

## Exercice

Soit  $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{K})$  la matrice bloc

$$\mathbb{B} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hline 0 & \mathbb{S} \end{array} \right)$$

où  $\mathbb{B}_{1,1} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$  et  $\mathbb{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On note  $\mathbf{s} \in \mathbb{K}^n$  le premier vecteur colonne de  $\mathbb{S}$  et on suppose que  $\mathbf{s} \neq 0$  et  $\mathbf{s}$  non colinéaire à  $\mathbf{e}_1^n$  premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .

**Q. 1** 1. Montrer qu'il existe une matrice de Householder  $\underline{\mathbb{H}} = \mathbb{H}(\underline{\mathbf{u}}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\alpha \in \mathbb{K}^*$  tel que

$$\underline{\mathbb{H}}\mathbb{S} = \left( \begin{array}{c|ccc} \pm\alpha & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array} \right).$$

2. On note  $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^{m+n}$ , le vecteur défini par  $u_i = 0$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$  et  $u_{m+i} = \underline{u}_i$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Montrer que

$$\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbb{B} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hline 0 & \underline{\mathbb{H}}\mathbb{S} \end{array} \right).$$

Soient  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  et  $\mathbb{A}^{[k]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  la matrice bloc définie par

$$\mathbb{A}^{[k]} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{R}^{[k]} & \mathbb{F}^{[k]} \\ \hline 0 & \underline{\mathbb{A}}^{[k]} \end{array} \right)$$

où  $\mathbb{R}^{[k]}$  est une matrice triangulaire supérieure d'ordre  $k$  et  $\underline{\mathbb{A}}^{[k]}$  une matrice d'ordre  $n-k$ .

**Q. 2** 1. Sous certaines hypothèses, montrer qu'il existe une matrice de Householder  $\mathbb{H}^{[k+1]}$  telle que  $\mathbb{H}^{[k+1]}\mathbb{A}^{[k]} = \mathbb{A}^{[k+1]}$ .

2. Soit  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer qu'il existe une matrice unitaire  $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , produit d'au plus  $n - 1$  matrices de Householder, et une matrice triangulaire supérieure  $\mathbb{R}$  telles que  $\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}$ .
3. Montrer que si  $\mathbb{A}$  est réelle alors les coefficients diagonaux de  $\mathbb{R}$  peuvent être choisis positifs ou nuls.
4. Montrer que si  $\mathbb{A}$  est réelle inversible alors la factorisation  $\mathbb{Q}\mathbb{R}$ , avec  $\mathbb{R}$  à coefficients diagonaux strictement positifs, est unique.

### Correction Exercice

**Q. 1** 1. D'après le Corollaire 3.21, page 93, avec  $\mathbf{a} = \mathbf{s}$ , en posant  $\alpha = \pm \|\mathbf{s}\|_2 e^{i \arg s_1}$  et

$$\underline{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{s} - \alpha \mathbf{e}_1^n}{\|\mathbf{s} - \alpha \mathbf{e}_1^n\|}$$

on obtient  $\mathbb{H}(\underline{\mathbf{u}}) = \alpha \mathbf{e}_1^n$ .

On pose  $\underline{\mathbb{H}} = \mathbb{H}(\underline{\mathbf{u}})$ . On a alors sous forme bloc

$$\underline{\mathbb{H}}\mathbb{S} = \underline{\mathbb{H}} \left( \begin{array}{c|ccc} & \bullet & \cdots & \bullet \\ \mathbf{s} & \vdots & & \vdots \\ & \bullet & \cdots & \bullet \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|ccc} \pm\alpha & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array} \right)$$

2. On a  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \underline{\mathbf{u}} \end{pmatrix}$  et

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(\mathbf{u}) &= \mathbb{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^* = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \underline{\mathbf{u}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m^* & \underline{\mathbf{u}}^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \mathbb{O}_{n,m} & \underline{\mathbf{u}}\underline{\mathbf{u}}^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n - 2\underline{\mathbf{u}}\underline{\mathbf{u}}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \mathbb{O}_{n,m} & \underline{\mathbb{H}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbb{B} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \underline{\mathbb{H}} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O} & \underline{\mathbb{S}} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O} & \underline{\mathbb{H}\mathbb{S}} \end{array} \right).$$

