théorème 1.3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \cdots, x_n$ $n+1$ points distincts de l'intervalle $[a, b]$. Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b]; \mathbb{R})$ et $\mathcal{P}_n$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n passant par $(x_i, f(x_i))$, $\forall i \in [\![0, n]\!]$. Alors, $\forall x \in [a, b]$, $\exists \xi_x \in (min(x_i, x), max(x_i, x))$,

$$f(x) - \mathcal{P}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{9}$$

Comment "minimiser" $f(x) - \mathrm{P}_n(x)$?

Théorème 1.4

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \cdots, x_n$ $n+1$ points distincts de l'intervalle $[a, b]$. Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b]; \mathbb{R})$ et $\mathcal{P}_n$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n passant par $(x_i, f(x_i))$, $\forall i \in [\![0, n]\!]$. Alors, $\forall x \in [a, b]$, $\exists \xi_x \in (min(x_i, x), max(x_i, x))$,

$$f(x) - \mathcal{P}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{9}$$

Comment "minimiser" $f(x) - \mathrm{P}_n(x)$?

"jouer" sur le choix des points x_i

Trouver $(\bar{x}_i)_{i=0}^n$, $\bar{x}_i \in [a, b]$, distincts deux à deux, tels que
$\forall (x_i)_{i=0}^n$, $x_i \in [a, b]$, distincts 2 à 2

$$\max_{t \in [a,b]} \prod_{i=0}^{n} |t - \bar{x}_i| \leqslant \max_{t \in [a,b]} \prod_{i=0}^{n} |t - x_i|, \tag{10}$$

On a alors le résultat suivant

Théorème 1.5: admis

Les points réalisant (10) sont les points de Tchebychev donnés par

$$\bar{x}_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\right), \ \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{11}$$

