

Analyse Numérique I

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 1ère année / L3 MIM

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2023/10/12

Chapitre 1: Erreurs : arrondis, bug and Co.

Chapitre 2: Langage algorithmique

Chapitre 3: Rappels algèbre linéaire

Chapitre 4: Résolution de systèmes non-linéaires

Chapitre 5: Résolution de systèmes linéaires

Chapitre 6: Polynômes d'interpolation

Chapitre 7: Intégration numérique



Racines/zéros d'un polynôme

- **degré 2** : Babyloniens en 1600 avant J.-C.
- **degré 3** : Scipio del Ferro (1465-1526, mathématicien italien) et Niccolo Fontana (1499-1557, mathématicien italien)
- **degré 4** : Ludovico Ferrari (1522-1565, mathématicien italien)
- **degré 5** : Paolo Ruffini (1765-1822, mathématicien italien) en 1799, Niels Henrick Abel (1802-1829, mathématicien norvégien) en 1824, montrent qu'il n'existe **pas de solution analytique**.



(a) Niccolo Fontana 1499-1557,



(b) Paolo Ruffini 1765-1822,



(c) Niels Henrick Abel 1802-1829,

- 1 Recherche des zéros d'une fonction
 - Méthode de dichotomie ou de bisection
 - Points fixes d'une fonction (dimension 1)
 - Points fixes attractifs et répulsifs
 - Algorithme générique du point fixe
 - Points fixes pour la recherche de racines
- 2 Résolution de systèmes non linéaires
 - Méthode de la corde
 - La méthode de Newton
 - Méthode de la sécante
 - Point fixe
 - Méthode de Newton
 - Exemples

Soit $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

$$\alpha \in \mathcal{D} \text{ tels que } f(\alpha) = 0.$$

Soit $I =]a, b[$, $\bar{I} \subset \mathcal{D}$ on suppose $\exists! \alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$.

1 Recherche des zéros d'une fonction

- Méthode de dichotomie ou de bisection
- Points fixes d'une fonction (dimension 1)
- Points fixes attractifs et répulsifs
- Algorithme générique du point fixe
- Points fixes pour la recherche de racines

- Méthode de la corde
- La méthode de Newton
- Méthode de la sécante

2 Résolution de systèmes non linéaires

- Point fixe
- Méthode de Newton
- Exemples



principe de la méthode de dichotomie : Soit I un intervalle contenant un **unique zéro** de la fonction f , on le divise par son milieu en deux intervalles et on détermine lequel des deux contient le zéro. On itère ce processus sur le nouvel intervalle.

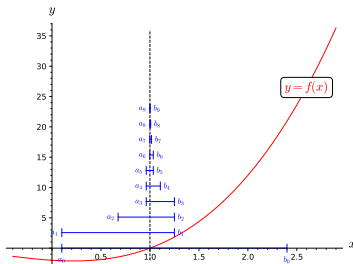


Figure: Méthode de dichotomie: $f(x) = (x + 2)(x + 1)(x - 1)$



principe de la méthode de dichotomie : Soit I un intervalle contenant un **unique zéro** de la fonction f , on le divise par son milieu en deux intervalles et on détermine lequel des deux contient le zéro. On itère ce processus sur le nouvel intervalle.

- $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_0 = \frac{a+b}{2}$,
- $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} a_{k+1} = b_{k+1} = x_k & \text{si } f(x_k) = 0, \\ a_{k+1} = x_k, b_{k+1} = b_k & \text{si } f(b_k)f(x_k) < 0, \\ a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x_k & \text{sinon (i.e. } f(a_k)f(x_k) < 0.) \end{cases}$$

et

$$x_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2.$$



Exercice 1

On suppose que la fonction f est continue sur $[a, b]$, vérifie $f(a)f(b) < 0$ et qu'il existe un unique $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Q.1

- 1 Montrer que les suites (a_k) et (b_k) convergent vers α .
- 2 En déduire que la suite (x_k) converge vers α .

Q.2

- 1 Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}$.
- 2 Soit $\epsilon > 0$. En déduire que si $k \geq \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$ alors $|x_k - \alpha| \leq \epsilon$.





Proposition 1.1

Soit $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(a)f(b) < 0$ et admettant $\alpha \in]a, b[$ comme **unique** solution de $f(x) = 0$. Alors la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par la méthode de dichotomie converge vers α et

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{b - a}{2^{k+1}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On a alors $\forall \epsilon > 0, \forall k \geq \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$

$$|x_k - \alpha| \leq \epsilon.$$

- Que cherche-t'on?
- Quelles sont les données du problèmes?

- Que cherche-t'on?

Résultat

:

α_ϵ : un réel tel que $|\alpha_\epsilon - \alpha| \leq \epsilon$.

- Quelles sont les données du problèmes?

- Que cherche-t'on?

Résultat

:

α_ϵ : un réel tel que $|\alpha_\epsilon - \alpha| \leq \epsilon$.

- Quelles sont les données du problèmes?

Données : a, b : deux réels $a < b$,

f : $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses
de la proposition ,

ϵ : un réel strictement positif.

Algorithme 1 \mathcal{R}_0

1: $k_{\min} \leftarrow \mathbf{E}\left(\frac{\log\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)}{\log(2)}\right) \quad \triangleright \mathbf{E}$, partie entière

2: Calcul de la suite $(x_k)_{k=0}^{k_{\min}}$ par dichotomie

3: $\alpha_\epsilon \leftarrow x_{k_{\min}}$

Algorithme 1 \mathcal{R}_1

1: $k_{\min} \leftarrow \mathbf{E}\left(\frac{\log\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)}{\log(2)}\right) \quad \triangleright \mathbf{E}$, partie entière

2: Initialisation de x_0

3: **Pour** $k \leftarrow 0$ à $k_{\min} - 1$ **faire**

4: Calcul de la suite (x_{k+1}) par dichotomie

5: **Fin Pour**

6: $\alpha_\epsilon \leftarrow x_{k_{\min}}$

Algorithme 1 \mathcal{R}_1

- 1: $k_{\min} \leftarrow \mathbf{E}\left(\frac{\log\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)}{\log(2)}\right) \triangleright \mathbf{E}$, partie entière
- 2: Initialisation de x_0
- 3: **Pour** $k \leftarrow 0$ à $k_{\min} - 1$ faire
- 4: Calcul de la suite (x_{k+1}) par dichotomie
- 5: **Fin Pour**
- 6: $\alpha_\epsilon \leftarrow x_{k_{\min}}$

Algorithme 1 \mathcal{R}_2

- 1: $k_{\min} \leftarrow \mathbf{E}\left(\frac{\log\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)}{\log(2)}\right)$
- 2: $a_0 \leftarrow a, b_0 \leftarrow b$
- 3: $x_0 \leftarrow \frac{a_0 + b_0}{2}$
- 4: **Pour** $k \leftarrow 0$ à $k_{\min} - 1$ faire
 - 5: **Si** $f(x_k) == 0$ alors
 - 6: $a_{k+1} \leftarrow x_k, b_{k+1} \leftarrow x_k$
 - 7: **Sinon Si** $f(x_k)f(b_k) < 0$ alors
 - 8: $a_{k+1} \leftarrow x_k, b_{k+1} \leftarrow b_k$
 - 9: **Sinon**
 - 10: $a_{k+1} \leftarrow a_k, b_{k+1} \leftarrow x_k$
 - 11: **Fin Si**
 - 12: $x_{k+1} \leftarrow \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$
- 13: **Fin Pour**
- 14: $\alpha_\epsilon \leftarrow x_{k_{\min}}$

Algorithm Méthode de dichotomie : version 1

Données : a, b : deux réels $a < b$,
 f : $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant
les hypothèses de la proposition 1.1,
 eps : un réel strictement positif.

Résultat : x : un réel tel que $|x - \alpha| \leq \text{eps}$.

```
1: Fonction  $x \leftarrow \text{DICHOTOMIE1} ( f, a, b, \text{eps} )$ 
2:  $k_{\min} \leftarrow \text{E}(\log((b - a)/\text{eps})/\log(2))$ 
3:  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{k_{\min}+1}$   $\triangleright \mathbf{A}(k + 1)$  contiendra  $a_k, \dots$ 
4:  $\mathbf{A}(1) \leftarrow a, \mathbf{B}(1) \leftarrow b, \mathbf{X}(1) \leftarrow (a + b)/2$ 
5: Pour  $k \leftarrow 1$  à  $k_{\min}$  faire
6:   Si  $f(\mathbf{X}(k)) == 0$  alors
7:      $\mathbf{A}(k + 1) \leftarrow \mathbf{X}(k), \mathbf{B}(k + 1) \leftarrow \mathbf{X}(k)$ 
8:   Sinon Si  $f(\mathbf{B}(k))f(\mathbf{X}(k)) < 0$  alors
9:      $\mathbf{A}(k + 1) \leftarrow \mathbf{X}(k), \mathbf{B}(k + 1) \leftarrow \mathbf{B}(k)$ 
10:   Sinon
11:      $\mathbf{A}(k + 1) \leftarrow \mathbf{A}(k), \mathbf{B}(k + 1) \leftarrow \mathbf{X}(k)$ 
12:   Fin Si
13:    $\mathbf{X}(k + 1) \leftarrow (\mathbf{A}(k + 1) + \mathbf{B}(k + 1))/2$ 
14: Fin Pour
15:  $x \leftarrow \mathbf{X}(k_{\min} + 1)$ 
16: Fin Fonction
```


Algorithme : versions 2, 3 et + si affinités

- $A = a, B = b$ et $x_0 = \frac{A+B}{2}$,
- $\forall k \in \llbracket 0, k_{\min} - 1 \rrbracket$,

$$\begin{cases} A = B = x_k & \text{si } f(x_k) = 0, \\ A = x_k, B \text{ inchangé} & \text{si } f(B)f(x_k) < 0, \\ B = x_k, A \text{ inchangé} & \text{sinon (i.e. } f(A)f(x_k) < 0.) \end{cases}$$

et

$$x_{k+1} = \frac{A + B}{2}$$

Algorithm Méthode de dichotomie : version 2

Données : a, b : deux réels $a < b$,
 f : $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant
les hypothèses de la proposition 1.1,
 eps : un réel strictement positif.

