Analyse Numérique I

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 1ère année / L3 MIM

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2023/10/10

Chapitre IV

Résolution de systèmes linéaires

Plan

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$.

Résoudre

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Le calcul de la matrice inverse $\mathbb{A}^{-1}$ revient à résoudre n systèmes linéaires.

⚠ Pour résoudre un système linéaire, on ne calcule pas la matrice inverse associée.

- **Méthodes directes :** On cherche $\mathbb{M}$ inversible tel que $\mathbb{M}\mathbb{A}$ *facilement* inversible

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \mathbb{M}\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \mathbb{M}\boldsymbol{b}.$$

- **Méthodes itératives :** On cherche $\mathbb{B}$ et $\boldsymbol{c}$,

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{c}, \quad k \geqslant 0, \quad \boldsymbol{x}^{[0]} \text{ donné}$$

en espérant $\lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{x}^{[k]} = \boldsymbol{x}$.

Conditionnement

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$.

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

De petites erreurs sur les données engendrent-elles de petites erreurs sur la solution?

Exemple de R.S. Wilson

Soient

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad \Delta\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{25} & \frac{1}{25} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{50} & -\frac{11}{100} & 0 \\ -\frac{1}{100} & -\frac{1}{100} & 0 & -\frac{1}{50} \end{pmatrix}$$

et $\boldsymbol{b}^{\mathrm{t}} = (32,\, 23,\, 33,\, 31)$, $(\boldsymbol{\Delta b})^{\mathrm{t}} = \left(\frac{1}{100},\, -\frac{1}{100},\, \frac{1}{100},\, -\frac{1}{100}\right)$. Des calculs exacts donnent

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} & \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} &= (1,\, 1,\, 1,\, 1) \\
\mathbb{A}\boldsymbol{u} &= (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{\Delta b}) & \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{u}^{\mathrm{t}} &= \left(\frac{91}{50},\, -\frac{9}{25},\, \frac{27}{20},\, \frac{79}{100}\right) \\
&& &\approx (1.8,\, -0.36,\, 1.3,\, 0.79) \\
(\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A})\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{b} & \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{v}^{\mathrm{t}} &= (-81,\, 137,\, -34,\, 22) \\
(\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A})\boldsymbol{y} &= (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{\Delta b}) & \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{y}^{\mathrm{t}} &= \left(-\frac{18283543}{461600},\, \frac{31504261}{461600},\, -\frac{3741501}{230800},\, \frac{5235241}{461600}\right) \\
&& &\approx (-39.61,\, 68.25,\, -16.21,\, 11.34)
\end{aligned}$$

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$.

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

De petites erreurs sur les données engendrent-elles de petites erreurs sur la solution?

Non, pas forcément!

Le système linéaire prédédent est **mal conditionné**.
On dit qu'un système linéaire est **bien conditionné** ou qu'il a un **bon conditionnement** si de petites perturbations des données n'entrainent qu'une variation *raisonnable* de la solution.

Est-il possible de "mesurer" le **conditionnement** d'une matrice?

Definition 1.1

Soit $\|.\|$ une norme matricielle subordonnée, le conditionnement d'une matrice régulière $\mathbb{A}$, associé à cette norme, est le nombre

$$\operatorname{cond}(\mathbb{A}) = \|\mathbb{A}\| \left\|\mathbb{A}^{-1}\right\|.$$

Nous noterons $\operatorname{cond}_p(\mathbb{A}) = \|\mathbb{A}\|_p \left\|\mathbb{A}^{-1}\right\|_p$.

Proposition:

Soit $\mathbb{A}$ une matrice régulière. On a les propriétés suivantes

1. $\forall \alpha \in \mathbb{K}^*$, $\mathrm{cond}(\alpha\mathbb{A}) = \mathrm{cond}(\mathbb{A})$.
2. $\mathrm{cond}_p(\mathbb{A}) \geqslant 1$, $\forall p \in [\![1, +\infty]\!]$.
3. $\mathrm{cond}_2(\mathbb{A}) = 1$ si et seulement si $\mathbb{A} = \alpha\mathbb{Q}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $\mathbb{Q}$ matrice unitaire

Théorème 2:

Soit $\mathbb{A}$ une matrice inversible. Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}$ les solutions respectives de

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \text{et} \quad \mathbb{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\Delta b}.$$

Supposons $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, alors l'inégalité

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leqslant \mathrm{cond}(\mathbb{A})\frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

est satisfaite, et c'est la meilleure possible : pour une matrice $\mathbb{A}$ donnée, on peut trouver des vecteurs $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{\Delta b} \neq \boldsymbol{0}$ tels qu'elle devienne une égalité.

Théorème:

Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A}$ deux matrices inversibles. Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}$ les solutions respectives de

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ et } (\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A})(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}) = \boldsymbol{b}.$$

Supposons $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, alors on a

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}\|} \leqslant \mathrm{cond}(\mathbb{A})\frac{\|\Delta\mathbb{A}\|}{\|\mathbb{A}\|}.$$

Remarque 1

*Une matrice est donc **bien conditionnée** si son conditionnement est proche de* 1.

Plan

Système diagonal

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$.

$$x_i = b_i / A_{i,i}, \quad \forall i \in [\![1, n]\!]. \tag{1}$$

Algorithm Fonction RSLMatDiag permettant de résoudre le système linéaire à matrice diagonale inversible

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Données : $\mathbb{A}$: matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.
Résultat : $\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.

```
Fonction x ← RSLMatDiag ( A, b )
  Pour i ← 1 à n faire
    x(i) ← b(i)/A(i,i)
  Fin Pour
Fin Fonction
```


Système triangulaire inférieur

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire inférieure inversible ($A_{i,j} = 0$ si $i < j$)

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ A_{n,1} & \dots & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{A}$ inversible $\iff$

Système triangulaire inférieur

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire inférieure inversible ($A_{i,j} = 0$ si $i < j$)

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ A_{n,1} & \dots & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{A}$ inversible $\iff A_{i,i} \neq 0, \forall i \in [\![1, n]\!]$

Système triangulaire inférieur

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire inférieure inversible ($A_{i,j} = 0$ si $i < j$)

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ A_{n,1} & \dots & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{A}$ inversible $\iff A_{i,i} \neq 0, \forall i \in [\![1, n]\!]$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$, $\quad (\mathbb{A}\boldsymbol{x})_i = b_i, \iff \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} x_j = b_i.$

$$b_i = \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j + A_{i,i} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} \underbrace{A_{i,j}}_{=0} x_j = \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j + A_{i,i} x_i$$

$$x_i = \frac{1}{A_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j \right), \quad \forall i \in [\![1, n]\!]. \tag{2}$$

$$x_i = \frac{1}{A_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j}x_j\right), \ \forall i \in [\![1,n]\!].$$

Algorithme 2 $\mathcal{R}_0$

Résoudre $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en calculant successivement $x_1, \ x_2, \ \dots, x_n$.

