Théorème: Théorème du point fixe dans $\mathbb{R}$

Soient $[a,b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et Φ une application continue de $[a,b]$ dans lui-même. Alors, il existe **au moins** un point $\alpha \in [a,b]$ vérifiant $\Phi(\alpha) = \alpha$. Le point α est appelé **point fixe de la fonction** Φ.
De plus, si Φ est contractante (lipschitzienne de rapport $L \in [0,1[$), c'est à dire

$$\exists L < 1 \text{ t.q. } |\Phi(x) - \Phi(y)| \leqslant L|x-y| \ \forall (x,y) \in [a,b]^2, \tag{P-1}$$

alors Φ admet un **unique** point fixe $\alpha \in [a,b]$.
Pour tout $x_0 \in [a,b]$, la suite

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \ \forall k \in \mathbb{N} \tag{P-2}$$

est bien définie et elle converge vers α avec un ordre 1 au moins.
On a les deux estimations suivantes :

$$|x_k - \alpha| \leqslant L^k |x_0 - \alpha|, \ \forall k \geqslant 0, \tag{P-3}$$

$$|x_k - \alpha| \leqslant \frac{L}{1-L} |x_k - x_{k-1}|, \ \forall k \geqslant 0, \tag{P-4}$$

Proof. **1ère approche** :

- On montre tout d'abord l'existence du point fixe. Pour celà, on note $f(x) = \Phi(x) - x$. f est donc une application continue de $[a,b]$ à valeurs réelles. On a $f(a) = \Phi(a) - a \geqslant 0$ et $f(b) = \Phi(b) - b \leqslant 0$ car $a \leqslant \Phi(x) \leqslant b$, pour tout $x \in [a,b]$. Si $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$, alors l'existence est immédiate. Sinon (i.e. $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$), on a $f(a)f(b) < 0$ et par application directe du Théorème B.1 de Bolzano (ou TVI) on obtient l'existence.

- On montre ensuite l'unicité sous l'hypothèse de contraction (P-1). On suppose qu'il existe α_1 et α_2 dans $[a,b]$ tels que $\Phi(\alpha_1) = \alpha_1$ et $\Phi(\alpha_2) = \alpha_2$. Dans ce cas on a

  $$|\alpha_1 - \alpha_2| = |\Phi(\alpha_1) - \Phi(\alpha_2)| \leqslant L|\alpha_1 - \alpha_2|.$$

  On en déduit

  $$(1-L)|\alpha_1 - \alpha_2| \leqslant 0$$

Comme $L < 1$ on a $1 - L > 0$ et donc $|\alpha_1 - \alpha_2| \leqslant 0$ ce qui entraine $\alpha_1 = \alpha_2$.

- On a $\Phi([a,b]) \subset [a,b]$ et comme $x_0 \in [a,b]$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie. On va démontrer la convergence de la suite x_k vers l'unique point fixe α de Φ. Pour celà, en utilisant la définition de la suite et du point fixe, on a

$$|x_{k+1} - \alpha| = |\Phi(x_k) - \Phi(\alpha)|$$

Comme Φ est contractante, $x_k \in [a,b]$ et $\alpha \in [a,b]$ on obtient

$$|x_{k+1} - \alpha| \leqslant L|x_k - \alpha| \tag{P-5}$$

et une simple récurrence donne alors $\forall k \in \mathbb{N}$

$$|x_k - \alpha| \leqslant L^k|x_0 - \alpha|$$

ce qui démontre la formule P-3. En faisant tendre k vers $+\infty$ on obtient la convergence de x_k vers α.
De plus, d'après (P-5), comme $0 < L < 1$, la convergence est au moins d'ordre 1.
Pour la dernière estimation, on a:

$$\begin{aligned} |x_k - \alpha| &\leqslant L|x_{k-1} - \alpha| && \text{car } \Phi \text{ contractante} \\ &\leqslant L\big(|x_{k-1} - x_k| + |x_k - \alpha|\big) && \text{inégalité triangulaire} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$(1 - L)|x_k - \alpha| \leqslant L|x_{k-1} - x_k|$$

Comme $1 - L > 0$, on en déduit immédiatement l'estimation (P-4).

