# Analyse Numérique I

## Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 1ère année / L3 MIM

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

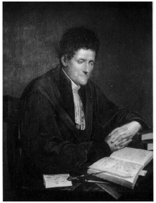
2023/10/02

# Plan du cours

### Racines/zéros d'un polynôme

- **degré 2** : Babylonniens en 1600 avant J.-C.
- **degré 3** : *Scipio del Ferro* (1465-1526, mathématicien italien) et *Niccolo Fontana* (1499-1557, mathématicien italien)
- **degré 4** : *Ludovico Ferrari* (1522-1565, mathématicien italien)
- **degré 5** : *Paolo Ruffini* (1765-1822, mathématicien italien) en 1799, *Niels Henrick Abel* (1802-1829, mathématicien norvégien) en 1824, montrent qu'il n'existe **pas de solution analytique**.

(a) *Niccolo Fontana* 1499-1557, mathématicien italien



(b) *Paolo Ruffini* 1765-1822, mathématicien italien

(c) *Niels Henrick Abel* 1802-1829, mathématicien norvégien

# Plan

Soit $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

$$\alpha \in \mathcal{D} \text{ tels que } f(\alpha) = 0.$$

Soit $I = ]a, b[$, $\bar{I} \subset \mathcal{D}$ on suppose $\exists! \alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$.

# Plan

**principe de la méthode de dichotomie :** Soit $I$ un intervalle contenant un **unique zéro** de la fonction $f$, on le divise par son milieu en deux intervalles et on détermine lequel des deux contient le zéro. On itére ce processus sur le nouvel intervalle.

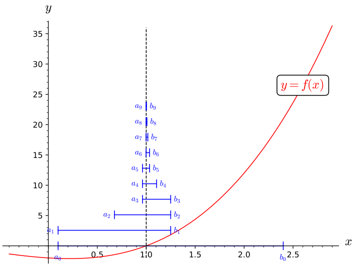



Figure: Méthode de dichotomie: $f(x) = (x+2)(x+1)(x-1)$

**principe de la méthode de dichotomie :** Soit $I$ un intervalle contenant un **unique zéro** de la fonction $f$, on le divise par son milieu en deux intervalles et on détermine lequel des deux contient le zéro. On itére ce processus sur le nouvel intervalle.

- $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_0 = \frac{a+b}{2}$,
- $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} a_{k+1} = b_{k+1} = x_k & \text{si } f(x_k) = 0, \\ a_{k+1} = x_k,\ b_{k+1} = b_k & \text{si } f(b_k)f(x_k) < 0, \\ a_{k+1} = a_k,\ b_{k+1} = x_k & \text{sinon (i.e. } f(a_k)f(x_k) < 0.) \end{cases}$$

et

$$x_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2.$$

## Exercice 1

On suppose que la fonction $f$ est continue sur $[a, b]$, vérifie $f(a)f(b) < 0$ et qu'il existe un unique $\alpha \in ]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

**Q.1**

1. *Montrer que les suites* $(a_k)$ *et* $(b_k)$ *convergent vers* $\alpha$.
2. *En déduire que la suite* $(x_k)$ *converge vers* $\alpha$.

**Q.2**

1. *Montrer que pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - \alpha| \leqslant \frac{b-a}{2^{k+1}}$.
2. *Soit* $\epsilon > 0$. *En déduire que si* $k \geqslant \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$ *alors* $|x_k - \alpha| \leqslant \epsilon$.

### Proposition 1.1

Soit $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(a)f(b) < 0$ et admettant $\alpha \in ]a, b[$ comme **unique** solution de $f(x) = 0$. Alors la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la méthode de dichotomie converge vers $\alpha$ et

$$|x_k - \alpha| \leqslant \frac{b-a}{2^{k+1}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On a alors $\forall \epsilon > 0$, $\forall k \geqslant \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$

$$|x_k - \alpha| \leqslant \epsilon.$$

# Algorithme

- Que cherche-t'on?

- Quelles sont les données du problèmes?

# Algorithme

- Que cherche-t'on?

**Résultat** :

$\alpha_\epsilon$ : un réel tel que $|\alpha_\epsilon - \alpha| \leqslant \epsilon$.

- Quelles sont les données du problèmes?

- Que cherche-t'on?

**Résultat** **:**

$\alpha_\epsilon$ : un réel tel que $|\alpha_\epsilon - \alpha| \leqslant \epsilon$.

- Quelles sont les données du problèmes?