Algorithme 2 $\mathcal{R}_1$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
  $x_i \leftarrow \frac{1}{A_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j}x_j\right)$
Fin Pour

$$x_i = \frac{1}{A_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j}x_j\right), \ \forall i \in [\![1,n]\!].$$

Algorithme 2 $\mathcal{R}_1$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
  $x_i \leftarrow \frac{1}{A_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j}x_j\right)$
Fin Pour

Algorithme 2 $\mathcal{R}_2$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
  $S \leftarrow \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j}x_j$
  $x_i \leftarrow (b_i - S)/A_{i,i}$
Fin Pour

$$x_i = \frac{1}{A_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j}x_j\right), \ \forall i \in [\![1,n]\!].$$

Algorithme 2 $\mathcal{R}_2$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
  $S \leftarrow \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j}x_j$
  $x_i \leftarrow (b_i - S)/A_{i,i}$
Fin Pour

Algorithme 2 $\mathcal{R}_3$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
  $S \leftarrow 0$
  Pour $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
    $S \leftarrow S + A(i,j) * x(j)$
  Fin Pour
  $x_i \leftarrow (b_i - S)/A_{i,i}$
Fin Pour

$$x_i = \frac{1}{A_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j}x_j\right), \ \forall i \in [\![1,n]\!].$$

Algorithm Fonction RSLTriInf permettant de résoudre le système linéaire triangulaire inférieur inversible

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Données : $\mathbb{A}$: matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inférieure inversible.
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{K}^n$.
Résultat : $\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{K}^n$.

Fonction $\boldsymbol{x} \leftarrow$ RSLTriInf ($\mathbb{A}, \boldsymbol{b}$)
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
    $S \leftarrow 0$
    Pour $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
      $S \leftarrow S + A(i,j) * x(j)$
    Fin Pour
    $x(i) \leftarrow (b(i) - S)/A(i,i)$
  Fin Pour
Fin Fonction

Système triangulaire supérieur

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure inversible ($A_{i,j} = 0$ si $i > j$)

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & \dots & A_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Exercice

Ecrire la fonction RSLTriSup permettant de résoudre le système triangulaire supérieure $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Plan

Lemme 3.1:

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On note $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identitée dont on a permuté les lignes i et j. Alors la matrice $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ est symétrique et orthogonale. Pour toute matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

1. la matrice $\mathbb{P}_n^{[i,j]}\mathbb{A}$ est matrice $\mathbb{A}$ dont on a permuté les **lignes** i et j,
2. la matrice $\mathbb{A}\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ est matrice $\mathbb{A}$ dont on a permuté les **colonnes** i et j,

Lemme 3.2:

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $A_{1,1} \neq 0$. Il existe une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité telle que

$$\mathbb{E}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = A_{1,1}\boldsymbol{e}_1 \tag{3}$$

où $\boldsymbol{e}_1$ est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Théorème 4: Décomposition de Schur ★★★★☆

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe une matrice unitaire $\mathbb{U}$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{T}$ telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^* \tag{4}$$

Plan

Algorithme de Gauss-Jordan

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$$

où $\mathbb{U}$ matrice triangulaire supérieure.
Opérations élémentaires sur les matrices :

- $\mathcal{L}_i \leftrightarrow \mathcal{L}_j$ permutation lignes i et j
- $\mathcal{L}_i \leftarrow \mathcal{L}_i + \alpha\mathcal{L}_j$ combinaison linéaire

A l'aide d'opérations élémentaires, on va transformer successivement en $n-1$ étapes le système.

- **Etape** j: on va *s'arranger* pour annuler les termes sous-diagonaux de la colonne j de la matrice sans modifier les $j-1$ premières colonnes.

$$\begin{array}{c} \overset{j-1}{\longleftrightarrow} \\ \left(\begin{array}{cccc:ccc} \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hdashline 0 & \cdots & \cdots & 0 & \color{red}\bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & & & \vdots & \color{red}\vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \color{red}\bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right) \end{array} \boldsymbol{x} = \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \vdots \\ \bullet \\ \hdashline \bullet \\ \vdots \\ \bullet \end{array}\right)$$

- **Etape** j: on va *s'arranger* pour annuler les termes sous-diagonaux de la colonne j de la matrice sans modifier les $j-1$ premières colonnes.

$$\begin{array}{c} \overset{j-1}{\longleftrightarrow} \\ \left(\begin{array}{cccc:ccc} \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hdashline 0 & \cdots & \cdots & 0 & \color{red}\bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & & & \vdots & \color{red}\vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \color{red}\bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right) \end{array} \boldsymbol{x} = \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \vdots \\ \bullet \\ \hdashline \bullet \\ \vdots \\ \bullet \end{array}\right)$$

Algorithm Algorithme de Gauss-Jordan formel pour la résolution de $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

Pour $j \leftarrow 1$ **à** $n-1$ **faire**
  Rechercher l'indice k de la ligne du pivot (sur la colonne j, $k \in [\![j, n]\!]$)
  Permuter les lignes j ($\mathcal{L}_j$) et k ($\mathcal{L}_k$) du système si besoin.
  Pour $i \leftarrow j+1$ **à** n **faire**
    Eliminer en effectuant $\mathcal{L}_i \leftarrow \mathcal{L}_i - \frac{A_{i,j}}{A_{j,j}}\mathcal{L}_j$
  Fin Pour
Fin Pour
Résoudre le système triangulaire supérieur par la méthode de la remontée.

Algorithm Algorithme de Gauss-Jordan avec fonctions pour la résolution de $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible.
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{K}^n$.
Résultat : $\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Fonction $\boldsymbol{x} \leftarrow$ RSLGauss ($\mathbb{A}, \boldsymbol{b}$)
  Pour $j \leftarrow 1$ **à** $n-1$ **faire**
    $k \leftarrow$ $\boxed{\text{ChercheIndPivot}}$$(\mathbb{A}, j)$ ▷ à écrire
    $[\mathbb{A}, \boldsymbol{b}] \leftarrow$ $\boxed{\text{PermLignesSys}}$$(\mathbb{A}, \boldsymbol{b}, j, k)$ ▷ à écrire
    Pour $i \leftarrow j+1$ **à** n **faire**
      $[\mathbb{A}, \boldsymbol{b}] \leftarrow$ $\boxed{\text{CombLignesSys}}$$(\mathbb{A}, \boldsymbol{b}, j, i, -A(i,j)/A(j,j))$ ▷ à écrire
    Fin Pour
  Fin Pour
  $\boldsymbol{x} \leftarrow$ RSLTriSup$(\mathbb{A}, \boldsymbol{b})$ ▷ déjà écrite
Fin Fonction

Algorithm Recherche d'un pivot pour l'algorithme de Gauss-Jordan.