Résultat : x : un réel tel que $|x - \alpha| \leq \text{eps}$.

```
1: Fonction  $x \leftarrow \text{DICHOTOMIE2} ( f, a, b, \text{eps} )$ 
2:  $k_{\min} \leftarrow \lceil \log((b - a)/\text{eps}) / \log(2) \rceil$ 
3:  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{k_{\min}+1}$   $\triangleright \mathbf{X}(k + 1)$  contiendra  $x_k, \dots$ 
4:  $A \leftarrow a, B \leftarrow b, \mathbf{X}(1) \leftarrow (A + B)/2$ 
5: Pour  $k \leftarrow 1$  à  $k_{\min}$  faire
6:   Si  $f(\mathbf{X}(k)) == 0$  alors
7:      $A \leftarrow \mathbf{X}(k), B \leftarrow \mathbf{X}(k)$ 
8:   Sinon Si  $f(B)f(\mathbf{X}(k)) < 0$  alors
9:      $A \leftarrow \mathbf{X}(k)$   $\triangleright B$  inchangé
10:   Sinon
11:      $B \leftarrow \mathbf{X}(k)$   $\triangleright A$  inchangé
12:   Fin Si
13:    $\mathbf{X}(k + 1) \leftarrow (A + B)/2$ 
14: Fin Pour
15:  $x \leftarrow \mathbf{X}(k_{\min} + 1)$ 
16: Fin Fonction
```

Algorithm Méthode de dichotomie : version 3

Données : a, b : deux réels $a < b$,
 f : $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant
les hypothèses de la proposition 1.1,
 eps : un réel strictement positif.

Résultat : x : un réel tel que $|x - \alpha| \leq \text{eps}$.

```
1: Fonction  $x \leftarrow \text{DICHOTOMIE3} ( f, a, b, \text{eps} )$ 
2:  $k_{\min} \leftarrow \lceil \log((b - a)/\text{eps}) / \log(2) \rceil$ 
3:  $A, B \in \mathbb{R}$ 
4:  $A \leftarrow a, B \leftarrow b, x \leftarrow (a + b)/2$ 
5: Pour  $k \leftarrow 1$  à  $k_{\min}$  faire
6:   Si  $f(x) == 0$  alors
7:      $A \leftarrow x, B \leftarrow x$ 
8:   Sinon Si  $f(B)f(x) < 0$  alors
9:      $A \leftarrow x$  ▷  $B$  inchangé
10:  Sinon
11:     $B \leftarrow x$  ▷  $A$  inchangé
12:  Fin Si
13:   $x \leftarrow (A + B)/2$ 
14: Fin Pour
15: Fin Fonction
```

Algorithm Méthode de dichotomie : version 4

Données : a, b : deux réels $a < b$,
 f : $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ et $f(a)f(b) < 0$
 eps : un réel strictement positif.

Résultat : x : un réel tel que $|x - \alpha| \leq \text{eps}$.

```
1: Fonction  $x \leftarrow$  DICHOTOMIE4 (  $f, a, b, \text{eps}$  )
2:    $A, B \in \mathbb{R}$ 
3:    $A \leftarrow a, B \leftarrow b, x \leftarrow (a + b)/2$ 
4:   Tantque  $|x - A| > \text{eps}$  faire
5:     Si  $f(x) == 0$  alors
6:        $A \leftarrow x, B \leftarrow x$ 
7:     Sinon Si  $f(B)f(x) < 0$  alors
8:        $A \leftarrow x$                                      ▷  $B$  inchangé
9:     Sinon
10:       $B \leftarrow x$                                      ▷  $A$  inchangé
11:    Fin Si
12:     $x \leftarrow (A + B)/2$ 
13:  Fin Tantque
14: Fin Fonction
```

Que pensez vous de cet algorithme?

Algorithm Méthode de dichotomie : version 5

Données : a, b : deux réels $a < b$,
 f : $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ et $f(a)f(b) < 0$.

Résultat : x : un réel tel que $f(x) = 0$.

```
1: Fonction  $x \leftarrow \text{DICHOTOMIE5} ( f, a, b )$ 
2:    $A, B \in \mathbb{R}$ 
3:    $A \leftarrow a, B \leftarrow b, x \leftarrow (a + b)/2, xp \leftarrow a$ 
4:   Tantque  $x \sim= xp$  faire
5:     Si  $f(B)f(x) < 0$  alors
6:        $A \leftarrow x$                                 ▷  $B$  inchangé
7:     Sinon
8:        $B \leftarrow x$                                 ▷  $A$  inchangé
9:     Fin Si
10:     $xp \leftarrow x$ 
11:     $x \leftarrow (A + B)/2$ 
12:  Fin Tantque
13: Fin Fonction
```

1 Recherche des zéros d'une fonction

- Méthode de dichotomie ou de bisection
- **Points fixes d'une fonction (dimension 1)**
- Points fixes attractifs et répulsifs
- Algorithme générique du point fixe
- Points fixes pour la recherche de racines

- Méthode de la corde
- La méthode de Newton
- Méthode de la sécante

2 Résolution de systèmes non linéaires

- Point fixe
- Méthode de Newton
- Exemples

Soit $\Phi : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée. Rechercher un **point fixe** de Φ revient à

Trouver $\alpha \in [a, b]$ tel que

$$\alpha = \Phi(\alpha).$$

L'algorithme de la **méthode du point fixe** consiste en la construction, si elle existe, de la suite

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (1)$$

avec $x^{(0)} \in [a, b]$ donné.

♥ Definition 1.2

Soient (E, d) un **espace métrique** et $(\mathbf{u}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers $\alpha \in E$.
On dit que cette suite **converge vers α avec un ordre $p \geq 1$ au moins** si

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}, \exists C > 0 \text{ tels que } d(\mathbf{u}^{[k+1]}, \alpha) \leq C d(\mathbf{u}^{[k]}, \alpha)^p, \forall k \geq k_0. \quad (2)$$

où $C < 1$ si $p = 1$.

Exemples de distances:

- $d(x, y) = |x - y|$ dans \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{Z} ou \mathbb{Q}
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ dans \mathbb{R}^n , où $\|\cdot\|$ est l'une quelconque des normes habituelles.



Théorème 2: Théorème du point fixe dans \mathbb{R}



Soient $[a, b]$ un intervalle non vide de \mathbb{R} et Φ une application continue de $[a, b]$ dans lui-même. Alors, il existe **au moins** un point $\alpha \in [a, b]$ vérifiant $\Phi(\alpha) = \alpha$. Le point α est appelé **point fixe de la fonction Φ** .

De plus, si Φ est contractante (lipschitzienne de rapport $L \in [0, 1[$), c'est à dire

$$\exists L < 1 \text{ t.q. } |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x - y| \quad \forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad (3)$$

alors Φ admet un **unique** point fixe $\alpha \in [a, b]$.

Pour tout $x_0 \in [a, b]$, la suite

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (4)$$

est bien définie et elle converge vers α avec un ordre 1 au moins.

On a les deux estimations suivantes :

$$|x_k - \alpha| \leq L^k |x_0 - \alpha|, \quad \forall k \geq 0, \quad (5)$$

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{L}{1-L} |x_k - x_{k-1}|, \quad \forall k \geq 0, \quad (6)$$



Théorème 3: Convergence globale, méthode du point fixe



Soit $\Phi \in \mathcal{C}^1([a, b])$ vérifiant $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$ et

$$\exists L < 1 \text{ tel que } \forall x \in [a, b], |\Phi'(x)| \leq L, \quad (7)$$

Soit $x_0 \in [a, b]$ et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. On a alors

- 1 la fonction Φ admet un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$,
- 2 $\forall k \in \mathbb{N}, x_k \in [a, b]$,
- 3 la suite (x_k) converge vers α avec un ordre 1 au moins.
- 4 Si $x_0 \neq \alpha$, alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha). \quad (8)$$



Théorème 4: Convergence locale du point fixe



Soit α un point fixe d'une fonction Φ de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de α .

Si $|\Phi'(\alpha)| < 1$, alors il existe $\delta > 0$ pour lequel x_k converge vers α pour tout x_0 tel que $|x_0 - \alpha| \leq \delta$.

De plus, si $x_0 \neq \alpha$, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha). \quad (9)$$



Exercice 2:



Soit α un point fixe d'une fonction Φ de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de α et vérifiant $\Phi'(\alpha) = 0$.

Q.1 Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x_0 \in]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$ la suite définie par $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ converge vers α .

On suppose de plus que Φ' est dérivable sur $]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$ et qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta], |\Phi''(x)| \leq M$$

Q.2

a Montrer que

$$\forall x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta], |x_k - \alpha| \leq \frac{2}{M} \left(\frac{1}{2} M |x_0 - \alpha| \right)^{2^k}$$

b Quel est l'ordre de convergence dans ce cas.

Q.3 A quelle condition a-t'on

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{2}{M} 10^{-2^k}.$$



Proposition 4.1:



Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $\Phi \in \mathcal{C}^{p+1}(\mathcal{V})$ pour un certain voisinage \mathcal{V} de α point fixe de Φ . Si $\Phi^{(i)}(\alpha) = 0$, pour $1 \leq i \leq p$ et si $\Phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$, alors la méthode de point fixe associée à la fonction Φ est d'ordre $p + 1$ et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\Phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}. \quad (10)$$

1 Recherche des zéros d'une fonction

- Méthode de dichotomie ou de bisection
- Points fixes d'une fonction (dimension 1)
- **Points fixes attractifs et répulsifs**
- Algorithme générique du point fixe
- Points fixes pour la recherche de racines

- Méthode de la corde
- La méthode de Newton
- Méthode de la sécante

2 Résolution de systèmes non linéaires

- Point fixe
- Méthode de Newton
- Exemples

Soit $\Phi : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une application de classe \mathcal{C}^1 admettant un point fixe $\alpha \in [a, b]$.

- Si $|\Phi'(\alpha)| < 1$ alors α est un point fixe attractif,
- Si $|\Phi'(\alpha)| > 1$ alors α est un point fixe répulsif.

On s'intéresse ici au point fixe $\alpha = 1$ de la fonction $\Phi : x \mapsto x^2$.