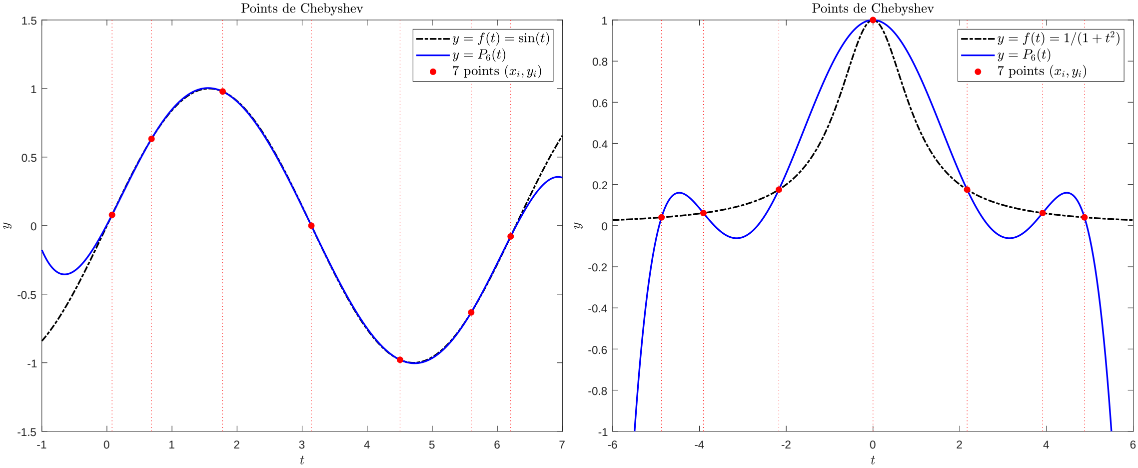


Figure: Erreurs d'interpolation avec $n = 6$

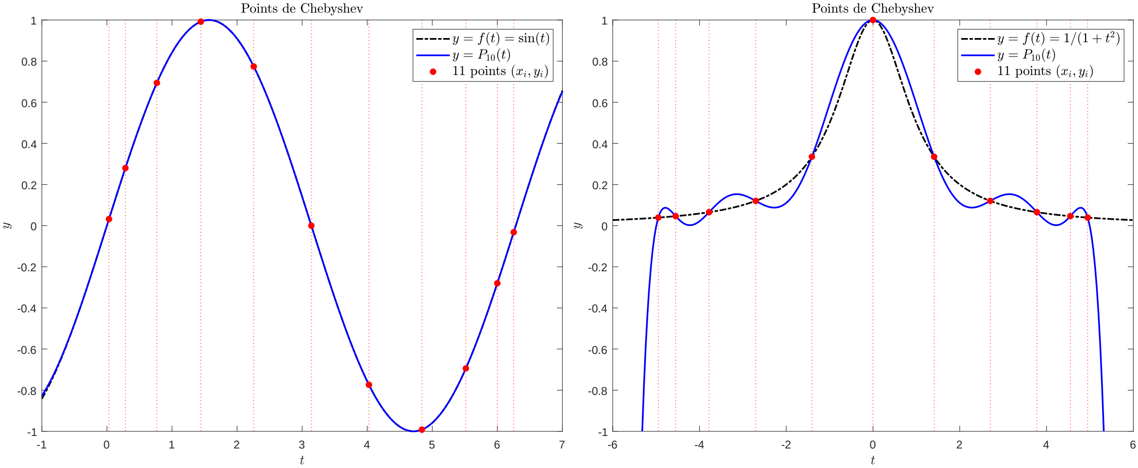


Figure: Erreurs d'interpolation avec $n = 10$

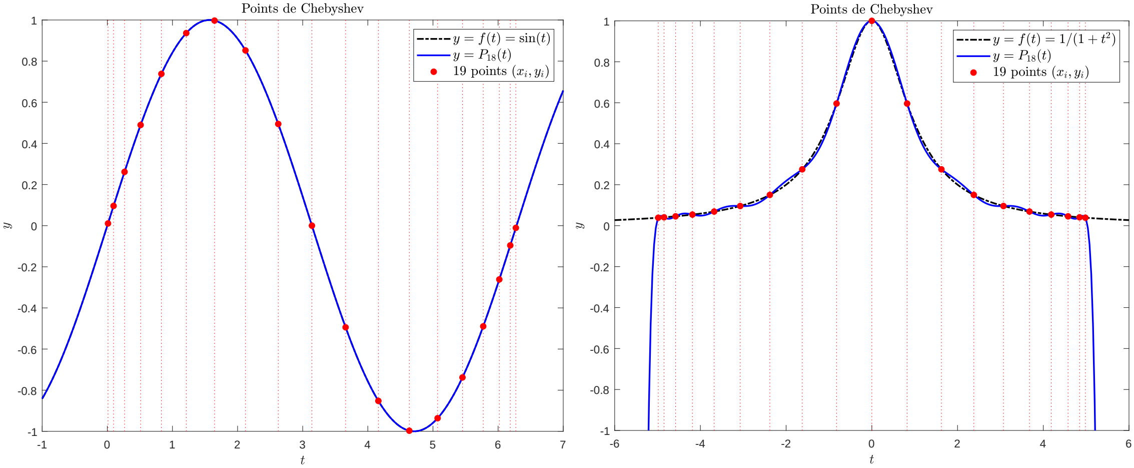


Figure: Erreurs d'interpolation avec $n = 18$

Plan

On commet des erreurs sur les données

$$f_i \approx f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]$$

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathrm{L}_i(x) \quad \text{et} \quad \widehat{\mathrm{P}}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \mathrm{L}_i(x)$$

$$\begin{aligned} |\widehat{\mathrm{P}}_n(x) - \mathrm{P}_n(x)| &= |\sum_{i=0}^{n} (f_i - f(x_i))\mathrm{L}_i(x)| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n} |f_i - f(x_i)||\mathrm{L}_i(x)| \\ &\leqslant \max_{i \in [\![0,n]\!]} |f_i - f(x_i)| \sum_{i=0}^{n} |\mathrm{L}_i(x)|. \end{aligned}$$

