

## EXERCICE 1

Soit  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$  une matrice hermitienne inversible décomposée en  $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$  où  $\mathbb{M}$  est inversible. On note  $\mathbb{B} = \mathbb{I} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}$ .

**Q. 1** Montrer que la matrice  $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$  est hermitienne. □

On suppose maintenant que  $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$  est définie positive.

**Q. 2** Soit  $\mathbf{x}$  un vecteur quelconque de  $\mathbb{C}^n$  et  $\mathbf{y} = \mathbb{B}\mathbf{x}$ .

a. Montrer que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbb{A}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle \quad (\text{P-1})$$

et

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}. \quad (\text{P-2})$$

b. En déduire que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbb{A}\mathbf{y} \rangle = \langle (\mathbf{x} - \mathbf{y}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rangle. \quad (\text{P-3})$$

□

**Q. 3** Montrer que si  $\mathbb{A}$  est définie positive alors  $\rho(\mathbb{B}) < 1$ . □

**Q. 4** Démontrer par l'absurde que si  $\rho(\mathbb{B}) < 1$  alors  $\mathbb{A}$  est définie positive. □

### Correction

**R. 1** On a

$$\begin{aligned} (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})^* &= \mathbb{M} + \mathbb{N}^* \\ &= \mathbb{A} + \mathbb{N} + \mathbb{N}^* = \mathbb{A}^* + \mathbb{N} + \mathbb{N}^* \quad \text{car } \mathbb{A} \text{ est hermitienne} \\ &= \mathbb{M}^* + \mathbb{N}. \end{aligned}$$

La matrice  $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$  est donc hermitienne.

**R. 2** a. On a  $\mathbf{y} = \mathbb{B}\mathbf{x}$  avec  $\mathbb{B} = \mathbb{I} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}$  ce qui donne

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbb{B}\mathbf{x} = (\mathbb{I} - \mathbb{B})\mathbf{x} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}.$$

L'équation (P-2) est donc démontrée. Pour prouver (P-1), on note que

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}$$

et donc

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{y}, \mathbb{A}\mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}(\mathbf{x} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}) \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement (P-1).

b. En utilisant (P-2), on obtient

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rangle &= \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle \\ &= \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, (\mathbb{M} + \mathbb{N}^*)\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle \quad \text{car } \mathbb{M}^* + \mathbb{N} \text{ hermitienne} \\ &= \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, (\mathbb{M} + \mathbb{M}^* - \mathbb{A}^*)\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle \quad \text{car } \mathbb{N} = \mathbb{M} - \mathbb{A} \\ &= \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{M}^*\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle \quad \text{car } \mathbb{A} \text{ hermitienne} \end{aligned}$$

Or, par propriété du produit scalaire, on a

$$\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{M}^*\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{M}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbb{A}^*\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle.$$

Comme  $\mathbb{A}$  est hermitienne, on obtient

$$\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{M}^*\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle.$$

On abouti alors à

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle.$$

L'équation (P-3) est obtenue en utilisant (P-1).

**R. 3** On veut démontrer que sous les hypothèses  $\mathbb{A}$  hermitienne définie positive et  $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$  (hermitienne) définie positive on a  $\rho(\mathbb{B}) < 1$ , c'est à dire que pour tout élément propre  $(\lambda, \mathbf{u})$  de  $\mathbb{B}$  alors  $|\lambda| < 1$ .

Soit  $(\lambda, \mathbf{u}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  un élément propre de  $\mathbb{B}$ . On a  $\mathbb{B}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ . En prenant  $\mathbf{x} = \mathbf{u}$  dans Q.2, on a  $\mathbf{y} = \mathbb{B}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$  et donc  $\mathbf{x} - \mathbf{y} = (1 - \lambda)\mathbf{u}$ . De (P-3) on obtient

$$\langle \mathbf{u}, \mathbb{A}\mathbf{u} \rangle - \langle \lambda\mathbf{u}, \lambda\mathbb{A}\mathbf{u} \rangle = \langle (1 - \lambda)\mathbf{u}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})((1 - \lambda)\mathbf{u}) \rangle$$

c'est à dire

$$(1 - |\lambda|^2) \langle \mathbf{u}, \mathbb{A}\mathbf{u} \rangle = |1 - \lambda|^2 \langle \mathbf{u}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})\mathbf{u} \rangle. \quad (\text{P-4})$$