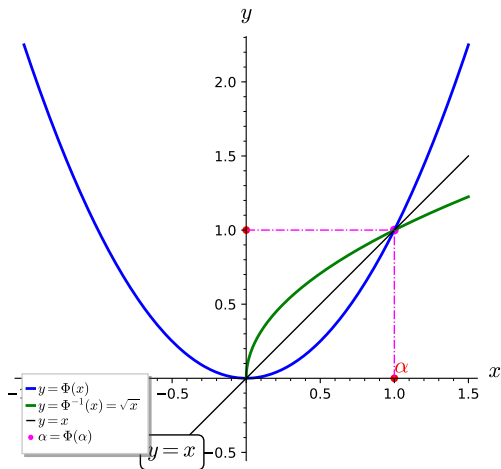
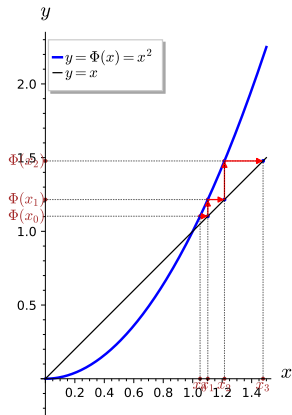
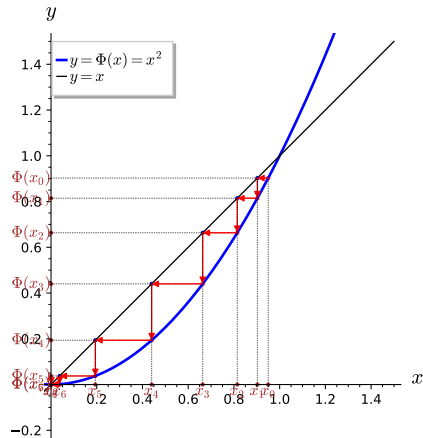


Figure: fonction x^2 et sa fonction réciproque \sqrt{x} sur $[0, +\infty[$

$\Phi'(\alpha) = 2$: **point fixe répulsif**



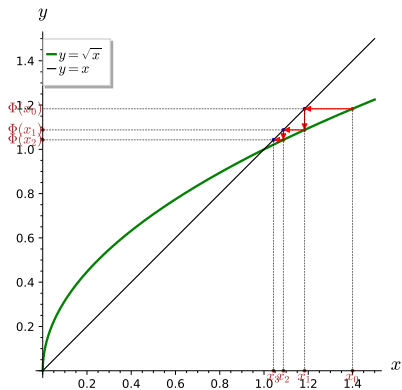
(a) $x_0 = 1.05$



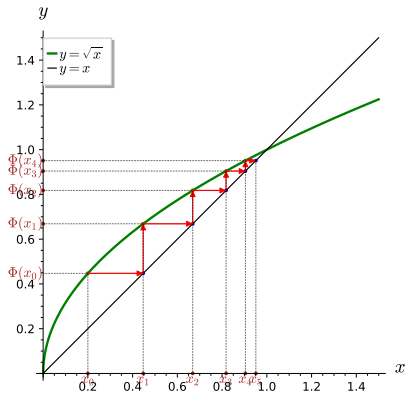
(b) $x_0 = 0.950$

Figure: $\alpha = 1$, point fixe répulsif de $x \mapsto x^2$

$(\Phi^{-1})'(1) = 1/2 < 1$, : **point fixe attractif**



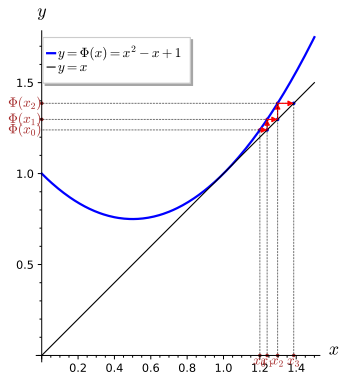
(a) $x_0 = 1.40$



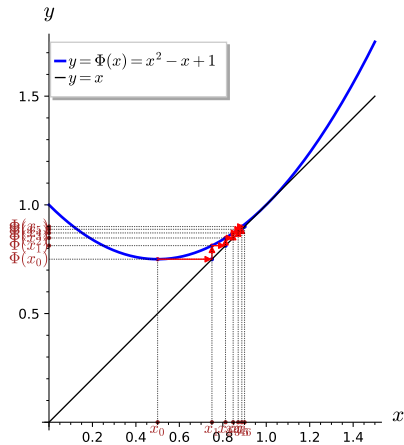
(b) $x_0 = 0.200$

Figure: $\alpha = 1$, point fixe attractif de $\Phi^{-1} : x \mapsto \sqrt{x}$

fonction $\Phi : x \mapsto x^2 - x + 1$: **point fixe $\alpha = 1$, $\Phi'(\alpha) = 1$.**

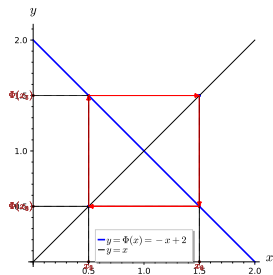


(a) $x_0 = 1.2$, α point répulsif

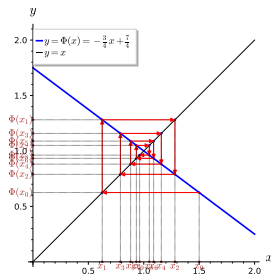


(b) $x_0 = 0.50$, α point attractif

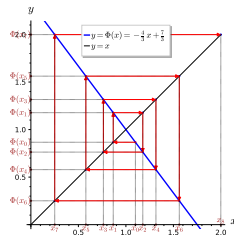
Figure: $\alpha = 1$, point fixe attractif ou répulsif de $x \mapsto x^2 - x + 1$



(a) $x_0 = 1.50$



(b) $x_0 = 1.50$



(c) $x_0 = 1.10$

Figure: $\alpha = 1$, point fixe de fonctions affines particulières

- 1 Recherche des zéros d'une fonction
 - Méthode de dichotomie ou de bisection
 - Points fixes d'une fonction (dimension 1)
 - Points fixes attractifs et répulsifs
 - **Algorithme générique du point fixe**
 - Points fixes pour la recherche de racines
- 2 Résolution de systèmes non linéaires
 - Méthode de la corde
 - La méthode de Newton
 - Méthode de la sécante

Algorithme générique du point fixe

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \text{ avec } x^{(0)} \in [a, b] \text{ donné.}$$

Algorithm Méthode de point fixe : version **Tantque** formel

- 1: $k \leftarrow 0$
 - 2: **Tantque** non convergence **faire**
 - 3: $x_{k+1} \leftarrow \Phi(x_k)$
 - 4: $k \leftarrow k + 1$
 - 5: **Fin Tantque**
 - 6: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x_k$ ▷ le dernier calculé.
-

Algorithm Méthode de point fixe : version **Répéter** formel

- 1: $k \leftarrow 0$
 - 2: **Répéter**
 - 3: $k \leftarrow k + 1$
 - 4: $x_k \leftarrow \Phi(x_{k-1})$
 - 5: **jusqu'à** convergence
 - 6: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x_k$ ▷ le dernier calculé.
-

Critères d'arrêt?

- On n'est pas sûr de converger \implies kmax: nb maximum d'itérations,
- Si on converge, on s'arrête dès que $|\Phi(x_k) - x_k| = |x_{k+1} - x_k| \leq \text{tol}$.

Algorithme générique du point fixe

Algorithm Méthode de point fixe : version **Tantque** *formel*
avec critères d'arrêt

```
1:  $k \leftarrow 0$ 
2:  $\text{err} \leftarrow |\Phi(x_0) - x_0|$  ▷ ou  $\frac{|\Phi(x_0) - x_0|}{|x_0| + 1}$ 
3: Tantque  $\text{err} > \epsilon$  et  $k \leq k_{\max}$  faire
4:    $k \leftarrow k + 1$ 
5:    $x_k \leftarrow \Phi(x_{k-1})$ 
6:    $\text{err} \leftarrow |\Phi(x_k) - x_k|$  ▷ ou  $\frac{|\Phi(x_k) - x_k|}{|x_k| + 1}$ 
7: Fin Tantque
8: Si  $\text{err} \leq \text{tol}$  alors ▷ Convergence
9:    $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x_k$  ▷  $|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}| \leq \text{tol}$ 
10: Fin Si
```

Algorithm Méthode de point fixe : version **Répéter** *formel*
avec critères d'arrêt

```
1:  $k \leftarrow 0$ 
2: Répéter
3:    $\text{err} \leftarrow |\Phi(x_k) - x_k|$  ▷ ou  $\frac{|\Phi(x_k) - x_k|}{|x_k| + 1}$ 
4:    $x_{k+1} \leftarrow \Phi(x_k)$ 
5:    $k \leftarrow k + 1$ 
6: jusqu'à  $\text{err} \leq \text{tol}$  ou  $k > k_{\max}$ 
7: Si  $\text{err} \leq \text{tol}$  alors ▷ Convergence
8:    $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x_k$  ▷  $|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}| \leq \text{tol}$ 
9: Fin Si
```

Algorithme générique du point fixe

Algorithm Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}| \leq \text{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}|}{|\alpha_{\text{tol}}| + 1} \leq \text{tol}$)

- 1: **Fonction** $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PTFIXE}(\Phi, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$
- 2: $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$
- 3: $x \leftarrow x_0, \text{fx} \leftarrow \Phi(x_0)$,
- 4: $\text{err} \leftarrow |\text{fx} - x|$ \triangleright ou $\frac{|\text{fx} - x|}{|x| + 1}$
- 5: **Tantque** $\text{err} > \text{tol}$ et $k \leq \text{kmax}$ **faire**
- 6: $k \leftarrow k + 1$
- 7: $x \leftarrow \text{fx}$
- 8: $\text{fx} \leftarrow \Phi(x)$
- 9: $\text{err} \leftarrow |\text{fx} - x|$ \triangleright ou $\frac{|\text{fx} - x|}{|x| + 1}$
- 10: **Fin Tantque**
- 11: **Si** $\text{err} \leq \text{tol}$ **alors** \triangleright Convergence
- 12: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x$
- 13: **Fin Si**
- 14: **Fin Fonction**

Algorithm Méthode de point fixe : version **Répéter** avec critères d'arrêt

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}| \leq \text{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}|}{|\alpha_{\text{tol}}| + 1} \leq \text{tol}$)

- 1: **Fonction** $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PTFIXE}(\Phi, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$
- 2: $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$
- 3: $x \leftarrow x_0$
- 4: **Répéter**
- 5: $x_p \leftarrow x$
- 6: $x \leftarrow \Phi(x_p)$
- 7: $\text{err} \leftarrow |x - x_p|$ \triangleright ou $\frac{|x - x_p|}{|x_p| + 1}$
- 8: $k \leftarrow k + 1$
- 9: **jusqu'à** $\text{err} \leq \text{tol}$ ou $k > \text{kmax}$
- 10: **Si** $\text{err} \leq \text{tol}$ **alors** \triangleright Convergence
- 11: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x$
- 12: **Fin Si**
- 13: **Fin Fonction**

1 Recherche des zéros d'une fonction

- Méthode de dichotomie ou de bisection
- Points fixes d'une fonction (dimension 1)
- Points fixes attractifs et répulsifs
- Algorithme générique du point fixe
- Points fixes pour la recherche de racines

- Méthode de la corde
- La méthode de Newton
- Méthode de la sécante

2 Résolution de systèmes non linéaires

- Point fixe
- Méthode de Newton
- Exemples

Applications à la recherche de racines

$$f(x) = 0 \iff \Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} x + f(x) = x.$$

si $\mathcal{F} \in \mathcal{C}^0$ tel que $\mathcal{F}(0) = 0$ alors

$$f(x) = 0 \iff \Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} x + \mathcal{F}(f(x)) = x.$$

Objectif : Construire une suite x_{k+1} tel que $|x_{k+1} - \alpha| \leq |x_k - \alpha|$.

formule de Taylor :

$$f(\alpha) = 0 = f(x_k) + hf'(\xi) \text{ avec } h = \alpha - x_k.$$

Soit $q_k \approx f'(\xi)$ et \tilde{h} solution de

$$f(x_k) + \tilde{h}q_k = 0$$

Si $q_k \neq 0$, on obtient la suite itérative $x_{k+1} = x_k + \tilde{h}$ i.e.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{q_k}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{11}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{q_k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

x_{k+1} : intersection droite de pente q_k passant par $((x_k), f(x_k))$ avec (Ox)

- **Méthode de la corde** :

$$q_k = q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- **Méthode de la sécante** :

$$q_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

où x_{-1} et x_0 sont données,

- **Méthode de Newton** : en supposant f' connu, on prend

$$q_k = f'(x_k).$$

- 1 Recherche des zéros d'une fonction
 - Méthode de dichotomie ou de bisection
 - Points fixes d'une fonction (dimension 1)
 - Points fixes attractifs et répulsifs
 - Algorithme générique du point fixe
 - Points fixes pour la recherche de racines
- 2 Méthode de la corde
 - La méthode de Newton
 - Méthode de la sécante
- 2 Résolution de systèmes non linéaires
 - Point fixe
 - Méthode de Newton
 - Exemples



Exercice 3:



Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$ vérifiant $f(a)f(b) < 0$. et $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On note $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{\lambda}$.