Constante de Lebesgue : $\Lambda_n = \max_{x \in [a,b]} \sum_{i=0}^{n} |\mathrm{L}_i(x)|.$

$$\left\|\widehat{\mathrm{P}}_n - \mathrm{P}_n\right\|_\infty \leqslant \Lambda_n \max_{i \in [\![0,n]\!]} |f_i - f(x_i)|.$$

Proposition:

Soient $n \in N^*$ et $x_0, \cdots, x_n$ des points distincts de $[a, b]$. L'application $\mathcal{L}_n : \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ qui a toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ donne le polynôme d'interpolation de Lagrange P_n associés aux couples de $(x_i, f(x_i))_{i \in [\![0,n]\!]}$ est bien définie et linéaire. De plus on a

$$\|\mathcal{L}_n\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}) \\ f \neq 0}} \frac{\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \Lambda_n. \tag{12}$$

Théorème 1.6:

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, on a

$$\|f - \mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leqslant (1 + \Lambda_n) \inf_{\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - \mathrm{Q}\|_\infty \tag{13}$$

- Pour les **points équidistants** $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$ et $h = (b-a)/n$,

$$\Lambda_n \geqslant \frac{2^n}{4n^2} \tag{14}$$

et le comportement asymptotique

$$\Lambda_n \approx \frac{2^{n+1}}{e.n\ln(n)} \quad \text{quand } n \to +\infty \tag{15}$$

- Pour les **points de Tchebychev**,

$$\Lambda_n \leqslant C\ln(n), \quad \text{avec} \quad C > 0 \tag{16}$$

et le comportement asymptotique

$$\Lambda_n \approx \frac{2}{\pi}\ln(n) \quad \text{quand } n \to +\infty \tag{17}$$

Proposition: admis

Pour toute famille de points d'interpolation, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ telle que la suite des polynômes d'interpolation associés ne converge pas uniformément.

Proposition: admis

Soit f une fonction lipschitzienne sur $[a, b]$ à valeurs réelles, i.e. il existe une constante $K \geqslant 0$ telle que $\forall (x, y) \in [a, b]^2$, on ait $|f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|$. Soient $n \in N^*$ et $x_0, \cdots, x_n$ les points de Tchebychev $[a, b]$. On note $\mathcal{L}_n(f)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange associés aux couples de $(x_i, f(x_i))_{i \in [\![0,n]\!]}$.
Alors la suite $(\mathcal{L}_n(f))_{n \geqslant 1}$ des polynômes d'interpolation converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Conclusion

L'interpolation de Lagrange en des points équidistants n'est à utiliser qu'avec un nombre de points assez faible : des phénomènes d'instabilités pouvant apparaître.

Plan

Exercice 5: Interpolation de Lagrange-Hermite

Soient $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ $n+1$ triplets de $\mathbb{R}^3$, où les x_i sont des points distincts deux à deux de l'intervalle $[a, b]$. Le polynôme d'interpolation de **Lagrange-Hermite**, noté H_n, associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, est défini par

$$\mathrm{H}_n(x_i) = y_i \quad \text{et} \quad \mathrm{H}'_n(x_i) = z_i, \ \forall i \in [\![0, n]\!] \tag{18}$$

Q.1 *Quel est a priori le degré de* H_n*?*

On défini le polynôme P_n par

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i(x) \tag{19}$$

avec, pour $i \in [\![0, n]\!]$, A_i et B_i polynômes de degré au plus $2n+1$ indépendants des valeurs y_i et z_i.

Q.2

1. *Déterminer des conditions suffisantes sur* A_i *et* B_i *pour que* P_n *vérifie* (18).
2. *En déduire les expressions de* A_i *et* B_i *en fonction de* L_i *et de* $L'_i(x_i)$ *où*

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Q.3 *Démontrer qu'il existe un unique polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite de degré au plus* $2n+1$ *défini par (18).*