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
j : entier, $1 \leqslant j \leqslant n$.
Résultat : k : dans $[\![j, n]\!]$, indice ligne pivot

```
Fonction k ← CHERCHEINDPIVOT ( A, j )
   k ← j, pivot ← |A(j, j)|
   Pour i ← j + 1 à n faire
      Si |A(i, j)| > pivot alors
         k ← i
         pivot ← |A(i, j)|
      Fin Si
   Fin Pour
Fin Fonction
```

Algorithm Permutte deux lignes d'une matrice et d'un vecteur.

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{K}^n$.
j, k : entiers, $1 \leqslant j, k \leqslant n$.
Résultat : $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{b}$ modifiés.

```
Fonction [A, b] ← PERMLIGNESSYS ( A, b, j, k )
   Pour l ← 1 à n faire
      t ← A(j, l)
      A(j, l) ← A(k, l)
      A(k, l) ← t
   Fin Pour
   t ← b(j), b(j) ← b(k), b(k) ← t
Fin Fonction
```

Algorithm Combinaison linéaire $\mathcal{L}_i \leftarrow \mathcal{L}_i + \alpha\mathcal{L}_j$ appliqué à une matrice et à un vecteur.

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{K}^n$.
j, i : entiers, $1 \leqslant j, i \leqslant n$.
alpha : scalaire de $\mathbb{K}$
Résultat : $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{b}$ modifiés.

```
Fonction [A, b] ← COMBLIGNESSYS ( A, b, j, i, α )
   Pour k ← 1 à n faire
      A(i, k) ← A(i, k) + α * A(j, k)
   Fin Pour
   b(i) ← b(i) + αb(j)
Fin Fonction
```


Exercice 1: Méthode de Gauss, écriture algébrique

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible.

Q.1 *Montrer qu'il existe une matrice $\mathbb{G} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det(\mathbb{G})| = 1$ et $\mathbb{G}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = \alpha\boldsymbol{e}_1$ avec $\alpha \neq 0$ et $\boldsymbol{e}_1$ premier vecteur de la base canonique de C^n.*

Q.2

1. *Montrer par récurrence sur l'ordre des matrices que pour toute matrice $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, il existe une matrice $\mathbb{S}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det \mathbb{S}_n| = 1$ et $\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n$ avec $\mathbb{U}_n$ matrice triangulaire supérieure inversible.*
2. *Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$. En supposant connue la décompostion précédente $\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n$, expliquer comment résoudre le système $\mathbb{A}_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*

Q.3 *Que peut-on dire si $\mathbb{A}$ est non inversible?*

Indication : utiliser les Lemmes 3.1 et 3.2.

On a donc démontré le théorème suivant

Théorème 5

Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée, inversible ou non. Il existe (au moins) une matrice inversible $\mathbb{G}$ telle que $\mathbb{G}\mathbb{A}$ soit triangulaire supérieure.

Plan

Exercice: Factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les sous-matrices principales d'ordre i, notées Δ_i, $i \in [\![1, n]\!]$ (voir Definition B.48, page 99) sont inversibles.
Montrer qu'il existe des matrices $\mathbb{E}^{[k]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $k \in [\![1, n-1]\!]$, triangulaires inférieures à diagonale unité telles que la matrice $\mathbb{U}$ définie par

$$\mathbb{U} = \mathbb{E}^{[n-1]} \cdots \mathbb{E}^{[1]}\mathbb{A}$$

soit triangulaire supérieure avec $U_{i,i} = \det \Delta_i/(U_{1,1} \times \cdots \times U_{i-1,i-1})$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.

Théorème 6: Factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les sous-matrices principales sont inversibles alors il existe une unique matrice $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure (*lower triangular* en anglais) à diagonale unité et une unique matrice $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure (*upper triangular* en anglais) inversible telles ques

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}.$$

preuve :

- **Existence :** exercice précédent $\mathbb{U} = \mathbb{E}^{[n-1]} \cdots \mathbb{E}^{[1]}\mathbb{A}$

$$\mathbb{L} = \left(\mathbb{E}^{[n-1]} \cdots \mathbb{E}^{[1]}\right)^{-1}$$

- **Unicité :** $\mathbb{A} = \mathbb{L}_1\mathbb{U}_1 = \mathbb{L}_2\mathbb{U}_2$ ...

Exercice 2

Montrer que si $\mathbb{A}$ inversible admet une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$ alors toutes ses sous-matrices principales sont inversibles.

Corollaire 6.1:

Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice hermitienne définie positive alors elle admet une unique factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$.

preuve : $\mathbb{A}$ hermitienne définie positive alors toutes ses sous-matrices principales sont définies positives et donc inversibles.

Remarque 2

Si la matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est inversible mais que ses sous-matrices principales ne sont pas toutes inversibles, il est possible par des permutations préalables de lignes de la matrice de se ramener à une matrice telle que ses sous-matrices principales soient inversibles.

Théorème 7: Factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$ avec permutations

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible. Il existe une matrice $\mathbb{P}$, produit de matrices de permutation, une matrice $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité et une matrice $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telles ques

$$\mathbb{P}\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}. \tag{5}$$

Utilisation pratique de la factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$

Trouver $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \mathbb{L}\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{6}$$

est équivalent à

Utilisation pratique de la factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$

Trouver $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \mathbb{L}\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{6}$$

est équivalent à

Trouver $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ solution de

$$\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \tag{7}$$

avec $\boldsymbol{y} \in \mathbb{K}^n$ solution de

$$\mathbb{L}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}. \tag{8}$$

Algorithme de résolution de systèmes linéaire par $\mathbb{L}\mathbb{U}$

Algorithm Fonction RSLFactLU permettant de résoudre, par une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$, le système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ où $\mathbb{A}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dont toutes les sous-matrices principales sont inversibles, et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$.

, **Données :** $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les sous-matrices principales sont inversibles;
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{K}^n$.
Résultat : $\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{K}^n$.

```
1: Fonction x ← RSLFactLU ( A, b )
2:     [L, U] ← FactLU(A)                    ▷ Factorisation LU
3:     y ← RSLTriInf(L, b)                   ▷ Résolution du système Ly = b
4:     x ← RSLTriSup(U, y)                   ▷ Résolution du système Ux = y
5: Fin Fonction
```

Il nous faut donc écrire la fonction FactLU

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$.

