

Théorème 0.1

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, on a

$$\|f - \mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \inf_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - Q\|_\infty \quad (\text{P-1})$$

Proof. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Par unicité du théorème d'interpolation on a $\mathcal{L}_n(Q) = Q$ et alors

$$\begin{aligned} \|f - \mathcal{L}_n(f)\|_\infty &= \|f - Q + \mathcal{L}_n(Q) - \mathcal{L}_n(f)\|_\infty \\ &\leq \|f - Q\|_\infty + \|\mathcal{L}_n(Q - f)\|_\infty \quad \text{par linéarité de } \mathcal{L}_n \\ &\leq \|f - Q\|_\infty + \Lambda_n \|f - Q\|_\infty \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