Plan

Definition 2.1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i, z_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ $n+1$ triplets de $\mathbb{R}^3$, où les x_i sont des points distincts deux à deux de l'intervalle $[a, b]$. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite**, noté H_n, associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, est défini par

$$\mathrm{H}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i(x) \tag{20}$$

avec

$$A_i(x) = (1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i))L_i^2(x) \quad \text{et} \quad B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x) \tag{21}$$

où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Théorème 2.2

Le **polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite**, H_n, associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, est l'unique polynôme de degré au plus $2n+1$, vérifiant

$$\mathrm{H}_n(x_i) = y_i \quad \text{et} \quad \mathrm{H}'_n(x_i) = z_i, \quad \forall i \in [\![0, n]\!] \tag{22}$$

Exercice 6: Interpolation de Lagrange-Hermite

Soit $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a,b];\mathbb{R})$. On suppose de plus que, $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $x_i \in [a,b]$, $y_i = f(x_i)$ et $z_i = f'(x_i)$. On note

$$\pi_n^2(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)^2$$

et H_n le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux triplets $(x_i, f(x_i), f'(x_i))_{i\in[\![0,n]\!]}$.

Q.1 *Montrer que*

$$|f(x) - \mathrm{H}_n(x)| \leqslant \frac{\left\| f^{(2n+2)} \right\|_\infty}{(2n+2)!}\pi_n^2(x). \tag{23}$$

Indications : *Etudier les zéros de la fonction* $F(y) = f(y) - \mathrm{H}_n(y) - \dfrac{f(x) - \mathrm{H}_n(x)}{\pi_n^2(x)}\pi_n^2(y)$ *et appliquer le théorème de Rolle.*

Théorème 2.3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \cdots, x_n$, $n+1$ points distincts de l'intervalle $[a, b]$. Soient $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a; b]; \mathbb{R})$ et H_n le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux $n+1$ triplets $(x_i, f(x_i), f'(x_i))_{i \in [\![0,n]\!]}$. On a alors $\forall x \in [a, b]$, $\exists \xi_x \in (\min(x_i, x), \max(x_i, x))$, tels que

$$f(x) - \mathrm{H}_n(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2 \tag{24}$$

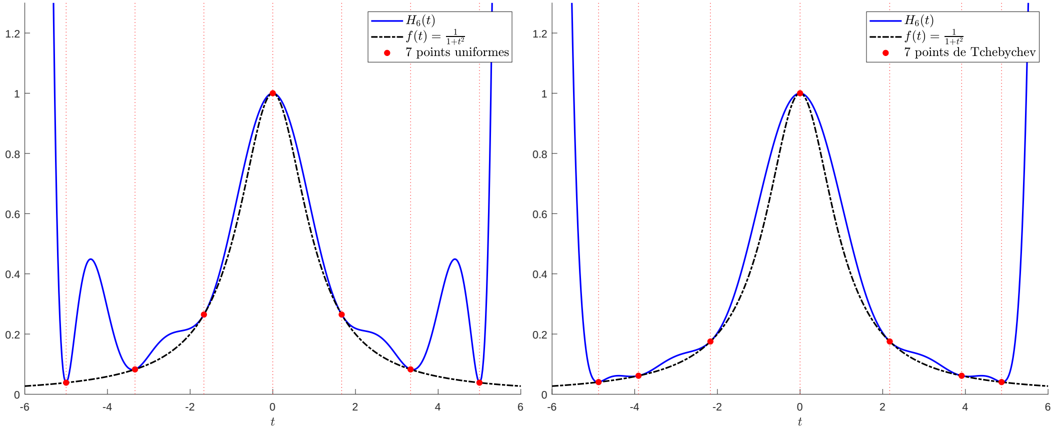


Figure: Polynôme d'interpolation de lagrange-Hermite avec $n = 6$ (7 points) pour la fonction $f : x \longrightarrow 1/(1 + 25x^2)$. A gauche avec des points uniformément répartis et à droite avec des points de Tchebychev