Q.1 Montrer que si pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leq f(x) \leq \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \quad (12)$$

alors $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$.

Q.2 Montrer que si pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \quad (13)$$

alors $|\Phi'(x)| < 1$.

On se place sous les conditions (12) et (13).

Soit $x_0 \in [a, b]$ donné et on note

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Q.3 Montrer que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle converge vers l'unique solution $\alpha \in [a, b]$ de $f(x) = 0$.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On pose $\Phi(x) = x - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x)$, alors $x_{k+1} = \Phi(x_k)$.



Proposition 4.2: convergence, méthode de la corde

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ tel que $f(b) \neq f(a)$ et $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On suppose de plus que $\forall x \in [a, b]$

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leq f(x) \leq \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \quad (14)$$

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \quad (15)$$

On note $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite donnée par $x_0 \in [a, b]$ et pour tout $k \geq 0$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda}. \quad (16)$$

alors la suite (x_k) est bien définie et converge vers l'unique racine $\alpha \in [a, b]$ de f .

Proposition 4.3: ordre de convergence de la méthode de la corde

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ tel que $f(b) \neq f(a)$. Si la suite (x_k) définie par la méthode de la corde en (16) converge vers $\alpha \in]a, b[$ alors la convergence est au moins d'ordre 1.

De plus, si f est de classe \mathcal{C}^2 sur un certain voisinage \mathcal{V} de α et si $f'(\alpha) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ alors la convergence est au moins d'ordre 2.

Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}| \leq \text{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}|}{|\alpha_{\text{tol}}| + 1} \leq \text{tol}$)

- 1: **Fonction** $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PTFIXE}(\Phi, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$
- 2: $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$
- 3: $x \leftarrow x_0$,
- 4: $\text{err} \leftarrow \text{tol} + 1$
- 5: **Tantque** $\text{err} > \text{tol}$ et $k \leq \text{kmax}$ **faire**
- 6: $k \leftarrow k + 1$
- 7: $x_p \leftarrow x$
- 8: $x \leftarrow \Phi(x_p)$
- 9: $\text{err} \leftarrow |x - x_p|$
- 10: **Fin Tantque**
- 11: **Si** $\text{err} \leq \text{tol}$ **alors**
- 12: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x$
- 13: **Fin Si**
- 14: **Fin Fonction**

Méthode de la corde :

$$\Phi(x) = x - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(x)$$

$$\triangleright \text{ou } \frac{|x_p - x|}{|x| + 1}$$

\triangleright Convergence

Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}| \leq \text{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}|}{|\alpha_{\text{tol}}| + 1} \leq \text{tol}$)

1: **Fonction** $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PTFIXE}(\Phi, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$

2: $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$

3: $x \leftarrow x_0$,

4: $\text{err} \leftarrow \text{tol} + 1$

5: **Tantque** $\text{err} > \text{tol}$ et $k \leq \text{kmax}$ **faire**

6: $k \leftarrow k + 1$

7: $x_p \leftarrow x$

8: $x \leftarrow \Phi(x_p)$

9: $\text{err} \leftarrow |x - x_p|$

$$\triangleright \text{ou } \frac{|x_p - x|}{|x| + 1}$$

10: **Fin Tantque**

11: **Si** $\text{err} \leq \text{tol}$ **alors**

\triangleright Convergence

12: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x$

13: **Fin Si**

14: **Fin Fonction**

Algorithm Méthode de la corde

Données :

- f : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- a, b : deux réels tels que $f(a) \neq f(b)$,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|f(\alpha_{\text{tol}})| \leq \text{tol}$

1: **Fonction** $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{CORDE}(f, a, b, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$

2: $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$

3: $q \leftarrow \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$

4: $x \leftarrow x_0$,

5: $\text{err} \leftarrow \text{tol} + 1$

6: **Tantque** $\text{err} > \text{tol}$ et $k \leq \text{kmax}$ **faire**

7: $k \leftarrow k + 1$

8: $x_p \leftarrow x$

9: $x \leftarrow x_p - q * f(x_p)$

10: $\text{err} \leftarrow |x - x_p|$

11: **Fin Tantque**

12: **Si** $\text{err} \leq \text{tol}$ **alors**

\triangleright Convergence

13: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x$

14: **Fin Si**

15: **Fin Fonction**

Plus simple, plus court ... ???

Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}| \leq \text{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}|}{|\alpha_{\text{tol}}| + 1} \leq \text{tol}$)

1: **Fonction** $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PTFIXE}(\Phi, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$

2: $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$

3: $x \leftarrow x_0$,

4: $\text{err} \leftarrow \text{tol} + 1$

5: **Tantque** $\text{err} > \text{tol}$ et $k \leq \text{kmax}$ **faire**

6: $k \leftarrow k + 1$

7: $x_p \leftarrow x$

8: $x \leftarrow \Phi(x_p)$

9: $\text{err} \leftarrow |x - x_p|$

\triangleright ou $\frac{|x_p - x|}{|x| + 1}$

10: **Fin Tantque**

11: **Si** $\text{err} \leq \text{tol}$ **alors**

\triangleright Convergence

12: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x$

13: **Fin Si**

14: **Fin Fonction**

Algorithm Méthode de la corde utilisant la fonction **PTFIXE**

Données :

- f : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- a, b : deux réels tels que $f(a) \neq f(b)$,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|f(\alpha_{\text{tol}})| \leq \text{tol}$

1: **Fonction** $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{CORDE}(f, a, b, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$

2: $q \leftarrow \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$

3: $\Phi \leftarrow (x \mapsto x - q * f(x))$

\triangleright définition de fonction

4: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PTFIXE}(\Phi, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$

5: **Fin Fonction**

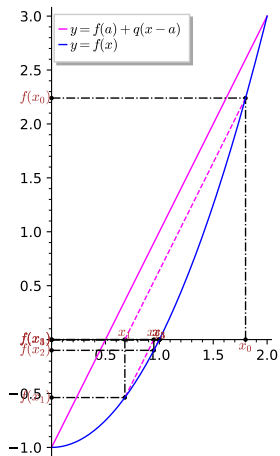
Plus simple, plus court ... ???

$\alpha = 1$, racine de $f : x \mapsto x^2 - 1$

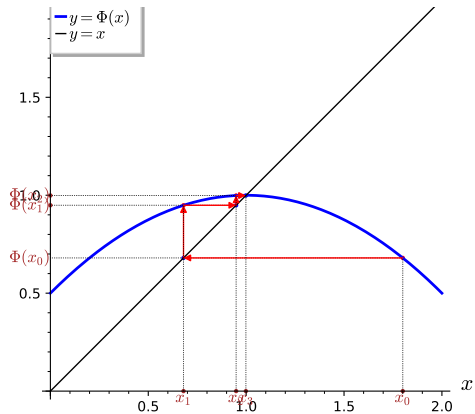
- exemple 1 : $a = 0.000$, $b = 2.000$, $x_0 = 1.800$,
- exemple 2 : $a = 0.5000$, $b = 1.900$, $x_0 = 1.800$.

	exemple 1	exemple 2
k	$ x_k - \alpha $	$ x_k - \alpha $
0	8.0000e-01	8.0000e-01
1	3.2000e-01	1.3333e-01
2	5.1200e-02	2.9630e-02
3	1.3107e-03	5.3041e-03
4	8.5899e-07	8.9573e-04
5	3.6893e-13	1.4962e-04
6	0.0000e+00	2.4947e-05
\vdots	\vdots	\vdots
15	0.0000e+00	2.4756e-12

L'exemple 1 converge beaucoup plus rapidement

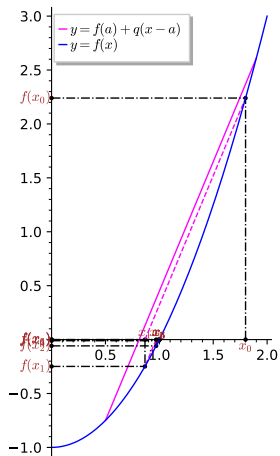


(a) représentation usuelle

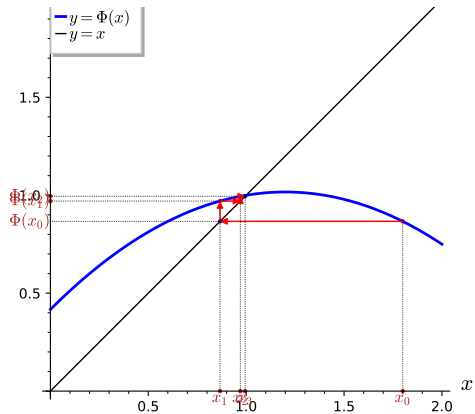


(b) Représentation point fixe

Figure: Exemple 1, méthode de la corde, $\alpha = 1$, racine de $f : x \mapsto x^2 - 1$ avec $a = 0.00$, $b = 2.00$, $x_0 = 1.80$,

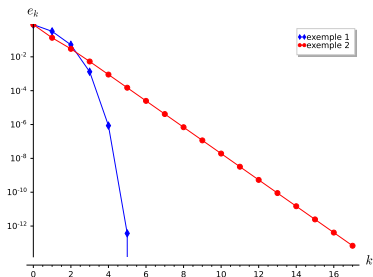


(a) représentation usuelle

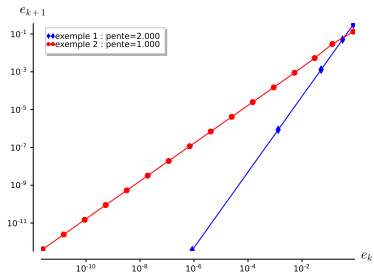


(b) Représentation point fixe

Figure: Exemple 2, méthode de la corde, $\alpha = 1$, racine de $f : x \mapsto x^2 - 1$ avec $a = 0.50$, $b = 1.90$, $x_0 = 1.80$,



(a) Erreurs en fonctions des itérations



(b) Représentation en échelle logarithmique de e_{k+1} en fonction de e_k . Les pentes sont calculées numériquement

Figure: Exemples 1 et 2, méthode de la corde, $\alpha = 1$, racine de $f : x \mapsto x^2 - 1$

Exemple 1 : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 2$ et $f'(\alpha) = 2 \Rightarrow$ convergence ordre 2.