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ L_{2,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ L_{n,1} & L_{n,2} & \dots & L_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & \dots & \dots & U_{1,n} \\ 0 & U_{2,2} & \dots & \dots & U_{2,n} \\ 0 & 0 & U_{3,3} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & U_{n,n} \end{pmatrix}$$

On connait $\mathbb{A}$, on cherche $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une factorisation $\mathbb{LU}$.

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n}\\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ L_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ L_{3,1} & L_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ L_{n,1} & L_{n,2} & \cdots & L_{n,n-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & \cdots & \cdots & U_{1,n}\\ 0 & U_{2,2} & \cdots & \cdots & U_{2,n}\\ 0 & 0 & U_{3,3} & & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & U_{n,n}\end{pmatrix}$$

- **Etape** 1 :
  - On connait la **première ligne** de $\mathbb{L}$ $\Longrightarrow$ on peut calculer la **première ligne** de $\mathbb{U}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une factorisation $\mathbb{LU}$.

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n}\\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ L_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ L_{3,1} & L_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ L_{n,1} & L_{n,2} & \cdots & L_{n,n-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & \cdots & \cdots & U_{1,n}\\ 0 & U_{2,2} & \cdots & \cdots & U_{2,n}\\ 0 & 0 & U_{3,3} & & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & U_{n,n}\end{pmatrix}$$

- **Etape** 1 :
  - On connait la **première ligne** de $\mathbb{L}$ $\Longrightarrow$ on peut calculer la **première ligne** de $\mathbb{U}$
  - On connait la **première colonne** de $\mathbb{U}$ $\Longrightarrow$ on peut calculer la **première colonne** de $\mathbb{L}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une factorisation $\mathbb{LU}$.

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n}\\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ L_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ L_{3,1} & L_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ L_{n,1} & L_{n,2} & \cdots & L_{n,n-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & \cdots & \cdots & U_{1,n}\\ 0 & U_{2,2} & \cdots & \cdots & U_{2,n}\\ 0 & 0 & U_{3,3} & & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & U_{n,n}\end{pmatrix}$$

- **Etape** 1 :
  - On connait la **première ligne** de $\mathbb{L}$ $\Longrightarrow$ on peut calculer la **première ligne** de $\mathbb{U}$
  - On connait la **première colonne** de $\mathbb{U}$ $\Longrightarrow$ on peut calculer la **première colonne** de $\mathbb{L}$
- **Etape** 2 :
  - On connait la **deuxième ligne** de $\mathbb{L}$ $\Longrightarrow$ on peut calculer la **deuxième ligne** de $\mathbb{U}$ car on connait la première ligne de $\mathbb{U}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une factorisation $\mathbb{LU}$.

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n}\\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ L_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ L_{3,1} & L_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ L_{n,1} & L_{n,2} & \cdots & L_{n,n-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & \cdots & \cdots & U_{1,n}\\ 0 & U_{2,2} & \cdots & \cdots & U_{2,n}\\ 0 & 0 & U_{3,3} & & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & U_{n,n}\end{pmatrix}$$

- **Etape** 1 :
  - On connait la **première ligne** de $\mathbb{L}$ $\Longrightarrow$ on peut calculer la **première ligne** de $\mathbb{U}$
  - On connait la **première colonne** de $\mathbb{U}$ $\Longrightarrow$ on peut calculer la **première colonne** de $\mathbb{L}$
- **Etape** 2 :
  - On connait la **deuxième ligne** de $\mathbb{L}$ $\Longrightarrow$ on peut calculer la **deuxième ligne** de $\mathbb{U}$ car on connait la première ligne de $\mathbb{U}$
  - On connait la **deuxième colonne** de $\mathbb{U}$ $\Longrightarrow$ on peut calculer la **deuxième colonne** de $\mathbb{L}$ car on connait la première colonne de $\mathbb{L}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$.

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ L_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ L_{n,1} & L_{n,2} & \cdots & L_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & \cdots & \cdots & U_{1,n} \\ 0 & U_{2,2} & \cdots & \cdots & U_{2,n} \\ 0 & 0 & U_{3,3} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & U_{n,n} \end{pmatrix}$$

- **Etape** 1 :
  - On connait la **première ligne** de $\mathbb{L}$ $\Longrightarrow$ on peut calculer la **première ligne** de $\mathbb{U}$
  - On connait la **première colonne** de $\mathbb{U}$ $\Longrightarrow$ on peut calculer la **première colonne** de $\mathbb{L}$
- **Etape** 2 :
  - On connait la **deuxième ligne** de $\mathbb{L}$ $\Longrightarrow$ on peut calculer la **deuxième ligne** de $\mathbb{U}$ car on connait la première ligne de $\mathbb{U}$
  - On connait la **deuxième colonne** de $\mathbb{U}$ $\Longrightarrow$ on peut calculer la **deuxième colonne** de $\mathbb{L}$ car on connait la première colonne de $\mathbb{L}$
- ...

Par récurrence, en supposant connues les $(i-1)$ premières colonnes de $\mathbb{L}$ et les $(i-1)$ premières lignes de $\mathbb{U}$.

$i-1$ $\mathbb{L}$ $\mathbb{U}$

Connus

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \bullet & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \bullet & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \bullet & \cdots & \cdots & \bullet & L_{i,i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \bullet & \cdots & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & L_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \bullet & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & U_{i,i} & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & U_{n,n} \end{pmatrix}$$

$i-1$

Connus

Par récurrence, en supposant connues les $(i-1)$ premières colonnes de $\mathbb{L}$ et les $(i-1)$ premières lignes de $\mathbb{U}$.

$i-1$ $\mathbb{L}$ $\mathbb{U}$

Connus

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \bullet & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \bullet & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \bullet & \cdots & \cdots & \bullet & L_{i,i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \bullet & \cdots & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & L_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \bullet & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & U_{i,i} & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & U_{n,n} \end{pmatrix}$$

$i-1$

Connus $L_{i,i} = 1$

$\Rightarrow$ ligne i de $\mathbb{L}$ connue : on peut calculer la ligne i de $\mathbb{U}$!

Par récurrence, en supposant connues les $(i-1)$ premières colonnes de $\mathbb{L}$ et les $(i-1)$ premières lignes de $\mathbb{U}$.

