Exercice

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i \neq j$, on note $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identitée dont on a permuté les lignes i et j.

Q. 1 *Représenter cette matrice et la définir proprement.*

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.On note $\boldsymbol{A}_{r,:}$ le r-ème vecteur ligne de $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{A}_{:,s}$ le s-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$.

Q. 2
1. *Déterminer les lignes de la matrice* $\mathbb{D} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}\mathbb{A}$ *en fonction des vecteurs lignes de* $\mathbb{A}$.
2. *Déterminer les colonnes de la matrice* $\mathbb{E} = \mathbb{A}\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ *en fonction des vecteurs colonnes de* $\mathbb{A}$.

Q. 3
1. *Calculer le déterminant de* $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.
2. *Déterminer l'inverse de* $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

Correction Exercice On note $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

Q. 1 On peut définir cette matrice par ligne,

$$\left\{\begin{array}{lrcll} \forall r \in [\![1, n]\!]\backslash\{i, j\}, & P_{r,s} & = & \delta_{r,s}, & \forall s \in [\![1, n]\!], \\ & P_{i,s} & = & \delta_{j,s}, & \forall s \in [\![1, n]\!], \\ & P_{j,s} & = & \delta_{i,s}, & \forall s \in [\![1, n]\!]. \end{array}\right.$$

ou par colonne

$$\left\{\begin{array}{lrcll} \forall s \in [\![1, n]\!]\backslash\{i, j\}, & P_{r,s} & = & \delta_{r,s}, & \forall r \in [\![1, n]\!], \\ & P_{r,i} & = & \delta_{r,j}, & \forall r \in [\![1, n]\!], \\ & P_{r,j} & = & \delta_{r,i}, & \forall r \in [\![1, n]\!]. \end{array}\right.$$

⚠ Ne pas utiliser les indices i et j qui sont déjà fixés dans la définition de la matrice $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

On peut noter que la matrice $\mathbb{P}$ est symétrique.

Q. 2 1. On note $\mathbb{D} = \mathbb{P}\mathbb{A}$. Par définition du produit matriciel on a

$$D_{r,s} = \sum_{k=1}^{n} P_{r,k} A_{k,s}.$$

On obtient, $\forall s \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{cases} D_{r,s} &= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{r,k} A_{k,s} = A_{r,s}, \quad \forall r \in [\![1, n]\!] \backslash \{i, j\}, \\ D_{i,s} &= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{j,k} A_{k,s} = A_{j,s}, \\ D_{j,s} &= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k} A_{k,s} = A_{i,s}. \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \boldsymbol{D}_{r,:} &= \boldsymbol{A}_{r,:}, \quad \forall r \in [\![1, n]\!] \backslash \{i, j\}, \\ \boldsymbol{D}_{i,:} &= \boldsymbol{A}_{j,:}, \\ \boldsymbol{D}_{j,:} &= \boldsymbol{A}_{i,:}. \end{cases}$$

La notation $\boldsymbol{D}_{i,:}$ correspond au vecteur ligne $(D_{i,1}, \ldots, D_{i,n})$ et $\boldsymbol{D}_{:,j}$ correspond au vecteur colonne $\begin{pmatrix} D_{1,j} \\ \vdots \\ D_{n,j} \end{pmatrix}$

2. On note $\mathbb{E} = \mathbb{A}\mathbb{P}$. Par définition du produit matriciel et par symétrie de $\mathbb{P}$ on a

$$E_{r,s} = \sum_{k=1}^{n} A_{r,k} P_{k,s} = \sum_{k=1}^{n} A_{r,k} P_{s,k}.$$

⚠ Ne pas utiliser les indices i et j qui sont déjà fixés dans la définition de la matrice $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

On obtient en raisonnant par colonne, $\forall r \in [\![1, n]\!]$,

$$\left\{\begin{array}{lcl} E_{r,s} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_{r,k}\delta_{s,k} = A_{r,s}, \quad \forall s \in [\![1, n]\!] \backslash \{i, j\}, \\ E_{r,i} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_{r,k}\delta_{j,k} = A_{r,j}, \\ E_{r,j} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_{r,k}\delta_{i,k} = A_{r,i}. \end{array}\right.$$

ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{E}_{:,s} & = & \boldsymbol{A}_{:,s}, \quad \forall s \in [\![1, n]\!] \backslash \{i, j\}, \\ \boldsymbol{E}_{:,i} & = & \boldsymbol{A}_{:,j}, \\ \boldsymbol{E}_{:,j} & = & \boldsymbol{A}_{:,i}. \end{array}\right.$$

Q. 3

1. $\det(\mathbb{P}) = -1$, si $i \neq j$ et $\det(\mathbb{P}) = 1$ sinon.
2. Immédiat par calcul direct on a $\mathbb{P}\mathbb{P} = \mathbb{I}$ et donc la matrice $\mathbb{P}$ est inversible et $\mathbb{P}^{-1} = \mathbb{P}$.

◇