Exemple 2 : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 2.400 \neq f'(\alpha) = 2 \Rightarrow$ convergence ordre 1.

- 1 Recherche des zéros d'une fonction
 - Méthode de dichotomie ou de bisection
 - Points fixes d'une fonction (dimension 1)
 - Points fixes attractifs et répulsifs
 - Algorithme générique du point fixe
 - Points fixes pour la recherche de racines
- 2 Résolution de systèmes non linéaires
 - Méthode de la corde
 - **La méthode de Newton**
 - Méthode de la sécante



Proposition 4.4: convergence de la méthode de Newton



Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un certain voisinage d'une racine simple α de f . Soit x_0 donné dans ce voisinage, la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par la méthode de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (17)$$

est localement convergente d'ordre 2.



Exercice 4:



En -1700 av. J.-C., les babyloniens ne connaissaient que les nombres rationnels (fractions) et ils utilisaient le système sexagésimal (base 60). Pour approcher la valeur $\sqrt{2}$, ils utilisaient comme approximation (voir tablette YBC 7289)

$$\alpha = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600}$$

L'erreur commise est $|\alpha - \sqrt{2}| \approx 5.994e - 7$.



Q.1 Comment feriez-vous pour trouver à la main une méthode permettant de trouver des nombres rationnels approchant $\sqrt{2}$.

Q.2 Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de \sqrt{a} où a est un réel positif.

Q.3 Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de $\sqrt[n]{a}$ où a est un réel positif et $n \in \mathbb{N}^*$.

Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}| \leq \text{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}|}{|\alpha_{\text{tol}}| + 1} \leq \text{tol}$)

- 1: **Fonction** $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PTFIXE}(\Phi, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$
- 2: $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$
- 3: $x \leftarrow x_0$,
- 4: $\text{err} \leftarrow \text{tol} + 1$
- 5: **Tantque** $\text{err} > \text{tol}$ et $k \leq \text{kmax}$ **faire**
- 6: $k \leftarrow k + 1$
- 7: $x_p \leftarrow x$
- 8: $x \leftarrow \Phi(x_p)$
- 9: $\text{err} \leftarrow |x - x_p|$ \triangleright ou $\frac{|x_p - x|}{|x| + 1}$
- 10: **Fin Tantque**
- 11: **Si** $\text{err} \leq \text{tol}$ **alors** \triangleright Convergence
- 12: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x$
- 13: **Fin Si**
- 14: **Fin Fonction**

Méthode de Newton :

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}| \leq \text{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}|}{|\alpha_{\text{tol}}| + 1} \leq \text{tol}$)

- 1: **Fonction** $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PTFIXE} (\Phi, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$
 - 2: $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$
 - 3: $x \leftarrow x_0$,
 - 4: $\text{err} \leftarrow \text{tol} + 1$
 - 5: **Tantque** $\text{err} > \text{tol}$ et $k \leq \text{kmax}$ **faire**
 - 6: $k \leftarrow k + 1$
 - 7: $x_p \leftarrow x$
 - 8: $x \leftarrow \Phi(x_p)$
 - 9: $\text{err} \leftarrow |x - x_p|$ \triangleright ou $\frac{|x_p - x|}{|x| + 1}$
 - 10: **Fin Tantque**
 - 11: **Si** $\text{err} \leq \text{tol}$ **alors** \triangleright Convergence
 - 12: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x$
 - 13: **Fin Si**
 - 14: **Fin Fonction**
-

Algorithm Méthode de Newton

Données :

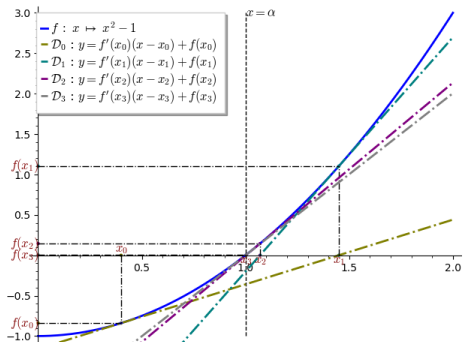
- f : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- df : la dérivée de f ,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

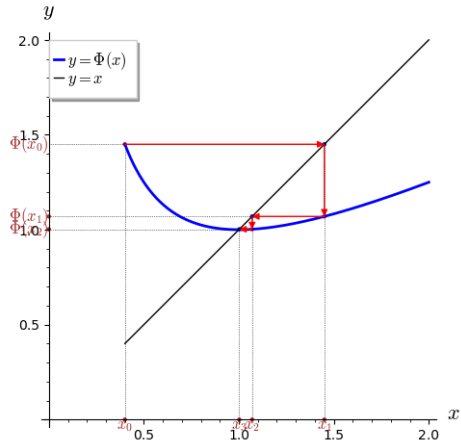
- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}| \leq \text{tol}$

- 1: **Fonction** $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{NEWTON} (f, \text{df}, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$
 - 2: $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$
 - 3: $x \leftarrow x_0$,
 - 4: $\text{err} \leftarrow \text{tol} + 1$
 - 5: **Tantque** $\text{err} > \text{tol}$ et $k \leq \text{kmax}$ **faire**
 - 6: $k \leftarrow k + 1$
 - 7: $x_p \leftarrow x$
 - 8: $x \leftarrow x_p - f(x_p)/\text{df}(x_p)$ $\triangleright \text{df}(x_p) \neq 0$
 - 9: $\text{err} \leftarrow |x - x_p|$
 - 10: **Fin Tantque**
 - 11: **Si** $\text{err} \leq \text{tol}$ **alors** \triangleright Convergence
 - 12: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x$
 - 13: **Fin Si**
 - 14: **Fin Fonction**
-

Plus simple, plus court ... ???



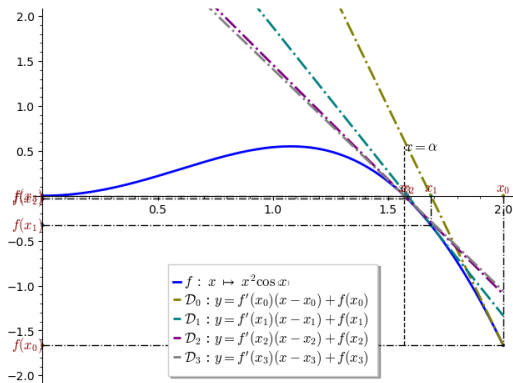
(a) représentation usuelle



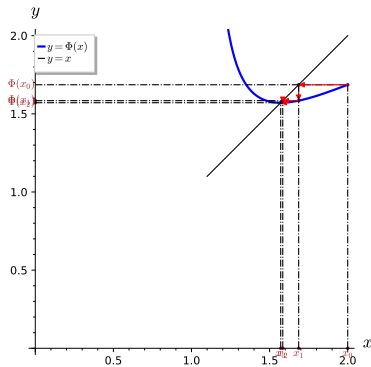
(b) Représentation point fixe avec

$$\Phi : x \mapsto x - \frac{x^2 - 1}{2x}$$

Figure: Exemple 1, méthode de Newton, $\alpha = 1$, racine de $f : x \mapsto x^2 - 1$ avec $x_0 = 0.40$,



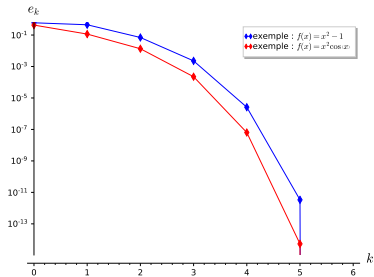
(a) représentation usuelle



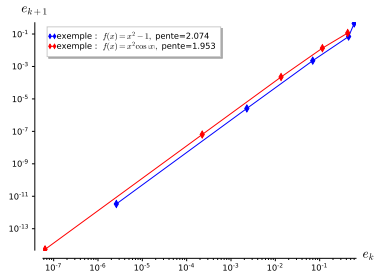
(b) Représentation point fixe avec

$$\Phi : x \mapsto \frac{x^2 \cos(x)}{x^2 \sin(x) - 2x \cos(x)} + x$$

Figure: Exemple 2, méthode de Newton, $\alpha = \frac{1}{2} \pi$, racine de $f : x \mapsto x^2 \cos(x)$ avec $x_0 = 2.00$,



(a) Représentation de la convergence, e_k en fonction de k




(b) Représentation de l'ordre de convergence en échelle logarithmique, e_{k+1} en fonction de e_k . Ordre théorique 2

Figure: Méthode de Newton, convergence et ordre

- 1 Recherche des zéros d'une fonction
 - Méthode de dichotomie ou de bisection
 - Points fixes d'une fonction (dimension 1)
 - Points fixes attractifs et répulsifs
 - Algorithme générique du point fixe
 - Points fixes pour la recherche de racines
- 2 Résolution de systèmes non linéaires
 - Méthode de la corde
 - La méthode de Newton
 - **Méthode de la sécante**

Alternative à la méthode de Newton lorsque l'on ne connaît pas la dérivée de la fonction f :

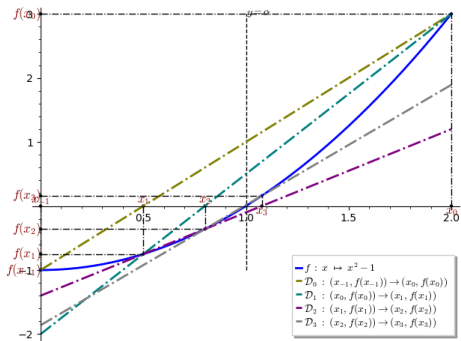
$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

 **Proposition 4.5: Convergence méthode de la sécante (Admis)**

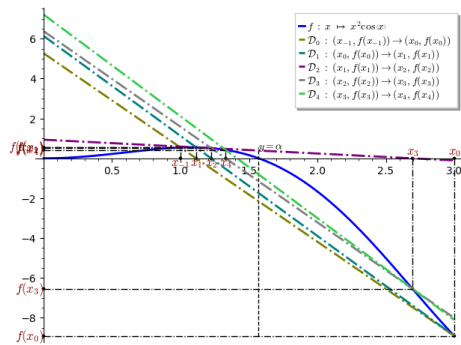
Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un certain voisinage d'une racine simple α de f . Soient x_{-1} et x_0 donnés dans ce voisinage tels que $f(x_{-1}) \neq f(x_0)$, la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par la méthode de la sécante

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (18)$$

est localement convergente d'ordre $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.