$i-1$ $\mathbb{L}$ $\mathbb{U}$

Connus

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \bullet & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \bullet & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \bullet & \cdots & \cdots & \bullet & L_{i,i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \bullet & \cdots & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & L_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \bullet & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & U_{i,i} & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & U_{n,n} \end{pmatrix}$$

$i-1$

Connus $L_{i,i} = 1$

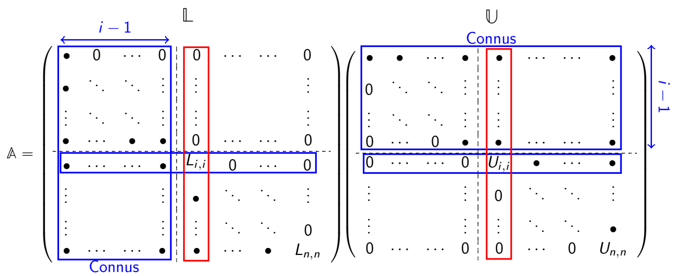
$\Rightarrow$ ligne i de $\mathbb{L}$ connue : on peut calculer la ligne i de $\mathbb{U}$!

On cherche $U_{i,j}$ $\forall j \in [\![i, n]\!]$.

$$A_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} L_{i,k} U_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} \overbrace{L_{i,k} U_{k,j}}^{\text{connus}} + \overbrace{L_{i,i}}^{=1} U_{i,j} + \sum_{k=i+1}^{n} \overbrace{L_{i,k}}^{=0} U_{k,j}$$

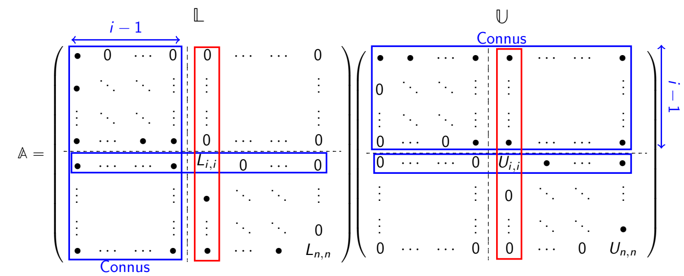
$$U_{i,j} = A_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k} U_{k,j}, \quad \forall j \in [\![i, n]\!].$$

Par récurrence, en supposant connues les $(i-1)$ premières colonnes de $\mathbb{L}$ et les $(i-1)$ premières lignes de $\mathbb{U}$.



$\Rightarrow$ colonne i de $\mathbb{U}$ connue : on peut calculer la colonne i de $\mathbb{L}$!

Par récurrence, en supposant connues les $(i-1)$ premières colonnes de $\mathbb{L}$ et les $(i-1)$ premières lignes de $\mathbb{U}$.



$\Rightarrow$ colonne i de $\mathbb{U}$ connue : on peut calculer la colonne i de $\mathbb{L}$!

On cherche $L_{j,i}$ $\forall j \in [\![i+1,n]\!]$, $(L_{i,i}=1)$

$$A_{j,i} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} L_{j,k}U_{k,i} = \sum_{k=1}^{i-1} \overbrace{L_{j,k}U_{k,i}}^{\text{connus}} + L_{j,i}\overbrace{U_{i,i}}^{\text{connu}} + \sum_{k=i+1}^{n} L_{j,k}\overbrace{U_{k,i}}^{=0}$$

$$L_{j,i} = \left(A_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{j,k}U_{k,i}\right)/U_{i,i}, \quad \forall j \in [\![i+1,n]\!].$$

En résumé, à l'étape i:

- Calcul de la ligne i de $\mathbb{U}$

$$\begin{aligned} U_{i,j} &= 0, & \forall j \in [\![1,i-1]\!], \\ U_{i,j} &= A_{i,j} - \textstyle\sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k}U_{k,j}, & \forall j \in [\![i,n]\!]. \end{aligned}$$

- Calcul de la colonne i de $\mathbb{L}$

$$\begin{aligned} L_{j,i} &= 0, & \forall j \in [\![1,i-1]\!], \\ L_{i,i} &= 1, & \\ L_{j,i} &= \left(A_{j,i} - \textstyle\sum_{k=1}^{i-1} L_{j,k}U_{k,i}\right)/U_{i,i}, & \forall j \in [\![i+1,n]\!]. \end{aligned}$$

Algorithme 9 $\mathcal{R}_0$

1: Calculer les matrices $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$

Algorithme 9 $\mathcal{R}_1$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
2: Calculer la ligne i de $\mathbb{U}$.
3: Calculer la colonne i de $\mathbb{L}$.
4: **Fin Pour**

Algorithme 9 $\mathcal{R}_1$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
2: Calculer la ligne i de $\mathbb{U}$.
3: Calculer la colonne i de $\mathbb{L}$.
4: **Fin Pour**

Algorithme 9 $\mathcal{R}_2$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
2: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
3: $U(i,j) \leftarrow 0$
4: **Fin Pour**
5: **Pour** $j \leftarrow i$ **à** n **faire**
6: $U_{i,j} \leftarrow A_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k}U_{k,j}$
7: **Fin Pour**
8: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
9: $L_{j,i} \leftarrow 0$
10: **Fin Pour**
11: $L_{i,i} \leftarrow 1$
12: **Pour** $j \leftarrow i+1$ **à** n **faire**
13: $L_{j,i} \leftarrow \frac{1}{U_{i,i}}\left(A_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{j,k}U_{k,i}\right)$
14: **Fin Pour**
15: **Fin Pour**

Algorithme 9 $\boxed{\mathcal{R}_2}$

Pour $i \leftarrow 1$ à n faire
  Pour $j \leftarrow 1$ à $i-1$ faire
    $U(i,j) \leftarrow 0$
  Fin Pour
  Pour $j \leftarrow i$ à n faire
    $\boxed{U_{i,j} \leftarrow A_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k}U_{k,j}}$
  Fin Pour
  Pour $j \leftarrow 1$ à $i-1$ faire
    $L_{j,i} \leftarrow 0$
  Fin Pour
  $L_{i,i} \leftarrow 1$
  Pour $j \leftarrow i+1$ à n faire
    $\boxed{L_{j,i} \leftarrow \frac{1}{U_{i,i}}\left(A_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{j,k}U_{k,i}\right)}$
  Fin Pour
Fin Pour

Algorithme 9 $\boxed{\mathcal{R}_3}$

Pour $i \leftarrow 1$ à n faire
  Pour $j \leftarrow 1$ à $i-1$ faire
    $U(i,j) \leftarrow 0$
  Fin Pour
  Pour $j \leftarrow i$ à n faire
    $S_1 \leftarrow \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k}U_{k,j}$
    $U_{i,j} \leftarrow A_{i,j} - S_1$
  Fin Pour
  Pour $j \leftarrow 1$ à $i-1$ faire
    $L_{j,i} \leftarrow 0$
  Fin Pour
  $L_{i,i} \leftarrow 1$
  Pour $j \leftarrow i+1$ à n faire
    $S_2 \leftarrow \sum_{k=1}^{i-1} L_{j,k}U_{k,i}$
    $L_{j,i} \leftarrow \frac{1}{U_{i,i}}(A_{j,i} - S_2)$.
  Fin Pour
Fin Pour

