Exercice 0.0.1: Algorithmique

Q. 1 *Ecrire une fonction* FactQR *permettant de calculer la factorisation $\mathbb{QR}$ d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*
On pourra utiliser la fonction Householder *(voir Exercice 3.1.9, page 92).*

Q. 2 *Ecrire un programme permettant de tester cette fonction.*

Correction Exercice

Q. 1 L'objectif est de déterminer les matrices $\mathbb{Q}$, matrice unitaire, et $\mathbb{R}$ matrice triangulaire supérieure telle que $\mathbb{A} = \mathbb{QR}$.

Données :	$\mathbb{A}$	:	matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Résultat :	$\mathbb{Q}$	:	matrice unitaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
	$\mathbb{R}$	:	matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On rappelle la technique utilisée dans la correction de l'exercice 3.1.10 pour déterminer l'ensemble des matrices de Householder permettant de transformer la matrice $\mathbb{A}$ en une matrice triangulaire supérieure. On pose

$$\mathbb{A}^{[0]} = \mathbb{A}, \quad \mathbb{A}^{[k+1]} = \mathbb{H}^{[k+1]}\mathbb{A}^{[k]}, \ \forall k \in [\![0, n-2]\!]$$

où $\mathbb{H}^{[k+1]}$ est soit une matrice de Householder soit la matrice identité. Plus précisement, on note $\underline{\boldsymbol{s}} \in \mathbb{K}^{n-k}$ le vecteur composé des $n-k$ dernières composantes de la $k+1$-ème colonne de $\mathbb{A}^{[k]}$ et $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_k \\ \hdashline \underline{\boldsymbol{s}} \end{pmatrix}$.

- Si $\underline{s}_1 = 0$ ou $\underline{\boldsymbol{s}}$ colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^{n-k}$ premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^{n-k}$ alors

  $$\mathbb{H}^{[k+1]} = \mathbb{I}.$$

  En notant $\boldsymbol{e}_{k+1}^n$ le $k+1$-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$, cette matrice peut-être calculée avec la fonction Householder par

  $$[\mathbb{H}^{[k+1]}, \alpha] \leftarrow \text{Householder}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_{k+1}^n, 1)$$

- sinon $\mathbb{H}^{[k+1]} = \mathbb{I}$.

On a vu que dans ce cas $\mathbb{A}^{[n-1]}$ est triangulaire supérieure. On pose $\mathbb{H} = \mathbb{H}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[1]}$ qui est une matrice unitaire. On a alors $\mathbb{R} = \mathbb{A}^{[n-1]} = \mathbb{H}\mathbb{A}$ et $\mathbb{Q} = \mathbb{H}^*$.

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_0}$

```
Calculer Q et R
```

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_1}$

```
H ← H^[n-1] × ··· × H^[1]
R ← H * A
Q ← H*
```

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_1}$

```
H ← H^[n-1] × ··· × H^[1]
R ← H * A
Q ← H*
```

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_2}$

```
H ← I
A^[0] ← A
Pour k ← 0 à n − 2 faire
    Calculer H^[k+1] à partir de A^[k]
    A^[k+1] ← H^[k+1] * A^[k]
    H ← H^[k+1] * H
Fin Pour
R ← H * A                              ▷ ou R ← A^[n-1]
Q ← H*
```

Il est inutile de stocker les matrices $\mathbb{A}^{[k]}$ et $\mathbb{H}^{[k+1]}$:

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_2}$

$\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{I}$, $\mathbb{A}^{[0]} \leftarrow \mathbb{A}$
Pour $k \leftarrow 0$ **à** $n-2$ **faire**
  Calculer $\mathbb{H}^{[k+1]}$ à partir de $\mathbb{A}^{[k]}$
  $\mathbb{A}^{[k+1]} \leftarrow \mathbb{H}^{[k+1]} * \mathbb{A}^{[k]}$
  $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{H}^{[k+1]} * \mathbb{H}$
Fin Pour
$\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}^{[n-1]}$
$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_3}$

$\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{I}$, $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}$
Pour $k \leftarrow 0$ **à** $n-2$ **faire**
  Calculer $\mathbb{S}\big(= \mathbb{H}^{[k+1]}\big)$ à partir de $\mathbb{R}\big(= \mathbb{A}^{[k]}\big)$
  $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{S} * \mathbb{R}$ $\qquad \rhd$ compute $\mathbb{A}^{[k+1]}$
  $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{S} * \mathbb{H}$
Fin Pour
$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_3}$

$\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{I}$, $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}$
Pour $k \leftarrow 0$ **à** $n-2$ **faire**
  $\boxed{\text{Calculer } \mathbb{S}\big(= \mathbb{H}^{[k+1]}\big) \text{ à partir de } \mathbb{R}}$
  $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{S} * \mathbb{R}$
  $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{S} * \mathbb{H}$
Fin Pour
$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_4}$

$\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{I}$, $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}$
Pour $k \leftarrow 0$ **à** $n-2$ **faire**
  $\boldsymbol{a} \leftarrow [\mathbf{0}_k; \mathbb{R}(k+1:n, k+1)]$
  $\boldsymbol{e}_{k+1}^n \in \mathbb{C}^n$, $e_{k+1}^n(i) = \delta_{k+1,i}$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.
  $[\mathbb{R}, \alpha] \leftarrow \textsc{Householder}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_{k+1}^n, 1)$
  $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{S} * \mathbb{R}$
  $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{S}\mathbb{H}$
Fin Pour
$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$

Algorithme 1 Fonction $\textsc{FactQR}$

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Résultat : $\mathbb{Q}$: matrice unitaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$\mathbb{R}$: matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Fonction $[\mathbb{Q}, \mathbb{R}] \leftarrow$ $\textsc{FactQR}$ ($\mathbb{A}$)
  $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{I}$
  $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}$
  Pour $k \leftarrow 0$ **à** $n-2$ **faire**
    $\boldsymbol{a} \leftarrow \mathbf{0}_n$
    Pour $i \leftarrow k+1$ **à** n **faire**
      $\boldsymbol{a}(i) \leftarrow \mathbb{R}(i, k+1)$
    Fin Pour
    $\boldsymbol{e} \leftarrow \mathbf{0}_n,\ \boldsymbol{e}(k+1) \leftarrow 1$
    $[\mathbb{S}, \alpha] \leftarrow \textsc{Householder}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}, 1)$
    $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{S} * \mathbb{R}$
    $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{S} * \mathbb{H}$
  Fin Pour
  $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$
Fin Fonction

$\diamond$