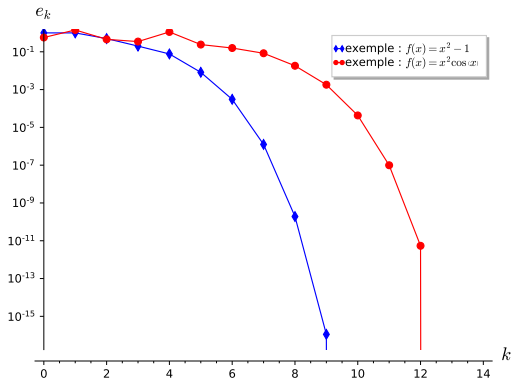


(a) $f(x) = x^2 - 1$, $x_{-1} = 0.000$ et $x_0 = 2.000$

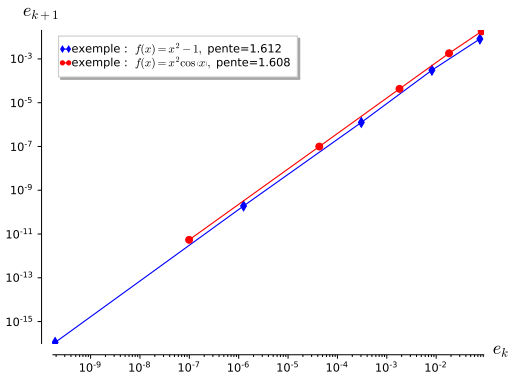


(b) $f(x) = x^2 \cos(x)$, $x_{-1} = 1.000$ et $x_0 = 3.000$

Figure: Méthode de la sécante



(a) Représentation de la convergence, e_k en fonction de k



(b) Représentation de l'ordre de convergence en échelle logarithmique, e_{k+1} en fonction de e_k . Ordre théorique $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

Figure: Méthode de la sécante, convergence et ordre

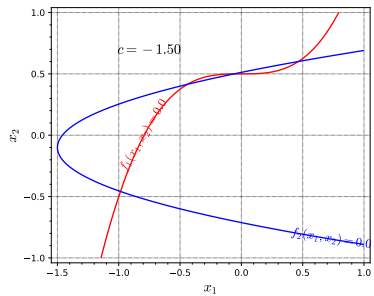
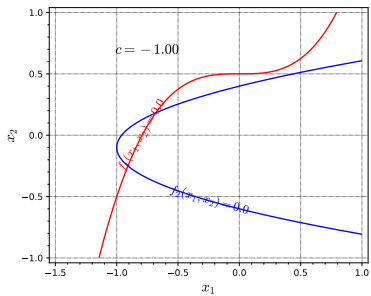
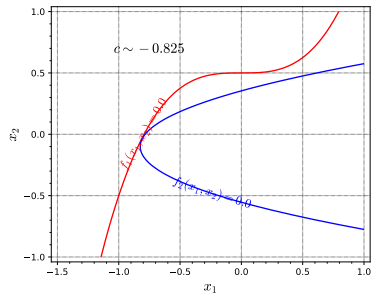
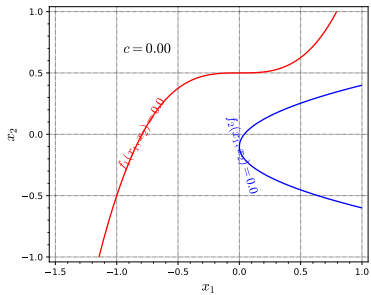
1 Recherche des zéros d'une fonction

2 Résolution de systèmes non linéaires

- Point fixe
- Méthode de Newton
- Exemples

Soit $c \in \mathbb{R}$ donné.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2 - \frac{1}{2} & = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{25} (10x_2 + 1)^2 + c - x_1 & = 0. \end{cases} \quad (19)$$



Soient $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $f \in \mathcal{C}^0(U; \mathbb{R}^N)$

Trouver $\alpha \in U \subset \mathbb{R}^N$ tel que

$$f(\alpha) = 0 \iff \begin{cases} f_1(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = 0 \\ f_2(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = 0 \\ \vdots \\ f_N(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = 0 \end{cases}$$

On pose, par ex., $\Phi(x) = x + f(x)$, : $f(x) = 0 \iff \Phi(x) = x$ Point fixe

Trouver $\alpha \in U \subset \mathbb{R}^N$ tel que

$$\Phi(\alpha) = \alpha \iff \begin{cases} \Phi_1(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \alpha_1 \\ \Phi_2(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \alpha_2 \\ \vdots \\ \Phi_N(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \alpha_N \end{cases}$$

- 1 Recherche des zéros d'une fonction
 - Méthode de dichotomie ou de bisection
 - Points fixes d'une fonction (dimension 1)
 - Points fixes attractifs et répulsifs
 - Algorithme générique du point fixe
 - Points fixes pour la recherche de racines
- 2 Résolution de systèmes non linéaires
 - Méthode de la corde
 - La méthode de Newton
 - Méthode de la sécante
 - Point fixe
 - Méthode de Newton
 - Exemples



Théorème 5.1: Point fixe de Banach



Soit \mathcal{B} un espace de Banach et $U \subset \mathcal{B}$ un sous-ensemble fermé. On suppose que $\Phi : U \rightarrow U$ est une application strictement contractante, i.e.

$$\exists L \in]0, 1[, \quad \|\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y})\| \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times U. \quad (20)$$

Alors

- 1 Φ admet un unique point fixe $\alpha \in U$ (i.e. unique solution de $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{x})$).
- 2 La suite des itérés $\mathbf{x}^{[k+1]} = \Phi(\mathbf{x}^{[k]})$ converge vers α pour toute valeur initiale $\mathbf{x}^{[0]} \in U$.
- 3 Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|\alpha - \mathbf{x}^{[k]}\| \leq \frac{L^{k-l}}{1-L} \|\mathbf{x}^{[l+1]} - \mathbf{x}^{[l]}\|, \quad 0 \leq l \leq k \quad (21)$$

- 1 Recherche des zéros d'une fonction
 - Méthode de dichotomie ou de bisection
 - Points fixes d'une fonction (dimension 1)
 - Points fixes attractifs et répulsifs
 - Algorithme générique du point fixe
 - Points fixes pour la recherche de racines
- 2 Résolution de systèmes non linéaires
 - Méthode de la corde
 - La méthode de Newton
 - Méthode de la sécante
 - Point fixe
 - Méthode de Newton
 - Exemples

$\mathbf{f} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction suffisamment régulière. On définit la **matrice Jacobienne de \mathbf{f}** , notée $\mathbb{J}_{\mathbf{f}}$, par

$$\mathbb{J}_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

On a alors $\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$ à l'ordre 1

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}. \quad (22)$$

On a $\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$ à l'ordre 1

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}).\mathbf{h}. \quad (23)$$

trouver $\boldsymbol{\alpha}$ tel que $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 0$.

Si $\mathbf{x}^{[k]}$ est proche de $\boldsymbol{\alpha}$, alors avec $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{[k]}$ et $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{x}^{[k]} + \mathbf{h}$

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]}) + \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{[k]}).\mathbf{h}$$

On résoud le système linéarisé

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]}) + \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{[k]}).\tilde{\mathbf{h}} = 0 \Leftrightarrow \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{[k]}).\tilde{\mathbf{h}} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]}).$$

On pose $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - ((\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}))^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}))$. la **méthode de Newton** s'écrit alors

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \Phi(\mathbf{x}^{[k]}) = \mathbf{x}^{[k]} - \left((\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{[k]}))^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]}) \right) \quad (24)$$



Théorème 5.2: (Admis)

Soit $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$. On suppose que la matrice Jacobienne appliquée en \mathbf{x} , $\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ est inversible dans un voisinage de $\boldsymbol{\alpha}$, avec $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 0$. Alors pour tout $\mathbf{x}^{[0]}$ suffisamment proche de $\boldsymbol{\alpha}$ la suite définie par

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbf{x}^{[k]} - \left((\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{[k]}))^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]}) \right)$$

converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ et la convergence est d'ordre 2.

Comment fait-on pour calculer $-\left((\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{[k]}))^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]}) \right)$?



Théorème 5.3: (Admis)

Soit $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$. On suppose que la matrice Jacobienne appliquée en \mathbf{x} , $\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ est inversible dans un voisinage de $\boldsymbol{\alpha}$, avec $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 0$. Alors pour tout $\mathbf{x}^{[0]}$ suffisamment proche de $\boldsymbol{\alpha}$ la suite définie par

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbf{x}^{[k]} - \left(\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{[k]}) \right)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]})$$

converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ et la convergence est d'ordre 2.

Comment fait-on pour calculer $-\left(\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{[k]}) \right)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]})$?

On résout le système linéaire

$$\left(\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{[k]}) \right) \mathbf{h} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]})$$

Remarque : Si l'on ne connaît pas explicitement la Jacobienne de f , il est possible de calculer une approximation de celle-ci en utilisant des formules de **dérivation numérique**.

Méthode de Newton scalaire

Données :

- f : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- df : la dérivée de f ,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérance, $tol \in \mathbb{R}^+$,
- k_{max} : nombre maximum d'itérations, $k_{max} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

α_{tol} : un réel tel que

- 1: **Fonction** $\alpha_{tol} \leftarrow \text{NEWTON} (f, df, x_0, tol, k_{max})$
- 2: $k \leftarrow 0, \alpha_{tol} \leftarrow \emptyset$
- 3: $x \leftarrow x_0,$
- 4: $err \leftarrow tol + 1$
- 5: **Tantque** $err > tol$ et $k \leq k_{max}$ **faire**
- 6: $k \leftarrow k + 1$
- 7: $x_p \leftarrow x$
- 8: $x \leftarrow x_p - f(x_p)/df(x_p)$ $\triangleright x \leftarrow \Phi(x_p)$
- 9: $err \leftarrow |x - x_p|$
- 10: **Fin Tantque**
- 11: **Si** $err \leq tol$ **alors**
- 12: $\alpha_{tol} \leftarrow x$
- 13: **Fin Si**
- 14: **Fin Fonction**

Méthode de Newton vectorielle :

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - ((J_f(\mathbf{x}))^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}))$$

Méthode de Newton scalaire

Données :

- f : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- df : la dérivée de f ,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérance, $tol \in \mathbb{R}^+$,
- $kmax$: nombre maximum d'itérations, $kmax \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

α_{tol} : un réel tel que

- 1: **Fonction** $\alpha_{tol} \leftarrow \text{NEWTON} (f, df, x_0, tol, kmax)$
 - 2: $k \leftarrow 0, \alpha_{tol} \leftarrow \emptyset$
 - 3: $x \leftarrow x_0,$
 - 4: $err \leftarrow tol + 1$
 - 5: **Tantque** $err > tol$ et $k \leq kmax$ **faire**
 - 6: $k \leftarrow k + 1$
 - 7: $xp \leftarrow x$
 - 8: $x \leftarrow xp - f(xp)/df(xp)$ $\triangleright x \leftarrow \Phi(xp)$
 - 9: $err \leftarrow |x - xp|$
 - 10: **Fin Tantque**
 - 11: **Si** $err \leq tol$ **alors**
 - 12: $\alpha_{tol} \leftarrow x$
 - 13: **Fin Si**
 - 14: **Fin Fonction**
-

Algorithm Méthode de Newton vectorielle

Données :

- f : $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$,
- Jf : la matrice Jacobienne de f ,
- $\mathbf{x0}$: donnée initiale, $\mathbf{x0} \in \mathbb{R}^N$,
- tol : la tolérance, $tol \in \mathbb{R}^+$,
- $kmax$: nombre maximum d'itérations, $kmax \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

α_{tol} : un élément de \mathbb{R}^N proche de α .