Comme par hypothèse, la matrice  $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$  (hermitienne) est définie positive et  $\mathbf{u} \neq 0$ , on obtient

$$\langle \mathbf{u}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})\mathbf{u} \rangle > 0$$

et donc on déduit de (P-4) que

$$(1 - |\lambda|^2) \langle \mathbf{u}, \mathbb{A}\mathbf{u} \rangle \geq 0.$$

Comme  $\mathbb{A}$  hermitienne définie positive et  $\mathbf{u} \neq 0$ , on déduit de (P-4) que  $1 - |\lambda|^2 \geq 0$  et donc  $|\lambda| \leq 1$ .

On va démontrer par l'absurde que  $|\lambda| \neq 1$ . On suppose  $|\lambda| = 1$ , de (P-4) on déduit

$$|1 - \lambda|^2 \langle \mathbf{u}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})\mathbf{u} \rangle = 0.$$

Comme par hypothèse, la matrice  $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$  (hermitienne) est définie positive et  $\mathbf{u} \neq 0$ , on obtient  $|1 - \lambda|^2 = 0$ , c'est à dire  $\lambda = 1$ . Or dans ce cas on a

$$\mathbf{y} = \mathbb{B}\mathbf{x} = \mathbb{B}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} = \mathbf{u}.$$

L'équation (P-2) donne alors

$$0 = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{u}.$$

Comme  $\mathbf{u} \neq 0$ , et que  $\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}$  est inversible, l'équation ci-dessus est impossible, donc  $|\lambda| \neq 1$ .

**R. 4** On veut démontrer par l'absurde que, sous les hypothèses  $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$  (hermitienne) définie positive,  $\mathbb{A}$  hermitienne inversible et  $\rho(\mathbb{B}) < 1$ , on a  $\mathbb{A}$  définie positive.

On suppose que  $\mathbb{A}$  n'est pas définie positive. Alors il existe  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  tel que  $\langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle \notin \mathbb{R}^{+*}$ .

Pour une matrice quelconque que  $\langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle \in \mathbb{C}$ , or comme  $\mathbb{A}$  est hermitienne on a  $\langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle \in \mathbb{R}$ . En effet, par propriété du produit scalaire on a

$$\langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{A}^* \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle}.$$

On note  $\mathbf{x}^{[0]} = \mathbf{x}$  et  $\alpha_0 = \langle \mathbf{x}^{[0]}, \mathbb{A}\mathbf{x}^{[0]} \rangle$  le nombre réel négatif ou nul ( $\alpha_0 \leq 0$ ). On définit alors pour les suites

$$\mathbf{x}^{[k]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[k-1]} \quad \text{et} \quad \alpha_k = \langle \mathbf{x}^{[k]}, \mathbb{A}\mathbf{x}^{[k]} \rangle.$$

On a alors

$$\mathbf{x}^{[k]} = \mathbb{B}^k \mathbf{x}^{[0]}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

D'après le théorème du cours (Théorème B.72 page 195),

$$\rho(\mathbb{B}) < 1 \iff \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{B}^k \mathbf{v} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n.$$

On a donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{x}^{[k]} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_k = 0$$

On utilise maintenant l'égalité (P-3) avec  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{[k-1]}$  et  $\mathbf{y} = \mathbb{B}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{[k]}$

$$\langle \mathbf{x}^{[k-1]}, \mathbb{A}\mathbf{x}^{[k-1]} \rangle - \langle \mathbf{x}^{[k]}, \mathbb{A}\mathbf{x}^{[k]} \rangle = \langle (\mathbf{x}^{[k-1]} - \mathbf{x}^{[k]}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x}^{[k-1]} - \mathbf{x}^{[k]}) \rangle$$

On peut noter que  $\mathbf{x}^{[k-1]} - \mathbf{x}^{[k]} \neq 0$ , car sinon  $\mathbf{x}^{[k-1]} = \mathbf{x}^{[k]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[k-1]}$  et  $\lambda = 1$  serait valeur propre de  $\mathbb{B}$ . **il faudrait montrer que  $\mathbf{x}^{[k-1]} \neq 0$**

