Exercice 1

Soient $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ $n+1$ triplets de $\mathbb{R}^3$, où les x_i sont des points distincts deux à deux de l'intervalle $[a, b]$. Le polynôme d'interpolation de **Lagrange-Hermite**, noté H_n, associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, est défini par

$$\mathrm{H}_n(x_i) = y_i \quad \text{et} \quad \mathrm{H}'_n(x_i) = z_i, \ \forall i \in [\![0, n]\!] \tag{P-1}$$

Q. 1 *Quel est a priori le degré de* H_n*?* □

R. 1 On a $2n+2$ équations, donc à priori H_n est de degré $2n+1$.

On défini le polynôme P_n par

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i(x) \tag{P-2}$$

avec, pour $i \in [\![0, n]\!]$, A_i et B_i polynômes de degré au plus $2n+1$ indépendants des valeurs y_i et z_i.

Q. 2 *a. Déterminer des conditions suffisantes sur A_i et B_i pour que* P_n *vérifie* (P-1).

b. En déduire les expressions de A_i et B_i en fonction de L_i et de $L'_i(x_i)$ où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

□

R. 2 a. D'après (P-2) on a pour tout $j \in [\![0, n]\!]$

$$\mathrm{P}_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x_j) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i(x_j)$$

Pour avoir $\mathrm{P}_n(x_j) = y_j$ il suffit d'avoir

$$A_i(x_j) = \delta_{i,j} \;\text{ et }\; B_i(x_j) = 0, \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{P-3}$$

De même, on a

$$\mathrm{P}_n'(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i'(x_j) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i'(x_j)$$

et donc pour avoir $\mathrm{P}_n'(x_j) = z_j$ il suffit d'avoir

$$A_i'(x_j) = 0 \;\text{ et }\; B_i'(x_j) = \delta_{i,j}, \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{P-4}$$

b. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. On commence par déterminer le polynôme $A_i \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ vérifiant

$$A_i(x_j) = \delta_{i,j} \;\text{ et }\; A_i'(x_j) = 0, \quad \forall j \in [\![0, n]\!].$$

Les points $(x_j)_{j \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\}}$ sont racines doubles de A_i. Le polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ admet les mêmes racines (simples) que A_i et donc $L_i^2 \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ admet les mêmes racines doubles que A_i. On peut alors écrire

$$A_i(x) = \alpha_i(x) L_i^2(x) \quad \text{avec } \alpha_i(x) \in \mathbb{R}_1[X].$$

Il reste à déterminer le polynôme α_i. Or on a

$$A_i(x_i) = 1 \;\text{ et }\; A_i'(x_i) = 0.$$

Comme $L_i(x_i) = 1$, on obtient

$$A_i(x_i) = \alpha_i(x_i)L_i^2(x_i) = \alpha_i(x_i) = 1$$

et

$$A_i'(x_i) = \alpha_i'(x_i)L_i^2(x_i) + 2\alpha_i(x_i)L_i'(x_i)L_i(x_i) = \alpha_i'(x_i) + 2\alpha_i(x_i)L_i'(x_i) = 0$$

c'est à dire

$$\alpha_i(x_i) = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_i'(x_i) = -2L_i'(x_i).$$

Comme α_i est un polynôme de degré 1 on en déduit

$$\alpha_i(x) = 1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i)$$

et donc

$$A_i(x) = (1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i))L_i^2(x). \tag{P-5}$$

On détermine ensuite le polynôme $B_i \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ vérifiant

$$B_i(x_j) = 0 \quad \text{et} \quad B_i'(x_j) = \delta_{i,j}, \quad \forall j \in [\![0, n]\!].$$

Les points $(x_j)_{j\in[\![0,n]\!]\setminus\{i\}}$ sont racines doubles de B_i et le point x_i est racine simple. Le polynôme $L_i^2 \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ admet les mêmes racines doubles. On peut alors écrire

$$B_i(x) = C(x - x_i)L_i^2(x) \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Il reste à déterminer la constante C. Or $L_i(x_i) = 1$ et comme $B_i'(x_i) = 1$ on obtient

$$B_i'(x_i) = CL_i^2(x_i) + 2C(x_i - x_i)L_i'(x_i)L_i(x_i) = C = 1$$

ce qui donne

$$B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x). \tag{P-6}$$

On vient de démontrer l'existence en construisant un polynôme de degré $2n + 1$ vérifiant (P-1).

Q. 3 *Démontrer qu'il existe un unique polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite de degré au plus $2n+1$ défini par (P-1).* $\square$

R. 3 Deux démonstrations pour l'unicité sont proposées (la deuxième donne aussi l'existence).

dém. 1: Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ vérifiant (P-1). Le polynôme $\mathrm{R} = \mathrm{P} - \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ admet alors $n+1$ racines doubles distinctes :$(x_0, \cdots, x_n)$. Or le seul polynôme de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ ayant $n+1$ racines doubles est le polynôme nul et donc $\mathrm{R} = 0$, i.e. $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$.

dém. 2: Soit $\Phi : \mathbb{R}_{2n+1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$ définie par

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_{2n+1}[X], \quad \Phi(\mathrm{P}) = (\mathrm{P}(x_0), \cdots, \mathrm{P}(x_n), \mathrm{P}'(x_0), \cdots, \mathrm{P}'(x_n)).$$

L'existence et l'unicité du polynôme H_n est équivalente à la bijectivité de l'application Φ. Or celle-ci est une application linéaire entre deux espaces de dimension $2n+2$. Elle est donc bijective si et seulement si elle injective (ou surjective). Pour vérifier l'injectivité de Φ il est nécessaire et suffisant de vérifier que son noyau est réduit au polynôme nul.
Soit $\mathrm{P} \in \ker \Phi$. On a alors $\Phi(\mathrm{P}) = \mathbf{0}_{2n+2}$ et donc $(x_0, \cdots, x_n)$ sont $n+1$ racines doubles distinctes de P. Or le seul polynôme de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ ayant $n+1$ racines doubles est le polynôme nul et donc $\mathrm{P} = 0$.