

EXERCICE 1

Soit $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$. On suppose de plus que, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x_i \in [a, b]$, $y_i = f(x_i)$ et $z_i = f'(x_i)$.
On note

$$\pi_n^2(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2$$

et H_n le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux triplets $(x_i, f(x_i), f'(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$.

Q. 1 Montrer que

$$|f(x) - H_n(x)| \leq \frac{\|f^{(2n+2)}\|_{\infty}}{(2n+2)!} \pi_n^2(x). \quad (\text{P-1})$$

Indications : Etudier les zéros de la fonction $F(y) = f(y) - H_n(y) - \frac{f(x) - H_n(x)}{\pi_n^2(x)} \pi_n^2(y)$ et appliquer le théorème de Rolle. □

R. 1 Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $f(x_i) - H_n(x_i) = 0$ et l'inégalité (P-1) est donc vérifiée pour $x = x_i$.

Soit $x \in [a, b]$ tel que $x \neq x_i$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a alors $\pi_n^2(x) \neq 0$. Comme $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$, $H_n \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ et $\pi_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, on en déduit que

$$F \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R}).$$

On note que π_n^2 admet (x_0, \dots, x_n) comme racines doubles distinctes. Par construction $f - H_n$ admet les mêmes racines doubles. On en déduit alors que F admet aussi (x_0, \dots, x_n) comme racines doubles. De plus, on a $F(x) = 0$ (i.e. x est racine simple) et donc

F admet au moins $2n + 3$ racines (comptées avec leurs multiplicités).

Les points x, x_0, \dots, x_n étant distincts, la fonction F' admet par le théorème de Rolle $n + 1$ zeros distincts entre eux et distincts des points x, x_0, \dots, x_n . De plus les points x_0, \dots, x_n sont racines de F' puisque racines doubles de F . On en déduit alors que

F' admet au moins $2n + 2$ racines distinctes deux à deux.

Par applications successives du théorème de Rolle, on abouti a :

$F^{(2n+2)}$ admet au moins une racine notée $\xi_x \in]a, b[$.

On a alors

$$F^{(2n+2)}(\xi_x) = 0 = f^{(2n+2)}(\xi_x) - H_n^{(2n+2)}(\xi_x) - \frac{f(x) - H_n(x)}{\pi_n^2(x)} \frac{d^{2n+2}\pi_n^2}{dx^{2n+2}}(\xi_x)$$

Comme $H_n \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ on a $H_n^{(2n+2)} \equiv 0$. De plus comme $\pi_n^2(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2 \in \mathbb{R}_{2n+2}[X]$ sa dérivée d'ordre $2n + 2$ est constante et

$$\frac{d^{2n+2}\pi_n^2}{dx^{2n+2}} = (2n + 2)!$$

On en déduit alors

$$f^{(2n+2)}(\xi_x) = \frac{f(x) - H_n(x)}{\pi_n^2(x)} (2n + 2)!$$

On a donc montrer que $\forall x \in [a, b] \exists \xi_x \in]a, b[$ tels que

$$f(x) - H_n(x) = \frac{\pi_n^2(x)}{(2n + 2)!} f^{(2n+2)}(\xi_x).$$

Comme $\pi_n^2(x) \geq 0$ on obtient bien (P-1).