**Q. 2** 1. On note  $\underline{\mathbf{s}} \in \mathbb{K}^{n-k}$  le premier vecteur colonne de  $\underline{\mathbb{A}}^{[k]}$ . et  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_k \\ \underline{\mathbf{s}} \end{pmatrix}$ . D'après la question précédente si  $\mathbf{s} \neq 0$  et  $\mathbf{s}$  non colinéaire à  $\mathbf{e}_1^{n-k}$  premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{K}^{n-k}$  alors il existe une matrice de Householder  $\mathbb{H}^{[k+1]} = \mathbb{H}(\mathbf{u})$  et  $\alpha \in \mathbb{K}^*$  tels que

$$\mathbb{A}^{[k+1]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[k+1]}\mathbb{A}^{[k]} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{R}^{[k]} & \mathbb{F}^{[k]} \\ \hline \mathbb{O} & \left( \begin{array}{c|ccc} \pm\alpha & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array} \right) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{R}^{[k+1]} & \mathbb{F}^{[k+1]} \\ \hline \mathbb{O} & \underline{\mathbb{A}^{[k+1]}} \end{array} \right)$$

On peut remarquer que si  $\mathbf{s} = 0$  ou  $\mathbf{s}$  colinéaire à  $\mathbf{e}_1^{n-k}$  alors  $\mathbb{A}^{[k]}$  est déjà sous la forme  $\mathbb{A}^{[k+1]}$  et donc  $\mathbb{H}^{[k+1]} = \mathbb{I}$ .

2. il suffit d'appliquer itérativement le résultat précédent  $n-1$  fois en posant  $\mathbb{A}^{[0]} = \mathbb{A}$  et  $\mathbb{A}^{[k+1]} = \mathbb{H}^{[k+1]}\mathbb{A}^{[k]}$  où  $\mathbb{H}^{[k+1]}$  est soit une matrice de Householder soit la matrice identité. Par construction la matrice  $\mathbb{A}^{[n-1]}$  est triangulaire supérieure et l'on a

$$\mathbb{A}^{[n-1]} = \mathbb{H}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[1]}\mathbb{A}$$

On pose  $\mathbb{H} = \mathbb{H}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[1]}$  et  $\mathbb{R} = \mathbb{A}^{[n-1]}$ . La matrice  $\mathbb{H}$  est unitaire car produit de matrices unitaires. On note  $\mathbb{Q} = \mathbb{H}^*$  On a

$$\mathbb{Q} = \mathbb{H}^{[1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[n-1]}$$

car les matrices de Householder et matrice identité sont unitaires et hermitiennes.

3. Si  $\mathbb{A}$  est réelle alors par construction  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R}$  sont réelles. Les coefficients diagonaux peuvent alors être choisis positifs lors de la construction de chaque matrice de Householder.
4. Pour montrer l'unicité d'une telle factorisation, on note  $\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2$ , deux matrices orthogonales et  $\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2$ , deux matrices triangulaires à coefficients diagonaux positifs telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}_1 \mathbb{R}_1 = \mathbb{Q}_2 \mathbb{R}_2.$$

Comme  $\mathbb{A}$  est inversible les coefficients diagonaux de  $\mathbb{R}_1$  et  $\mathbb{R}_2$  sont strictement positifs. On a alors

$$\mathbb{I} = \mathbb{A} \mathbb{A}^{-1} = \mathbb{Q}_1 \mathbb{R}_1 \mathbb{R}_2^{-1} \mathbb{Q}_2^{-1}$$

et donc

$$\mathbb{Q}_1^{-1} \mathbb{Q}_2 = \mathbb{R}_1 \mathbb{R}_2^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{T}.$$

Comme  $\mathbb{Q}_1$  est orthogonale on a  $\mathbb{T} = \mathbb{Q}_1^t \mathbb{Q}_2$  et

$$\mathbb{T}^t \mathbb{T} = (\mathbb{Q}_1^t \mathbb{Q}_2)^t \mathbb{Q}_1^t \mathbb{Q}_2 = \mathbb{Q}_2^t \mathbb{Q}_1 \mathbb{Q}_1^t \mathbb{Q}_2 = \mathbb{I}.$$

La matrice  $\mathbb{T}$  est donc orthogonale. De plus  $\mathbb{T} = \mathbb{R}_1 \mathbb{R}_2^{-1}$  est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs puisque produit de triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. La matrice  $\mathbb{I}$  étant symétrique définie positive, d'après le Théorème 3.15 (factorisation positive de Cholesky) il existe une unique matrice  $\mathbb{L}$  triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que  $\mathbb{L} \mathbb{L}^t = \mathbb{I}$ . Cette matrice  $\mathbb{L}$  est évidemment la matrice identité. On en déduit que  $\mathbb{T} = \mathbb{L}^t = \mathbb{I}$  et donc  $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q}_2$  et  $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R}_2$ .

◇

