Proposition: convergence de la méthode de Newton

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un certain voisinage d'une racine simple α de f. Soit x_0 donné dans ce voisinage, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la méthode de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{P-1}$$

est localement convergente d'ordre 2.

Proof. Comme α est racine simple de f (i.e. $f(\alpha) = 0$ et $f'(\alpha) \neq 0$) et f' continue, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de α tel que pour tout $x \in \mathcal{V}$, $f'(x) \neq 0$. On peut alors définir la fonction Φ sur $\mathcal{V}$ par

$$\forall x \in \mathcal{V},\quad \Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

On a alors $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. La fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{V}$ et

$$\Phi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

On a donc $\Phi'(\alpha) = 0$ car $f(\alpha) = 0$. D'après le théorème de convergence locale du point fixe (théorème 2.5), on en déduit que la suite (x_k) converge vers α (et que la convergence est au moins d'ordre 1. Pour démontrer qu'elle est d'ordre 2, on ne peut utiliser le théorème 2.6 car Φ n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$. Toutefois comme f est de classe $\mathcal{C}^2$, on applique la formule de Taylor-Lagrange aux points x_k, α (en supposant $x_k \neq \alpha$) : il existe ξ_k compris entre x_k et α tel que

$$\underbrace{f(\alpha)}_{=0} = f(x_k) + (\alpha - x_k)f'(x_k) + \frac{(\alpha - x_k)^2}{2!} f^{(2)}(\xi_k).$$

Comme $f'(x_k) \neq 0$, l'équation précédente s'écrit aussi

$$
\begin{aligned}
\alpha &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - (\alpha - x_k)^2 \frac{f^{(2)}(\xi_k)}{2f'(x_k)} \\
&= x_{k+1} - (\alpha - x_k)^2 \frac{f^{(2)}(\xi_k)}{2f'(x_k)}.
\end{aligned}
$$

On obtient alors

$$
\frac{\alpha - x_{k+1}}{(\alpha - x_k)^2} = -\frac{f^{(2)}(\xi_k)}{2f'(x_k)}.
$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ et la suite ξ_k converge vers α (car ξ_k compris entre x_k et α). Ceci entraine par passage à la limite que

$$
\lim_{k \to +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^2} = \frac{f^{(2)}(\alpha)}{2f'(\alpha)}.
$$

La convergence est donc d'ordre 2. $\square$