2ème approche :
L'objectif de cette approche est de proposer une démonstration très proche de celle utilisée pour des espaces plus *complexes* (par exemple $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, ...). Dans la 1ère approche le théorème de Bolzano et des inégalités ont été utilisées pour démontrer l'existence d'un point fixe: ceci n'est plus possible dans un cadre plus générale.
On va donc supposer, dès le départ, que l'application Φ est contractante de $[a,b]$ dans lui-même. Ceci va permettre d'établir que la suite x_k est de Cauchy.

- Comme $x_0 \in [a,b]$ et Φ est une application continue de $[a,b]$ dans lui-même, la suite x_k est bien définie $\forall k \in \mathbb{N}$.
- On démontre ensuite que x_k est une suite de Cauchy. Soit $k > 0$. On a

$$|x_{k+1} - x_k| = |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})| \leqslant L|x_k - x_{k-1}|,$$

et on obtient par récurrence

$$|x_{k+1} - x_k| \leqslant L^k |x_1 - x_0|$$

et

$$\forall l \geqslant 0,\ |x_{k+l} - x_{k+l-1}| \leqslant L^l |x_k - x_{k-1}|.$$

Soit $p > 2$. On en déduit par application répétée de l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned}
|x_{k+p} - x_k| = |(x_{k+p} - x_{k+p-1}) + (x_{k+p-1} - x_{k+p-2}) + \ldots + (x_{k+1} - x_k)| &= |\sum_{l=0}^{p-1}(x_{k+l+1} - x_{k+l})| \\
&\leqslant \sum_{l=0}^{p-1} |x_{k+l+1} - x_{k+l}| \\
&\leqslant \sum_{l=0}^{p-1} L^l |x_{k+1} - x_k| = \frac{1-L^p}{1-L}|x_{k+1} - x_k| \quad \textit{(voir somme partielle d'une série géométrique)} \\
&\leqslant \frac{1-L^p}{1-L} L^k |x_1 - x_0|.
\end{aligned}$$

Comme $L^k \to 0$ quand $k \to +\infty$, on conclu que (x_k) est une suite de Cauchy. En effet, pour que (x_k) soit une suite de Cauchy, il faut montrer que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N},\ \text{tel que } \forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant M,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \ |x_{k+p} - x_k| < \epsilon.$$

Comme $0 < L < 1$, on a

$$|x_{k+p} - x_k| \leqslant \frac{1}{1-L} L^k |x_1 - x_0|$$

Soit $\epsilon > 0$, pour avoir $|x_{k+p} - x_k| < \epsilon$, il est suffisant d'avoir

$$\frac{1}{1-L} L^k |x_1 - x_0| < \epsilon$$

c'est à dire, comme $1 - L > 0$,

$$L^k < \frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}.$$

La fonction ln étant croissante strictement on obtient

$$\ln(L^k) = k\ln(L) < \ln\big(\frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}\big).$$

Or $\ln(L) < 0$, ce qui donne

$$k > \frac{1}{\ln(L)} \ln\big(\frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}\big).$$

En prenant $M \in \mathbb{N}$ tel que

$$M \geqslant \frac{1}{\ln(L)} \ln\big(\frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}\big)$$

alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant M,\ \forall p \in \mathbb{N},\quad |\boldsymbol{x}_{k+p} - \boldsymbol{x}_k| < \epsilon.$$

- La suite (x_k) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ espace complet donc elle converge vers β dans $\mathbb{R}$. De plus pour tout k, x_k appartient à $[a, b]$ fermé borné, donc sa limite β aussi.
- Φ étant contractante sur $[a, b]$, elle est donc continue. On a alors par continuité de Φ

$$\lim_{k\to+\infty} \Phi(x_k) = \Phi(\beta).$$

Comme $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ on aussi

$$\lim_{k\to+\infty} \Phi(x_k) = \lim_{k\to+\infty} x_{k+1} = \beta$$

et donc β est un point fixe de Φ. L'existence d'un point fixe est donc établi.

La suite de la démonstration est inchangée.