Algorithme 9 $\boxed{\mathcal{R}_3}$

Pour $i \leftarrow 1$ à n faire
  Pour $j \leftarrow 1$ à $i-1$ faire
    $U(i,j) \leftarrow 0$
  Fin Pour
  Pour $j \leftarrow i$ à n faire
    $\boxed{S_1 \leftarrow \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k}U_{k,j}}$
    $U_{i,j} \leftarrow A_{i,j} - S_1$
  Fin Pour
  Pour $j \leftarrow 1$ à $i-1$ faire
    $L_{j,i} \leftarrow 0$
  Fin Pour
  $L_{i,i} \leftarrow 1$
  Pour $j \leftarrow i+1$ à n faire
    $\boxed{S_2 \leftarrow \sum_{k=1}^{i-1} L_{j,k}U_{k,i}}$
    $L_{j,i} \leftarrow \frac{1}{U_{i,i}}(A_{j,i} - S_2)$.
  Fin Pour
Fin Pour

Algorithme 9 $\boxed{\mathcal{R}_4}$

Pour $i \leftarrow 1$ à n faire
  Pour $j \leftarrow 1$ à $i-1$ faire
    $U(i,j) \leftarrow 0$
  Fin Pour
  Pour $j \leftarrow i$ à n faire
    $S_1 \leftarrow 0$
    Pour $k \leftarrow 1$ à $i-1$ faire
      $S_1 \leftarrow S_1 + L_{i,k} * U_{k,j}$
    Fin Pour
    $U_{i,j} \leftarrow A_{i,j} - S_1$
  Fin Pour
  Pour $j \leftarrow 1$ à $i-1$ faire
    $L_{j,i} \leftarrow 0$
  Fin Pour
  $L_{i,i} \leftarrow 1$
  Pour $j \leftarrow i+1$ à n faire
    $S_2 \leftarrow 0$
    Pour $k \leftarrow 1$ à $i-1$ faire
      $S_2 \leftarrow S_2 + L_{j,k} * U_{k,i}$
    Fin Pour
    $L_{j,i} \leftarrow \frac{1}{U_{i,i}}(A_{j,i} - S_2)$.
  Fin Pour
Fin Pour

Algorithm Fonction FactLU permet de calculer les matrices $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$ dites matrice de factorisation $\mathbb{LU}$ associée à la matrice $\mathbb{A}$, telle que

$$\mathbb{A} = \mathbb{LU}$$

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les sous-matrices principales sont inversibles.

Résultat : $\mathbb{L}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire inférieure avec $L_{i,i} = 1,\ \forall i \in [\![1, n]\!]$
$\mathbb{U}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure.

Fonction $[\mathbb{L}, \mathbb{U}] \leftarrow$ FactLU ($\mathbb{A}$)
  $\mathbb{U} \leftarrow \mathbb{O}_n$ ▷ $\mathbb{O}_n$ matrice nulle $n \times n$
  $\mathbb{L} \leftarrow \mathbb{I}_n$ ▷ $\mathbb{I}_n$ matrice identitée $n \times n$
  Pour $i \leftarrow 1$ à n faire
    Pour $j \leftarrow i$ à n faire ▷ Calcul de la ligne i de $\mathbb{U}$
      $S_1 \leftarrow 0$
      Pour $k \leftarrow 1$ à $i-1$ faire
        $S_1 \leftarrow S_1 + L(i,k) * U(k,j)$
      Fin Pour
      $U(i,j) \leftarrow A(i,j) - S_1$
    Fin Pour
    Pour $j \leftarrow i+1$ à n faire ▷ Calcul de la colonne i de $\mathbb{L}$
      $S_2 \leftarrow 0$
      Pour $k \leftarrow 1$ à $i-1$ faire
        $S_2 \leftarrow S_2 + L(j,k) * U(k,i)$
      Fin Pour
      $L(j,i) \leftarrow (A_{j,i} - S_2) / U(i,i)$.
    Fin Pour
  Fin Pour
Fin Fonction

Plan

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **hermitienne inversible** admettant une factorisation $\mathbb{LU}$. On pose

$$\mathbb{D} = \operatorname{diag} \mathbb{U} \text{ et } \mathbb{R} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{U}.$$

$\mathbb{R}$ est alors triangulaire supérieure à diagonale unité. On a alors

$$\mathbb{A} = \mathbb{LU} = \mathbb{LDD}^{-1}\mathbb{U} = \mathbb{LDR}.$$

$$\mathbb{A} \text{ hermitienne } \mathbb{A}^* = \mathbb{A} \implies \mathbb{A} = \mathbb{R}^*(\mathbb{D}^*\mathbb{L}^*) = \mathbb{L}(\mathbb{DR})$$

Par unicité de la factorisation $\mathbb{LU}$:

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{L} \text{ et} \mathbb{D}^*\mathbb{L}^* = \mathbb{DR} \implies \mathbb{R}^* = \mathbb{L} \text{ et } \mathbb{D}^* = \mathbb{D}$$

Théorème 8: Factorisation $\mathbb{LDL}^*$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne inversible admettant une factorisation $\mathbb{LU}$. Alors $\mathbb{A}$ s'écrit sous la forme

$$\mathbb{A} = \mathbb{LDL}^* \tag{9}$$

où $\mathbb{D} = \operatorname{diag} \mathbb{U}$ est une matrice à coefficients réels.

Corollaire 8.1:

Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une factorisation $\mathbb{LDL}^*$ avec $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs **si et seulement si** la matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive.

Plan

Definition

Une **factorisation régulière de Cholesky** d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une factorisation $\mathbb{A} = \mathbb{BB}^*$ où $\mathbb{B}$ est une matrice triangulaire inférieure inversible.
Si les coefficients diagonaux de $\mathbb{B}$ sont positifs, on parle alors d'une **factorisation positive de Cholesky**.

Théorème: Factorisation de Cholesky

La matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une factorisation régulière de Cholesky **si et seulement si** la matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive. Dans ce cas, elle admet une unique factorisation positive.

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne définie positive et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$. On note $\mathbb{B}$ la matrice de factorisation positive de Cholesky de $\mathbb{A}$.

Trouver $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad (\Longleftrightarrow \quad \mathbb{B}\mathbb{B}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}) \tag{10}$$

est équivalent à

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne définie positive et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$. On note $\mathbb{B}$ la matrice de factorisation positive de Cholesky de $\mathbb{A}$.