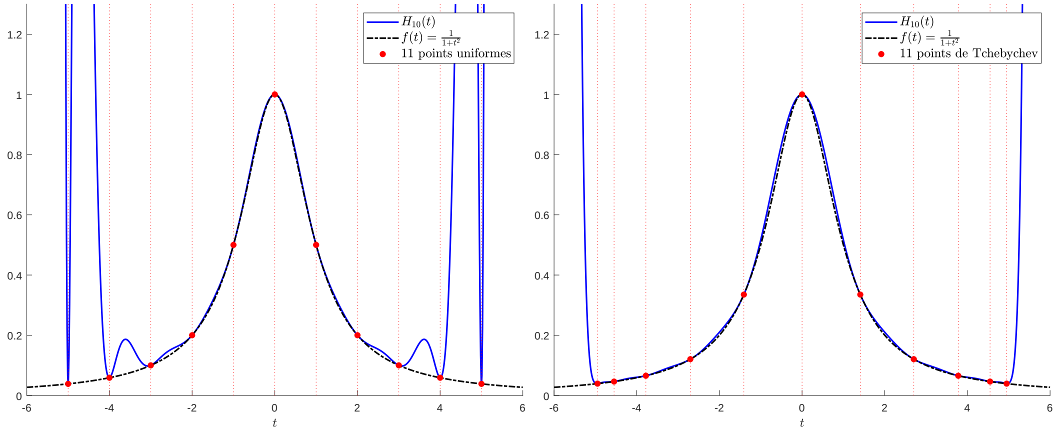
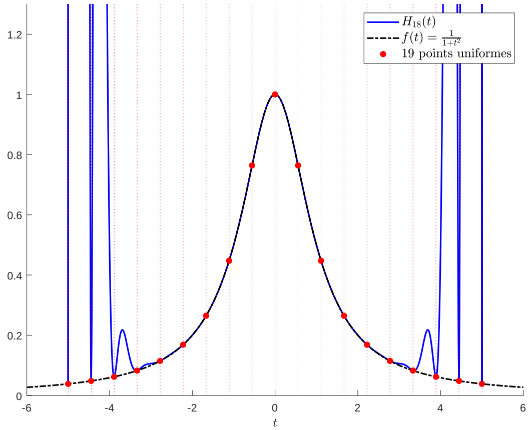


Figure: Polynôme d'interpolation de lagrange-Hermite avec $n = 10$ (11 points) pour la fonction $f : x \longrightarrow 1/(1+x^2)$. A gauche avec des points uniforméments répartis et à droite avec des points de Tchebychev



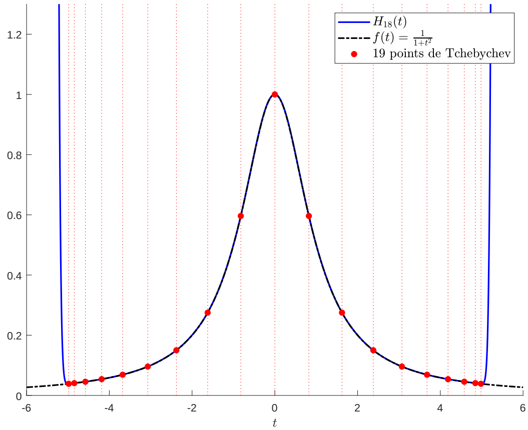


Figure: Polynôme d'interpolation de lagrange-Hermite avec $n = 18$ (19 points) pour la fonction $f : x \longrightarrow 1/(1+x^2)$. A gauche avec des points uniforméments répartis et à droite avec des points de Tchebychev

Definition: (rappel)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ $n+1$ triplets de $\mathbb{R}^3$, où les x_i sont des points distincts deux à deux de l'intervalle $[a, b]$. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite**, noté H_n, associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, est défini par

$$\mathrm{H}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i(x) \tag{25}$$

avec

$$A_i(x) = (1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i))L_i^2(x) \quad \text{et} \quad B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x) \tag{26}$$

où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Exercice 7: Interpolation de Lagrange-Hermite

Ecrire une fonction algorithmique Hermite permettant de calculer H_n (polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$) en $t \in \mathbb{R}$.

Il existe de nombreuses autres façons d'approcher une fonction:

- interpolation linéaire par morceau,
- interpolation par fonctions splines,
- méthodes des moindres carrés,
- interpolation trigonométrique et FFT,
- ...