Exercice

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$.

Q. 1 *Ecrire la fonction algorithmique* HOUSEHOLDER *permettant de retourner une matrice de Householder* $\mathbb{H}$ *et* $\alpha \in \mathbb{C}$ *tels que* $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$. *Le choix du* α *est fait par le paramètre* δ *(*0 *ou* 1*) de telle sorte que* $\arg\alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle) + \delta\pi$ *avec* $|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2$.
Des fonctions comme DOT$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *(produit scalaire de deux vecteurs),* NORM$(\boldsymbol{a})$ *(norme* 2 *d'un vecteur),* ARG(z) *(argument d'un nombre complexe),* MATPROD$(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ *(produit de deux matrices),* CTRANSPOSE$(\mathbb{A})$ *(adjoint d'une matrice), ... pourront être utilisées*

Q. 2 *Proposer un programme permettant de tester cette fonction. On pourra utiliser la fonction* VECRAND(n) *retournant un vecteur aléatoire de* $\mathbb{C}^n$, *les parties réelles et imaginaires de chacune de ses composantes étant dans* $]0, 1[$ *(loi uniforme).*

Q. 3 *Proposer un programme permettant de vérifier que* $\delta = 1$ *est le "meilleur" choix.*

Correction Exercice Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires de $\mathbb{C}^n$.

Q. 1 Les données du problème sont $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et δ. On veut calculer α et la matrice $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})$.

Algorithme 1 Calcul du α et de la matrice de Householder $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})$ telle que $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$.

Données : $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$: deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$ non nuls et non colinéaires.
δ : 0 ou 1, permet de déterminer α.

Résultat : $\mathbb{H}$: matrice de Householder dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
α : nombre complexe, de module $\|\boldsymbol{a}\|_2$ et d'argument $-\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle) + \delta\pi$.

Fonction $[\mathbb{H}, \alpha] \leftarrow$ HOUSEHOLDER ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \delta$)
  ab $\leftarrow$ DOT$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ ▷ DOT produit scalaire dans $\mathbb{C}$.
  $\alpha \leftarrow$ NORM$(\boldsymbol{a}) * exp(i * (\delta * \pi -$ ARG$(ab)))$
  $\boldsymbol{u} \leftarrow \boldsymbol{a} - \alpha * \boldsymbol{b}$
  $\boldsymbol{u} \leftarrow \boldsymbol{u}/$NORM$(\boldsymbol{u})$
  $\mathbb{H} \leftarrow$ EYE$(n) - 2 *$ MATPROD$(\boldsymbol{u},$ CTRANSPOSE$(\boldsymbol{u}))$
Fin Fonction

Q. 2
$n \leftarrow 100$
$\boldsymbol{a} \leftarrow$ VECRAND(n)
$\boldsymbol{b} \leftarrow$ VECRAND(n)
$\boldsymbol{b} \leftarrow \boldsymbol{b}/$NORM$(\boldsymbol{b}, 2)$
$[\mathbb{H}, \alpha] \leftarrow$ HOUSEHOLDER$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, 0)$
error $\leftarrow$ NORM$(\mathbb{H} * \boldsymbol{a} - \alpha * \boldsymbol{b}, 2)$

Q. 3
$n \leftarrow 100$
$\boldsymbol{a} \leftarrow$ VECRAND(n)
$\boldsymbol{b} \leftarrow \boldsymbol{a} + 1e - 6 *$ VECRAND(n)
$\boldsymbol{b} \leftarrow \boldsymbol{b}/$NORM$(\boldsymbol{b}, 2)$
$[\mathbb{H}_1, \alpha_1] \leftarrow$ HOUSEHOLDER$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, 1)$
$[\mathbb{H}_0, \alpha_0] \leftarrow$ HOUSEHOLDER$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, 0)$
error0 $\leftarrow$ NORM$(\mathbb{H}_0 * \boldsymbol{a} - \alpha_0 * \boldsymbol{b}, 2)/(1 +$ ABS$(\alpha_0))$

8: error1 $\leftarrow$ NORM$(\mathbb{H}_1 * \boldsymbol{a} - \alpha_1 * \boldsymbol{b}, 2)/(1 + \text{ABS}(\alpha_1))$

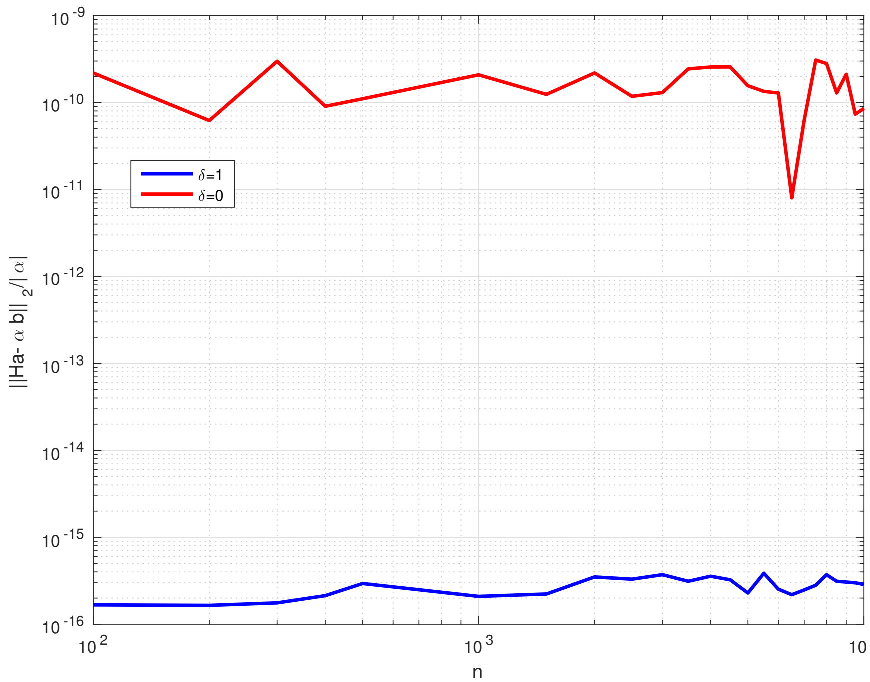

Figure 1: Choix de α dans HOUSEHOLDER : erreur relative en norme L_2

◇