Trouver $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad (\Longleftrightarrow \quad \mathbb{B}\mathbb{B}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}) \tag{10}$$

est équivalent à

Trouver $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ solution de

$$\mathbb{B}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \tag{11}$$

avec $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ solution de

$$\mathbb{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}. \tag{12}$$

Algorithme de résolution de systèmes linéaire par Cholesky

Algorithm Fonction RSLCholesky permettant de résoudre, par une factorisation de Cholesky positive, le système linéaire

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

où $\mathbb{A}$ une matrice hermitienne de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie positive et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$.

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne définie positive,
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{C}^n$.
Résultat : $\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{C}^n$.

```
Fonction x ← RSLCholesky ( A, b )
    B ← Cholesky(A)                 ▷ Factorisation positive de Cholesky
    y ← RSLTriInf(B, b)             ▷ Résolution du système By = b
    U ← MatAdjointe(B)              ▷ Calcul de la matrice adjointe de B
    x ← RSLTriSup(U, y)             ▷ Résolution du système B*x = y
Fin Fonction
```

Il nous faut donc écrire la fonction Cholesky

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne définie positive. il existe une unique matrice $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure avec $\mathrm{B}_{i,i} \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, telle que

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$$

c'est à dire

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}_{1,1} & \dots & \mathrm{A}_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \dots \\ \mathrm{A}_{n,1} & \dots & \mathrm{A}_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{B}_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \mathrm{B}_{n,1} & \dots & \dots & \mathrm{B}_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\mathrm{B}_{1,1}} & \dots & \dots & \overline{\mathrm{B}_{n,1}} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \overline{\mathrm{B}_{n,n}} \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne définie positive. il existe une unique matrice $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure avec $B_{i,i} \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, telle que

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$$

c'est à dire

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \dots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ B_{n,1} & \dots & \dots & B_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{B_{1,1}} & \dots & \dots & \overline{B_{n,1}} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \overline{B_{n,n}} \end{pmatrix}.$$

- Calcul de $B_{1,1}$ (la 1ère ligne de $\mathbb{B}$ est donc déterminée) $\Longrightarrow$ calcul 1ère colonne de $\mathbb{B}$.

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne définie positive. il existe une unique matrice $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure avec $B_{i,i} \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, telle que

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$$

c'est à dire

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \dots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ B_{n,1} & \dots & \dots & B_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{B_{1,1}} & \dots & \dots & \overline{B_{n,1}} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \overline{B_{n,n}} \end{pmatrix}.$$

- Calcul de $B_{1,1}$ (la 1ère ligne de $\mathbb{B}$ est donc déterminée) $\Longrightarrow$ calcul 1ère colonne de $\mathbb{B}$.
- Puis calcul de $B_{2,2}$ (la 2ème ligne de $\mathbb{B}$ est donc déterminée) $\Longrightarrow$ calcul 2ème colonne de $\mathbb{B}$.
- Etc...

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On suppose connues les $i-1$ premières colonnes de $\mathbb{B}$.
Peut-on calculer la colonne i de $\mathbb{B}$?

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^* \implies A_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} B_{i,k}(\mathbb{B}^*)_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} B_{i,k}\overline{B_{i,k}}$$

Or $\mathbb{B}$ triangulaire inférieure (i.e. $B_{i,j} = 0$ si $j > i$)

$$A_{i,i} = \sum_{k=1}^{i-1} |B_{i,k}|^2 + |B_{i,i}|^2$$

et donc

$$B_{i,i} = \left(A_{i,i} - \sum_{j=1}^{i-1} |B_{i,j}|^2 \right)^{1/2}.$$

Il reste à déterminer $B_{j,i}$, $\forall j \in [\![i+1, n]\!]$.

$$A_{j,i} = \sum_{k=1}^{n} B_{j,k}(\mathbb{B}^*)_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} B_{j,k}\overline{B_{i,k}}, \ \forall j \in [\![i+1, n]\!]$$

Comme $\mathbb{L}$ est triangulaire inférieure on obtient

$$A_{j,i} = \sum_{k=1}^{i} B_{j,k}\overline{B_{i,k}} = \sum_{k=1}^{i-1} B_{j,k}\overline{B_{i,k}} + B_{j,i}\overline{B_{i,i}}, \ \forall j \in [\![i+1, n]\!]$$

Or $B_{i,i} > 0$ connu et les $i-1$ premières colonnes de $\mathbb{B}$ aussi.

$$\begin{aligned} B_{j,i} &= \frac{1}{B_{i,i}} \left(A_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} B_{j,k}\overline{B_{i,k}} \right), \ \forall j \in [\![i+1, n]\!] \\ B_{j,i} &= 0, \ \forall j \in [\![1, i-1]\!]. \end{aligned}$$

Algorithme 11 $\mathcal{R}_0$

Calculer la matrice $\mathbb{B}$

Algorithme 11 $\mathcal{R}_1$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
- Calculer $B_{i,i}$, connaissant les $i-1$ premières colonnes de $\mathbb{B}$.
- Calculer la $i^{\text{ème}}$ colonne de $\mathbb{B}$.

Fin Pour

Algorithme 11 $\mathcal{R}_1$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
- Calculer $B_{i,i}$, connaissant les $i-1$ premières colonnes de $\mathbb{B}$.
- Calculer la $i^{\text{ème}}$ colonne de $\mathbb{B}$.

Fin Pour

Algorithme 11 $\mathcal{R}_2$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**

$$B_{i,i} \leftarrow \left(A_{i,i} - \sum_{j=1}^{i-1} |B_{i,j}|^2\right)^{1/2}$$

Pour $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**

$B_{j,i} \leftarrow 0$

Fin Pour

Pour $j \leftarrow i+1$ **à** n **faire**

$$B_{j,i} \leftarrow \frac{1}{B_{i,i}}\left(A_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} B_{j,k}\overline{B_{i,k}}\right).$$

Fin Pour

Fin Pour

Algorithme 11 $\mathcal{R}_2$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**

$$B_{i,i} \leftarrow \left(A_{i,i} - \sum_{j=1}^{i-1} |B_{i,j}|^2\right)^{1/2}$$

Pour $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**

$B_{j,i} \leftarrow 0$

Fin Pour

Pour $j \leftarrow i+1$ **à** n **faire**

$$B_{j,i} \leftarrow \frac{1}{B_{i,i}}\left(A_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} B_{j,k}\overline{B_{i,k}}\right).$$

