

EXERCICE 1

Ecrire une fonction algorithmique **HERMITE** permettant de calculer H_n (polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux $n + 1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$) en $t \in \mathbb{R}$.

~~~~~

### Correction

**But :** Calculer le polynôme  $H_n(t)$  défini par (4.26)

**Données :**  $\mathbf{X}$  : vecteur/tableau de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $X(i) = x_{i-1} \ \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$  et  
 $X(i) \neq X(j)$  pour  $i \neq j$ ,  
 $\mathbf{Y}$  : vecteur/tableau de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $Y(i) = y_{i-1} \ \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ ,  
 $\mathbf{Z}$  : vecteur/tableau de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $Z(i) = z_{i-1} \ \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ ,  
 $t$  : un réel.

**Résultat :** pH : le réel pH =  $H_n(t)$ .

D'après la Définition 4.9, on a

$$H_n(t) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(t) + \sum_{i=0}^n z_i B_i(t) = \sum_{i=0}^n (y_i A_i(t) + z_i B_i(t))$$

avec

$$A_i(t) = (1 - 2L'_i(x_i)(t - x_i))L_i^2(t) \quad \text{et} \quad B_i(t) = (t - x_i)L_i^2(t)$$

où

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - x_j}{x_i - x_j}.$$

Pour rendre effectif le calcul de  $H_n(t)$ , il reste à déterminer  $L'_i(x_i)$ . On a

$$L'_i(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_k} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i \\ j \neq k}}^n \frac{t - x_j}{x_i - x_j}$$

d'où

$$L'_i(x_i) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_k}. \quad (\text{P-1})$$

La fonction que l'on va écrire use (et certains diront abuse) de fonctions.

---

**Algorithme 1** Fonction **HERMITE** permettant de calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite  $H_n(t)$  définit par (4.26)

---

```

1: Fonction pH  $\leftarrow$  HERMITE (  $X, Y, Z, t$  )
2:   pH  $\leftarrow$  0
3:   Pour  $i \leftarrow 0$  à  $n$  faire
4:     pH  $\leftarrow$  pH + POLYA( $i, X, t$ ) *  $Y(i+1)$  + POLYB( $i, X, t$ ) *  $Z(i+1)$ 
5:   Fin Pour
6: Fin Fonction

```

---

Les différentes fonctions utilisées pour la fonction **HERMITE** (directement ou indirectement) sont les suivantes :

**POLYA** : calcul du polynôme  $A_i$  en  $t$ , (données  $i, X, t$ )

**POLYB** : calcul du polynôme  $B_i$  en  $t$ , (données  $i, X, t$ )

**POLYL** : calcul du polynôme  $L_i$  en  $t$ , (données  $i, X, t$ )

**POLYLP** : calcul de  $L'_i(x_i)$ , (données  $i, X$ )

---

**Algorithme 2** Fonction **POLYA** permettant de calculer le polynôme  $A_i$  en  $t \in \mathbb{R}$  donné par  $A_i(t) = (1 - 2L'_i(x_i)(t - x_i))L_i^2(t)$

---

```

1: Fonction  $y \leftarrow$  POLYA (  $i, X, t$  )
2:    $y \leftarrow (1 - 2 * \text{POLYLP}(i, X) * (t - X(i+1))) * (\text{POLYL}(i, X, t))^2$ 
3: Fin Fonction

```

---



---

**Algorithme 3** Fonction **POLYB** permettant de calculer le polynôme  $B_i$  en  $t \in \mathbb{R}$  donné par  $B_i(t) = (t - x_i)L_i^2(t)$

---

```

1: Fonction  $y \leftarrow$  POLYB (  $i, X, t$  )
2:    $y \leftarrow (t - X(i+1)) * (\text{POLYL}(i, X, t))^2$ 
3: Fin Fonction

```

---

---

**Algorithme 4** Fonction **POLYL** permettant de calculer le polynôme  $L_i$  en  $t \in \mathbb{R}$

donné par  $L_i(t) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{t - x_j}{x_i - x_j}$

---

```

1: Fonction  $y \leftarrow \text{POLYL} (i, \mathbf{X}, t)$ 
2:    $y \leftarrow 1$ 
3:   Pour  $j \leftarrow 0$  à  $n$ , ( $j \sim = i$ ) faire
4:      $y \leftarrow y * (t - X(j + 1)) / (X(i + 1) - X(j + 1))$ 
5:   Fin Pour
6: Fin Fonction

```

---



---

**Algorithme 5** Fonction **POLYLP** permettant de calculer  $L'_i(x_i) = \sum_{k=0, k \neq i}^n \frac{1}{x_i - x_k}$

---

```

1: Fonction  $y \leftarrow \text{POLYLP} (i, \mathbf{X})$ 
2:    $y \leftarrow 0$ 
3:   Pour  $k \leftarrow 0$  à  $n$ , ( $k \sim = i$ ) faire
4:      $y \leftarrow y + 1 / (X(i + 1) - X(k + 1))$ 
5:   Fin Pour
6: Fin Fonction

```

---

Bien évidemment une telle écriture est loin d'être optimale mais elle a l'avantage d'être facile à programmer et facile à lire car elle "colle" aux formules mathématiques.

On laisse le soin au lecteur d'écrire des fonctions plus performantes...

◇