Dans ce cas, comme  $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$  est définie positive, on obtient

$$\langle \mathbf{x}^{[k-1]}, \mathbb{A}\mathbf{x}^{[k-1]} \rangle - \langle \mathbf{x}^{[k]}, \mathbb{A}\mathbf{x}^{[k]} \rangle = \alpha_{k-1} - \alpha_k > 0.$$

La suite  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est donc strictement décroissante de premier terme  $\alpha_0 \leq 0$ : elle ne peut converger vers 0.

Montrons par récurrence forte que  $\mathbf{x}^{[k]} \neq 0$ ,  $\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k-1]} \neq 0$ , et  $0 \geq \alpha_{k-1} > \alpha_k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ .

- **Initialisation** : On a  $\mathbf{x}^{[0]} \neq 0$  et  $\mathbf{x}^{[1]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[0]}$ .

On montre par l'absurde que  $\mathbf{x}^{[1]} \neq 0$ . Supposons  $\mathbf{x}^{[1]} = 0$ , alors  $\alpha_1 = 0$  et  $\mathbf{x}^{[0]} - \mathbf{x}^{[1]} = \mathbf{x}^{[0]} \neq 0$ . Comme  $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$  est hermitienne définie positive on obtient

$$\alpha_0 - \alpha_1 = \left\langle (\mathbf{x}^{[0]} - \mathbf{x}^{[1]}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x}^{[0]} - \mathbf{x}^{[1]}) \right\rangle > 0$$

et contradiction avec  $\alpha_0 \leq 0$ .

On montre ensuite par l'absurde que  $\mathbf{x}^{[0]} \neq \mathbf{x}^{[1]}$ . Supposons  $\mathbf{x}^{[1]} = \mathbf{x}^{[0]}$ . Par construction  $\mathbf{x}^{[1]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[0]}$ , et dans ce cas, comme  $\mathbf{x}^{[0]} \neq 0$ ,  $(1, \mathbf{x}^{[0]})$  serait un élément propre de  $\mathbb{B}$ : contradiction avec  $\rho(\mathbb{B}) < 1$ .

Comme  $\mathbf{x}^{[0]} - \mathbf{x}^{[1]} \neq 0$ , on a

$$\alpha_0 - \alpha_1 = \left\langle (\mathbf{x}^{[0]} - \mathbf{x}^{[1]}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x}^{[0]} - \mathbf{x}^{[1]}) \right\rangle > 0$$

et donc  $0 \geq \alpha_0 > \alpha_1$ .

- **Hérédité** : On suppose la propriété vraie jusqu'au rang  $k$ . On a alors  $\mathbf{x}^{[k]} \neq 0$ ,  $\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[k]}$  et  $\alpha_k \leq 0$ .

On montre par l'absurde que  $\mathbf{x}^{[k+1]} \neq 0$ . Supposons  $\mathbf{x}^{[k+1]} = 0$ , alors  $\alpha_{k+1} = 0$  et  $\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbf{x}^{[k]} \neq 0$ . Comme  $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$  est hermitienne définie positive on obtient

$$\alpha_k - \alpha_{k+1} = \left\langle (\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k+1]}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k+1]}) \right\rangle > 0$$

et contradiction avec  $\alpha_k \leq 0$ .

On montre ensuite par l'absurde que  $\mathbf{x}^{[k]} \neq \mathbf{x}^{[k+1]}$ . Supposons  $\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbf{x}^{[k]}$ . Par construction  $\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[k]}$ , et dans ce cas, comme  $\mathbf{x}^{[k]} \neq 0$ ,  $(1, \mathbf{x}^{[k]})$  serait un élément propre de  $\mathbb{B}$ : contradiction avec  $\rho(\mathbb{B}) < 1$ .

Comme  $\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k+1]} \neq 0$ , on a

$$\alpha_k - \alpha_{k+1} = \left\langle (\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k+1]}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k+1]}) \right\rangle > 0$$

et donc  $0 \geq \alpha_k > \alpha_{k+1}$ .

◇