Fin Pour

Fin Pour

Algorithme 11 $\mathcal{R}_3$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**

$$S_1 \leftarrow \sum_{j=1}^{i-1} |B_{i,j}|^2$$

$$B_{i,i} \leftarrow (A_{i,i} - S_1)^{1/2}$$

Pour $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**

$B_{j,i} \leftarrow 0$

Fin Pour

Pour $j \leftarrow i+1$ **à** n **faire**

$$S_2 \leftarrow \sum_{k=1}^{i-1} B_{j,k}\overline{B_{i,k}}$$

$$B_{j,i} \leftarrow \frac{1}{B_{i,i}}(A_{j,i} - S_2).$$

Fin Pour

Fin Pour

Algorithme 11 $\mathcal{R}_3$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**

$$S_1 \leftarrow \sum_{j=1}^{i-1} |B_{i,j}|^2$$

$$B_{i,i} \leftarrow (A_{i,i} - S_1)^{1/2}$$

Pour $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**

$B_{j,i} \leftarrow 0$

Fin Pour

Pour $j \leftarrow i+1$ **à** n **faire**

$$S_2 \leftarrow \sum_{k=1}^{i-1} B_{j,k}\overline{B_{i,k}}$$

$$B_{j,i} \leftarrow \frac{1}{B_{i,i}}(A_{j,i} - S_2).$$

Fin Pour

Fin Pour

Algorithme 11 $\mathcal{R}_4$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**

$S_1 \leftarrow 0$

Pour $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**

$S_1 \leftarrow S_1 + |B_{i,j}|^2$

Fin Pour

$B_{i,i} \leftarrow (A_{i,i} - S_1)^{1/2}$

Pour $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**

$B_{j,i} \leftarrow 0$

Fin Pour

Pour $j \leftarrow i+1$ **à** n **faire**

$S_2 \leftarrow 0$

Pour $k \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**

$S_2 \leftarrow S_2 + B_{j,k}\overline{B_{i,k}}$

Fin Pour

$$B_{j,i} \leftarrow \frac{1}{B_{i,i}}(A_{j,i} - S_2).$$

Fin Pour

Fin Pour

Algorithm Fonction CHOLESKY permettant de calculer la matrice $\mathbb{B}$, dites matrice de factorisation positive de Cholesky associée à la matrice $\mathbb{A}$, telle que $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$.

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne définie positive.
Résultat : $\mathbb{B}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure avec $\mathbb{B}(i,i) > 0,\ \forall i \in [\![1, n]\!]$

```
Fonction B ← CHOLESKY ( A )
  Pour i ← 1 à n faire
    S1 ← 0
    Pour j ← 1 à i − 1 faire
      S1 ← S1 + |B(i, j)|^2
    Fin Pour
    B(i, i) ← SQRT(A(i, i) − S1)
    Pour j ← 1 à i − 1 faire
      B(j, i) ← 0
    Fin Pour
    Pour j ← i + 1 à n faire
      S2 ← 0
      Pour k ← 1 à i − 1 faire
        S2 ← S2 + B(j, k) * conj(B(i, k))
      Fin Pour
      B(j, i) ← (A(j, i) − S2)/B(i, i).
    Fin Pour
  Fin Pour
Fin Fonction
```


Exercice 3

Proposer une méthode permettant de tester la fonction CHOLESKY .

Plan

Definition: Matrice élémentaire de Householder

Soit $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$. On appelle **matrice élémentaire de Householder** la matrice $\mathbb{H}(\boldsymbol{u}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u}) = \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*. \tag{13}$$

Propriété:

Toute matrice élémentaire de Householder est hermitienne et unitaire.

Propriété:

Soient $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ et $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n$, $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$. On note $\boldsymbol{x}_{\parallel} = \operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}\rangle \boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{x}_{\perp} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\parallel}$. On a alors

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x}_{\perp} + \boldsymbol{x}_{\parallel}) = \boldsymbol{x}_{\perp} - \boldsymbol{x}_{\parallel}. \tag{14}$$

et

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \quad \text{si } \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}\rangle = 0. \tag{15}$$

Théorème:

Soient $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2$ et $\arg \alpha = -\arg\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \ [\pi]$. On a alors

$$\mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}\|_2}\right)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}. \tag{16}$$

Exercice:

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$.

Q.1 *Ecrire la fonction algorithmique* HOUSEHOLDER *permettant de retourner une matrice de Householder* $\mathbb{H}$ *et* $\alpha \in \mathbb{C}$ *tels que* $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$. *Le choix du* α *est fait par le paramètre* δ *(0 ou 1) de telle sorte que* $\arg\alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle) + \delta\pi$ *avec* $|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2$.
Des fonctions comme DOT$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *(produit scalaire de deux vecteurs),* NORM$(\boldsymbol{a})$ *(norme 2 d'un vecteur),* ARG(z) *(argument d'un nombre complexe),* MATPROD$(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ *(produit de deux matrices),* CTRANSPOSE$(\mathbb{A})$ *(adjoint d'une matrice), ... pourront être utilisées*

Q.2 *Proposer un programme permettant de tester cette fonction. On pourra utiliser la fonction* VECRAND(n) *retournant un vecteur aléatoire de* $\mathbb{C}^n$*, les parties réelles et imaginaires de chacune de ses composantes étant dans* $]0, 1[$ *(loi uniforme).*

Q.3 *Proposer un programme permettant de vérifier que* $\delta = 1$ *est le "meilleur" choix.*

Corollaire 8.2:

Soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^n$ avec $a_1 \neq 0$ et $\exists j \in [\![2, n]\!]$ tel que $a_j \neq 0$. Soient $\theta = \arg a_1$ et

$$\boldsymbol{u}_{\pm} = \frac{\boldsymbol{a} \pm \|\boldsymbol{a}\|_2 e^{\imath\theta}\boldsymbol{e}_1}{\|\boldsymbol{a} \pm \|\boldsymbol{a}\|_2 e^{\imath\theta}\boldsymbol{e}_1\|}$$

Alors

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u}_{\pm})\boldsymbol{a} = \mp \|\boldsymbol{a}\|_2 e^{\imath\theta}\boldsymbol{e}_1 \tag{17}$$

où $\boldsymbol{e}_1$ désigne le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Théorème 9:

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice. Il existe une matrice unitaire $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ produit d'au plus $n-1$ matrices de Householder et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}. \tag{18}$$

Si $\mathbb{A}$ est réelle alors $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont aussi réelles et l'on peut choisir $\mathbb{Q}$ de telle sorte que les coefficients diagonaux de $\mathbb{R}$ soient positifs. De plus, si $\mathbb{A}$ est inversible alors la factorisation est unique.

Exercice: Algorithmique

Q.1 *Ecrire une fonction* FACTQR *permettant de calculer la factorisation* $\mathbb{QR}$ *d'une matrice* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On pourra utiliser la fonction HOUSEHOLDER *(voir Exercice 54, page 78).*

Q.2 *Ecrire un programme permettant de tester cette fonction.*

Plan