Exercice 1

On rappelle le théorème de Rolle:

Théorème: Rolle

Soient a, b deux réels, $a < b$, et, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que

- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$,
- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et n un entier, $n \geqslant 2$.

Q. 1 *Soient $g \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$ et p un entier, $p \geqslant 1$. On suppose que g admet au moins $(p + 1)$ zeros distincts dans I, notés $(x_i)_{i=0}^{p}$, et ordonnés $x_0 < x_1 < \ldots < x_p$.*
Montrer que g' admet au moins p zéros distincts dans I, séparant strictement les $(p + 1)$ zéros de p. □

R. 1 On peut appliquer le théorème de Rolle sur chacun des intervalles d'extrémités deux zéros consécutifs de g. En effet, soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On a $[x_{k-1}, x_k] \subset I$ et

- g est continue sur $[x_{k-1}, x_k]$,
- g est dérivable sur $]x_{k-1}, x_k[$,
- $g(x_{k-1}) = g(x_k)$ $(= 0)$.

D'après le théorème de Rolle, il existe alors $\xi_k \in]x_{k-1}, x_k[$ tel que $g'(\xi_k) = 0$.
On a donc

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \quad g'(\xi_k) = 0$$

et

$$x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \ldots < x_{p-1} < \xi_p < x_p.$$

Ceci démontre que g' admet au moins p zéros distincts dans I, séparant strictement les $(p+1)$ zéros de g.

Q. 2 *Soient $u \in \mathcal{C}^n(I;\mathbb{R})$, $k \in [\![1, n[\![$ et q un entier, $q \geqslant 1$. On suppose que $u^{(k)}$, dérivée $k^{ième}$ de u, admet au moins $(q+1)$ zeros distincts dans I, notés $(t_i)_{i=0}^q$, et ordonnés $t_0 < t_1 < \ldots < t_q$.*
Montrer que $u^{(k+1)}$ admet au moins q zéros distincts dans I, séparant strictement les $(q+1)$ zéros de $u^{(k)}$. □

R. 2 Comme $u \in \mathcal{C}^n(I;\mathbb{R})$ et $k \in [\![1, n[\![$, on obtient

$$u^{(k)} \in \mathcal{C}^{n-k}(I;\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R}).$$

On peut donc appliquer le résultat de la question précédente avec $g = u^{(k)}$ et $p = q$. On conclu donc que $g' = u^{(k+1)}$ admet au moins q zéros distincts dans I, séparant strictement les $(q+1)$ zéros de $g = u^{(k)}$.

Q. 3 *Soit $f \in \mathcal{C}^n(I;\mathbb{R})$. On suppose que f admet au moins $(n+1)$ zeros distincts dans I, notés $(z_i)_{i=0}^n$.*

a. Montrer que $f^{(n)}$ admet au moins un zéro dans I.

b. *Peut-on abaisser la régularité de la fonction f?*

$\square$

R. 3 a. On note $(x_i)_{i=0}^n$ les $(z_i)_{i=0}^n$ ordonnés par ordre croissant. On a donc $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ et ce sont $(n+1)$ zeros distincts de f. Comme $f \in \mathcal{C}^n(I;\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})$, on peut utiliser le résultat de **Q.1** avec $g = f$ et $p = n$, pour obtenir que $f^{(1)}$ admet n zéros distincts sur I (que l'on peut toujours ordonner au besoin).

Comme $f \in \mathcal{C}^n(I;\mathbb{R})$ et $n \geqslant 2$, on a $f^{(1)} \in \mathcal{C}^{n-1}(I;\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})$. On peut utiliser le résultat de **Q.2** avec $u = f$, $k = 1$ et $q = n$, pour obtenir que $f^{(2)}$ admet $(n-1)$ zéros distincts sur I (que l'on peut toujours ordonner au besoin).

Grâce à la régularité de f, on peut itérer le processus jusque la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f par application du résultat de **Q.2**.

$$\begin{array}{rl}
f^{(1)} \in \mathcal{C}^{n-1}(I;\mathbb{R}),\ \ n \text{ zéros distincts} \Longrightarrow & \textbf{Q.2} \text{ avec } u = f,\ k = 1,\ q = n : \\
& f^{(2)} \in \mathcal{C}^{n-2}(I;\mathbb{R}),\ \ (n-1) \text{ zéros distincts} \\
\Longrightarrow & \textbf{Q.2} \text{ avec } u = f,\ k = 2,\ q = n-1 : \\
& f^{(3)} \in \mathcal{C}^{n-3}(I;\mathbb{R}),\ \ (n-2) \text{ zéros distincts} \\
\ldots & \\
\Longrightarrow & \textbf{Q.2} \text{ avec } u = f,\ k = n-2,\ q = 3 : \\
& f^{(n-1)} \in \mathcal{C}^{1}(I;\mathbb{R}),\ \ 2 \text{ zéros distincts} \\
\Longrightarrow & \textbf{Q.2} \text{ avec } u = f,\ k = n-1,\ q = 2 : \\
& f^{(n)} \in \mathcal{C}^{0}(I;\mathbb{R}),\ \ 1 \text{ zéro.}
\end{array}$$

b. En fait, dans **Q.1**, il n'est pas necessaire d'avoir $g \in \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})$ pour appliquer le théorème de Rolle, il suffit d'avoir $g \in \mathcal{C}^0(I;\mathbb{R})$ et g dérivable sur I.

De même, on déduit que pour **Q.2**, il n'est pas necessaire d'avoir $u \in \mathcal{C}^n(I;\mathbb{R})$, il suffit d'avoir $u \in \mathcal{C}^{n-1}(I;\mathbb{R})$ et $u^{(n-1)}$ dérivable sur I.
On peut donc abaisser la régularité de f à $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I;\mathbb{R})$ et $f^{(n-1)}$ dérivable sur I.