- 1: **Fonction** $\alpha_{tol} \leftarrow \text{NEWTON} (f, Jf, \mathbf{x0}, tol, kmax)$
 - 2: $k \leftarrow 0, \alpha_{tol} \leftarrow \emptyset$
 - 3: $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x0},$
 - 4: $err \leftarrow tol + 1$
 - 5: **Tantque** $err > tol$ et $k \leq kmax$ **faire**
 - 6: $k \leftarrow k + 1$
 - 7: $\mathbf{xp} \leftarrow \mathbf{x}$
 - 8: $\mathbf{h} \leftarrow \text{SOLVE}(Jf(\mathbf{xp}), -f(\mathbf{xp}))$
 - 9: $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{xp} + \mathbf{h}$
 - 10: $err \leftarrow \text{NORM}(\mathbf{x} - \mathbf{xp})$
 - 11: **Fin Tantque**
 - 12: **Si** $err \leq tol$ **alors** \triangleright Convergence
 - 13: $\alpha_{tol} \leftarrow \mathbf{x}$
 - 14: **Fin Si**
 - 15: **Fin Fonction**
-

Rappel : Point fixe scalaire. Et le cas vectoriel ... ???

Méthode de point fixe scalaire

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}| \leq \text{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}|}{|\alpha_{\text{tol}}| + 1} \leq \text{tol}$)

- 1: **Fonction** $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PTFIXE}(\Phi, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$
 - 2: $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$
 - 3: $x \leftarrow x_0, \text{fx} \leftarrow \Phi(x_0)$,
 - 4: $\text{err} \leftarrow |\text{fx} - x|$ ▷ ou $\frac{|\text{fx} - x|}{|x| + 1}$
 - 5: **Tantque** $\text{err} > \text{tol}$ et $k \leq \text{kmax}$ **faire**
 - 6: $k \leftarrow k + 1$
 - 7: $x \leftarrow \text{fx}$
 - 8: $\text{fx} \leftarrow \Phi(x)$
 - 9: $\text{err} \leftarrow |\text{fx} - x|$ ▷ ou $\frac{|\text{fx} - x|}{|x| + 1}$
 - 10: **Fin Tantque**
 - 11: **Si** $\text{err} \leq \text{tol}$ **alors** ▷ Convergence
 - 12: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x$
 - 13: **Fin Si**
 - 14: **Fin Fonction**
-

Algorithm Méthode de Newton scalaire

Données :

- f : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
df : la dérivée de f ,
 x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que
- 1: **Fonction** $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{NEWTON}(f, \text{df}, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$
 - 2: $\Phi \leftarrow (x \mapsto x - f(x)/\text{df}(x))$
 - 3: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PTFIXE}(\Phi, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$
 - 4: **Fin Fonction**
-

Rappel : Point fixe scalaire. Et le cas vectoriel ... ???

Méthode de point fixe scalaire

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}| \leq \text{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}|}{|\alpha_{\text{tol}}| + 1} \leq \text{tol}$)

- 1: **Fonction** $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PTFIXE}(\Phi, x_0, \text{tol}, \text{kmax})$
- 2: $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$
- 3: $x \leftarrow x_0, \text{fx} \leftarrow \Phi(x_0)$,
- 4: $\text{err} \leftarrow |\text{fx} - x|$ \triangleright ou $\frac{|\text{fx} - x|}{|x| + 1}$
- 5: **Tantque** $\text{err} > \text{tol}$ et $k \leq \text{kmax}$ **faire**
- 6: $k \leftarrow k + 1$
- 7: $x \leftarrow \text{fx}$
- 8: $\text{fx} \leftarrow \Phi(x)$
- 9: $\text{err} \leftarrow |\text{fx} - x|$ \triangleright ou $\frac{|\text{fx} - x|}{|x| + 1}$
- 10: **Fin Tantque**
- 11: **Si** $\text{err} \leq \text{tol}$ **alors** \triangleright Convergence
- 12: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x$
- 13: **Fin Si**
- 14: **Fin Fonction**

Méthode de point fixe vectorielle

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^N$,
- $\mathbf{x0}$: donnée initiale, $\mathbf{x0} \in \mathbb{K}^N$,
- tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $\|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}\| \leq \text{tol}$

- 1: **Fonction** $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PTFIXEVEC}(\Phi, \mathbf{x0}, \text{tol}, \text{kmax})$
- 2: $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$
- 3: $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x0}, \mathbf{fx} \leftarrow \Phi(\mathbf{x0})$,
- 4: $\text{err} \leftarrow \|\mathbf{fx} - \mathbf{x}\|$
- 5: **Tantque** $\text{err} > \text{tol}$ et $k \leq \text{kmax}$ **faire**
- 6: $k \leftarrow k + 1$
- 7: $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{fx}$
- 8: $\mathbf{fx} \leftarrow \Phi(\mathbf{x})$
- 9: $\text{err} \leftarrow \|\mathbf{fx} - \mathbf{x}\|$
- 10: **Fin Tantque**
- 11: **Si** $\text{err} \leq \text{tol}$ **alors**
- 12: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \mathbf{x}$
- 13: **Fin Si**
- 14: **Fin Fonction**

Rappel : Point fixe scalaire. Et le cas vectoriel ... ???

Méthode de Newton vectorielle

Données :

- f : $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$,
- Jf : la matrice Jacobienne de f ,
- $\mathbf{x0}$: donnée initiale, $\mathbf{x0} \in \mathbb{R}^N$,
- tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

α_{tol} : un élément de \mathbb{R}^N proche de α .

- 1: **Fonction** $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{NEWTONVEC} (f, \text{Jf}, \mathbf{x0}, \text{tol}, \text{kmax})$
 - 2: $\Phi \leftarrow (x \mapsto x - \text{SOLVE}(\text{Jf}(x), f(x)))$
 - 3: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PTFIXEVEC}(\Phi, \mathbf{x0}, \text{tol}, \text{kmax})$
 - 4: **Fin Fonction**
-

Méthode de point fixe vectorielle

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^N$,
- $\mathbf{x0}$: donnée initiale, $\mathbf{x0} \in \mathbb{K}^N$,
- tol : la tolérance, $\text{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\text{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

α_{tol} : un réel tel que $\|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}\| \leq \text{tol}$

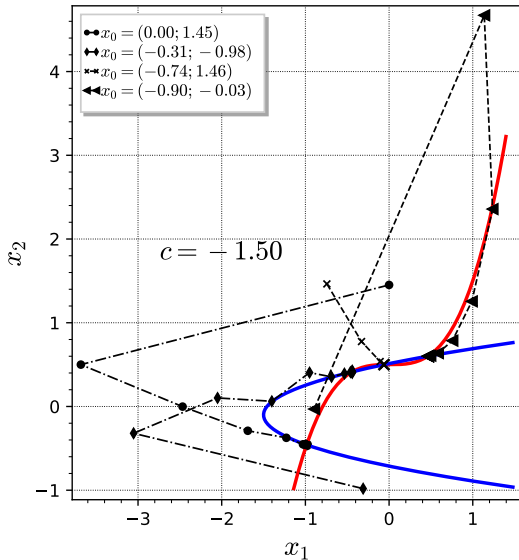
- 1: **Fonction** $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \text{PTFIXEVEC} (\Phi, \mathbf{x0}, \text{tol}, \text{kmax})$
 - 2: $k \leftarrow 0, \alpha_{\text{tol}} \leftarrow \emptyset$
 - 3: $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x0}, \mathbf{fx} \leftarrow \Phi(\mathbf{x0}),$
 - 4: $\text{err} \leftarrow \|\mathbf{fx} - \mathbf{x}\|$
 - 5: **Tantque** $\text{err} > \text{tol}$ et $k \leq \text{kmax}$ **faire**
 - 6: $k \leftarrow k + 1$
 - 7: $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{fx}$
 - 8: $\mathbf{fx} \leftarrow \Phi(\mathbf{x})$
 - 9: $\text{err} \leftarrow \|\mathbf{fx} - \mathbf{x}\|$
 - 10: **Fin Tantque**
 - 11: **Si** $\text{err} \leq \text{tol}$ **alors**
 - 12: $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow \mathbf{x}$
 - 13: **Fin Si**
 - 14: **Fin Fonction**
-

- 1 Recherche des zéros d'une fonction
 - Méthode de dichotomie ou de bisection
 - Points fixes d'une fonction (dimension 1)
 - Points fixes attractifs et répulsifs
 - Algorithme générique du point fixe
 - Points fixes pour la recherche de racines
- 2 Résolution de systèmes non linéaires
 - Méthode de la corde
 - La méthode de Newton
 - Méthode de la sécante
 - Point fixe
 - Méthode de Newton
 - Exemples

Représentation de 4 suites de Newton avec
 $c = -3/2$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2 - \frac{1}{2} & = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{25} (10x_2 + 1)^2 + c - x_1 & = 0. \end{cases}$$

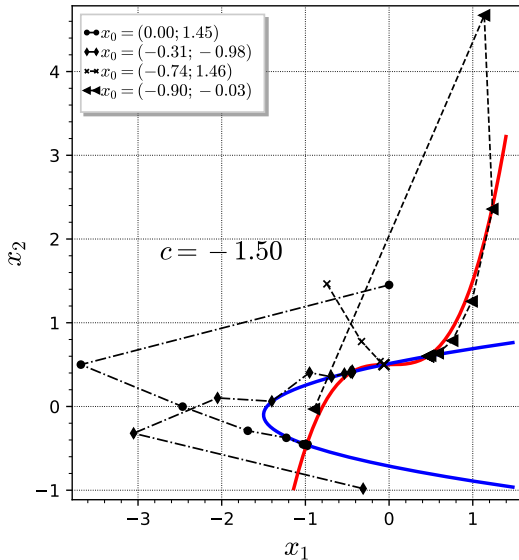
Conclusion?



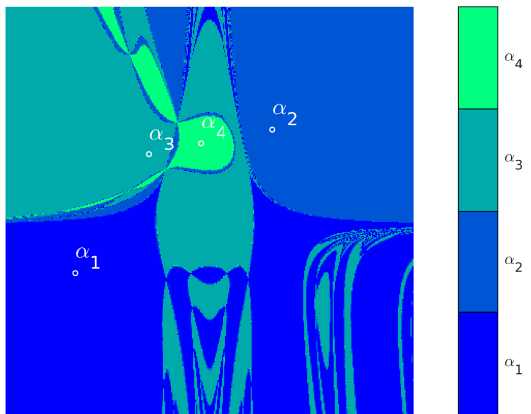
Représentation de 4 suites de Newton avec
 $c = -3/2$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2 - \frac{1}{2} & = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{25} (10x_2 + 1)^2 + c - x_1 & = 0. \end{cases}$$

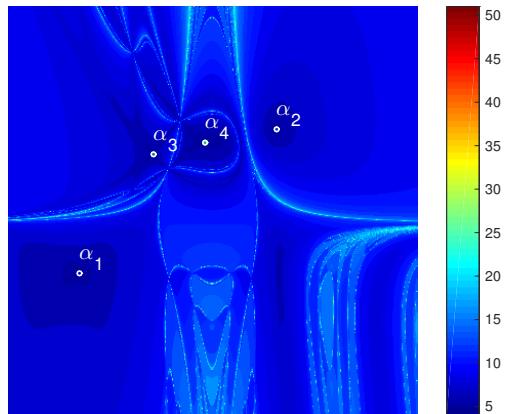
Conclusion?



Très difficile, si l'on n'est pas suffisamment proche d'un point fixe, de prédire vers lequel on converge.



(a) Bassin d'attraction des racines



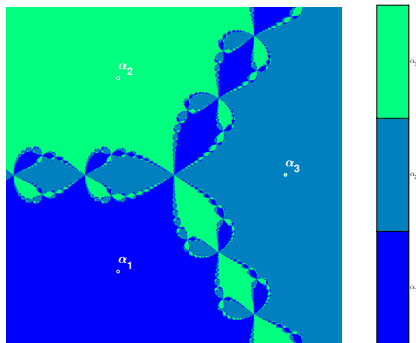
(b) Nombre d'itérations de convergence

Figure: Méthode de Newton

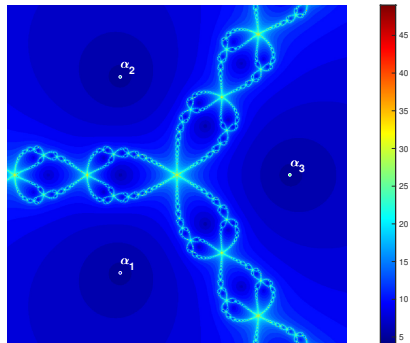
Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton

on peut poser $z = x + iy$, et le système équivalent devient

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 1 = 0 \\ f_2(x, y) = 3x^2y - x^3 = 0. \end{cases}$$

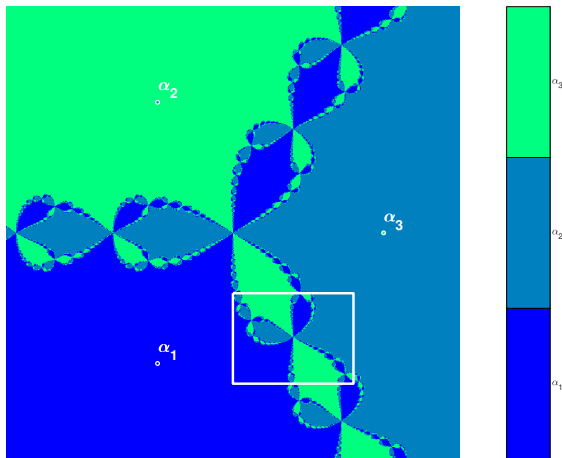


(a) Bassin d'attraction des racines



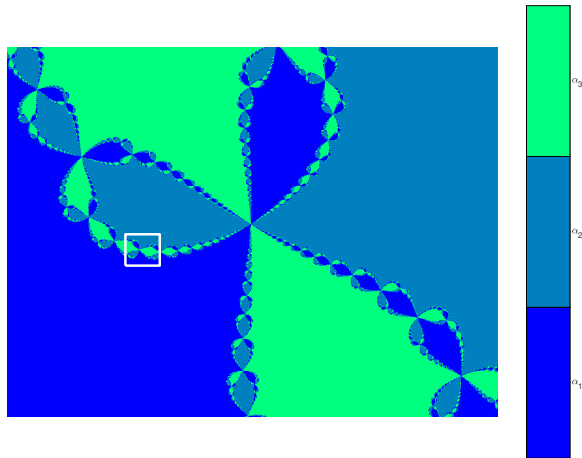
(b) Nombre d'itérations de convergence

Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton



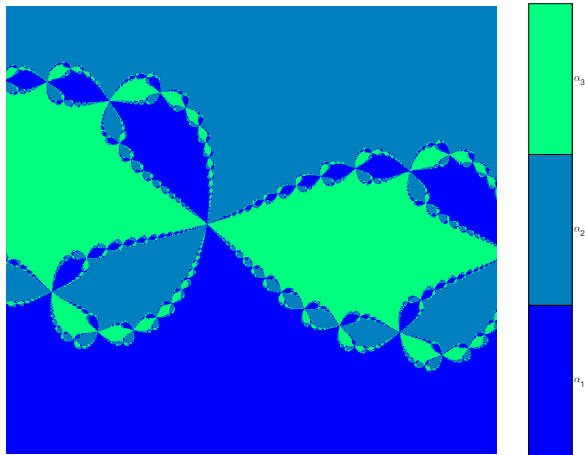
Méthode de Newton, zoom 1 sur les bassins d'attraction

Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton



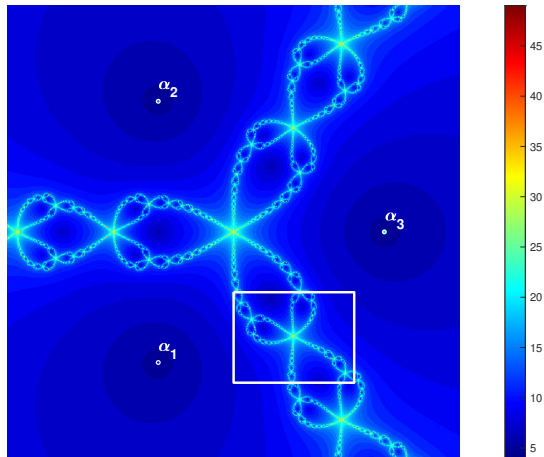
Méthode de Newton, zoom 2 sur les bassins d'attraction

Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton



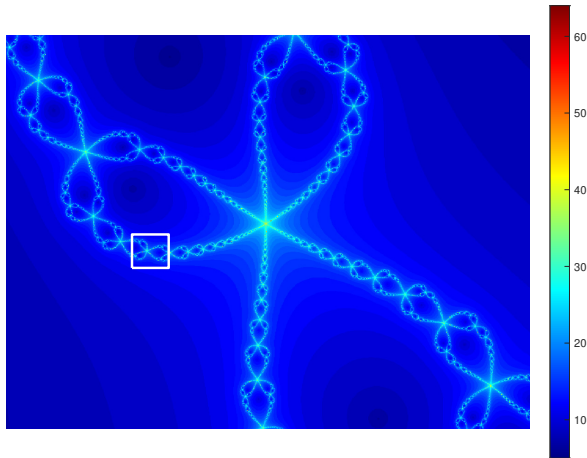
Méthode de Newton, zoom 3 sur les bassins d'attraction

Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton



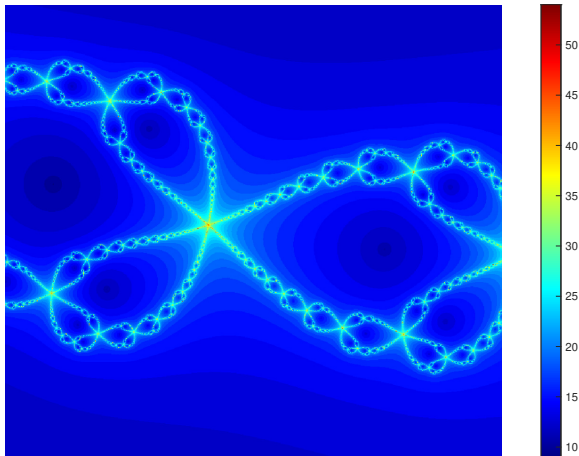
Méthode de Newton, zoom 1 sur les nombres d'itérations

Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton



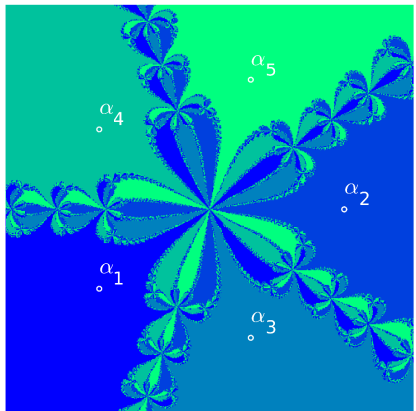
Méthode de Newton, zoom 2 sur les nombres d'itérations

Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton

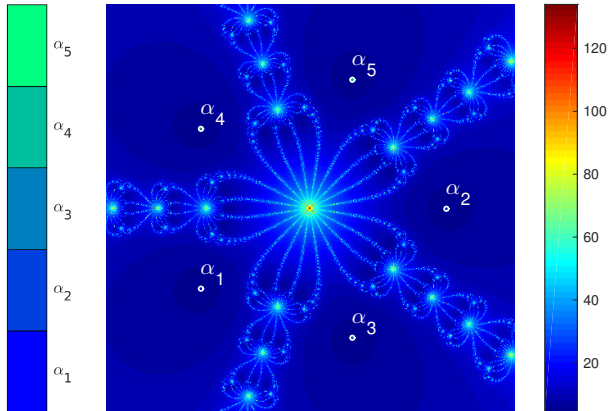


Méthode de Newton, zoom 3 sur les nombres d'itérations

Exemple complexe : $z^5 - 1 = 0$, fractale de Newton



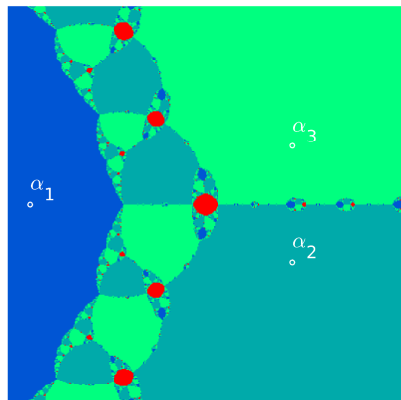
(a) Bassin d'attraction des racines



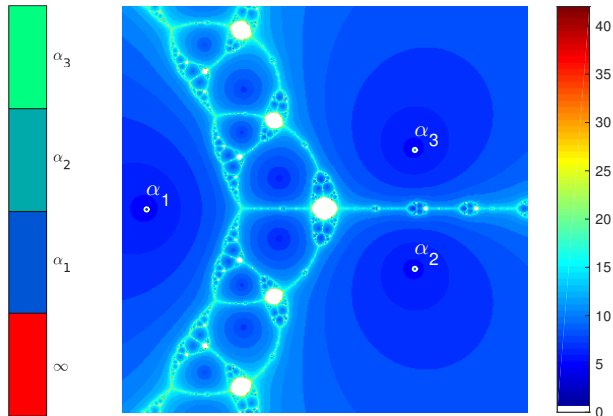
(b) Nombre d'itérations de convergence

$[-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$

Exemple complexe : $z^3 - 2z + 2 = 0$, fractale de Newton



(a) Bassin d'attraction des racines. En rouge zone de divergence



(b) Nombre d'itérations de convergence. En blanc zone de divergence

$[-2, 2] \times [-2, 2]$