**Données :**

| | | |
|---|---|---|
| $a$, $b$ | : | deux réels $a < b$, |
| $f$ | : | $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses de la proposition , |
| $\epsilon$ | : | un réel strictement positif. |

**Algorithme 1** $\boxed{\mathcal{R}_0}$

$k_{\min} \leftarrow \mathrm{E}\left(\frac{\log\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)}{\log(2)}\right)$ ▷ $\mathrm{E}$ , partie entière

$\boxed{\text{Calcul de la suite } (x_k)_{k=0}^{k_{\min}} \text{ par dichotomie}}$

$\alpha_\epsilon \leftarrow x_{k_{\min}}$

**Algorithme 1** $\boxed{\mathcal{R}_1}$

$k_{\min} \leftarrow \mathrm{E}\left(\frac{\log\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)}{\log(2)}\right)$ ▷ $\mathrm{E}$ , partie entière

Initialisation de $x_0$

**Pour** $k \leftarrow 0$ **à** $k_{\min} - 1$ **faire**

  Calcul de la suite $(x_{k+1})$ par dichotomie

**Fin Pour**

$\alpha_\epsilon \leftarrow x_{k_{\min}}$

**Algorithme 1** $\mathcal{R}_1$

$k_{\min} \leftarrow \mathrm{E}\left(\frac{\log\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)}{\log(2)}\right)$ $\rhd$ $\mathrm{E}$ , partie entière
Initialisation de $x_0$
**Pour** $k \leftarrow 0$ **à** $k_{\min} - 1$ **faire**
  Calcul de la suite $(x_{k+1})$ par dichotomie
**Fin Pour**
$\alpha_\epsilon \leftarrow x_{k_{\min}}$

**Algorithme 1** $\mathcal{R}_2$

$k_{\min} \leftarrow \mathrm{E}\left(\frac{\log\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)}{\log(2)}\right)$
$a_0 \leftarrow a,\ b_0 \leftarrow b$
$x_0 \leftarrow \frac{a_0+b_0}{2}$
**Pour** $k \leftarrow 0$ **à** $k_{\min} - 1$ **faire**
  **Si** $f(x_k) == 0$ **alors**
    $a_{k+1} \leftarrow x_k,\ b_{k+1} \leftarrow x_k$
  **Sinon Si** $f(x_k)f(b_k) < 0)$ **alors**
    $a_{k+1} \leftarrow x_k,\ b_{k+1} \leftarrow b_k$
  **Sinon**
    $a_{k+1} \leftarrow a_k,\ b_{k+1} \leftarrow x_k$
  **Fin Si**
  $x_{k+1} \leftarrow \frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2}$
**Fin Pour**
$\alpha_\epsilon \leftarrow x_{k_{\min}}$

**Algorithm** Méthode de dichotomie : version 1

**Données :** $a$, $b$ : deux réels $a < b$,
$f$ : $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses de la proposition 1.1,
$\mathrm{eps}$ : un réel strictement positif.

**Résultat :** $x$ : un réel tel que $|x - \alpha| \leqslant \mathrm{eps}$.

**Fonction** $x \leftarrow$ Dichotomie1 $(\, f, a, b, \mathrm{eps}\,)$
  $\mathrm{kmin} \leftarrow \mathrm{E}(\log((b-a)/\mathrm{eps})/\log(2))$
  $\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{\mathrm{kmin}+1}$ $\quad\triangleright$ $\boldsymbol{A}(k+1)$ contiendra $a_k$, ...
  $\boldsymbol{A}(1) \leftarrow a,\ \boldsymbol{B}(1) \leftarrow b,\ \boldsymbol{X}(1) \leftarrow (a+b)/2$
  **Pour** $k \leftarrow 1$ **à** $\mathrm{kmin}$ **faire**
    **Si** $f(\boldsymbol{X}(k)) == 0$ **alors**
      $\boldsymbol{A}(k+1) \leftarrow \boldsymbol{X}(k),\ \boldsymbol{B}(k+1) \leftarrow \boldsymbol{X}(k)$
    **Sinon Si** $f(\boldsymbol{B}(k))f(\boldsymbol{X}(k)) < 0$ **alors**
      $\boldsymbol{A}(k+1) \leftarrow \boldsymbol{X}(k),\ \boldsymbol{B}(k+1) \leftarrow \boldsymbol{B}(k)$
    **Sinon**
      $\boldsymbol{A}(k+1) \leftarrow \boldsymbol{A}(k),\ \boldsymbol{B}(k+1) \leftarrow \boldsymbol{X}(k)$
    **Fin Si**
    $\boldsymbol{X}(k+1) \leftarrow (\boldsymbol{A}(k+1) + \boldsymbol{B}(k+1))/2$
  **Fin Pour**
  $x \leftarrow \boldsymbol{X}(\mathrm{kmin}+1)$
**Fin Fonction**

# Algorithme : versions 2, 3 et + si affinités

- $A = a,\ B = b$ et $x_0 = \frac{A+B}{2}$,
- $\forall k \in [\![0, k_{\min} - 1]\!]$,

$$\begin{cases} A = B = x_k & \text{si } f(x_k) = 0, \\ A = x_k,\ B \text{ inchangé} & \text{si } f(B)f(x_k) < 0, \\ B = x_k,\ A \text{ inchangé} & \text{sinon (i.e. } f(A)f(x_k) < 0.) \end{cases}$$

et

$$x_{k+1} = \frac{A+B}{2}$$

**Algorithm** Méthode de dichotomie : version 2

**Données :** $a, b$ : deux réels $a < b$,
$f$ : $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses de la proposition 1.1,
$\mathrm{eps}$ : un réel strictement positif.

**Résultat :** $x$ : un réel tel que $|x - \alpha| \leqslant \mathrm{eps}$.

**Fonction** $x \leftarrow$ DICHOTOMIE2 ( $f, a, b, \mathrm{eps}$ )
  $\mathrm{kmin} \leftarrow \mathrm{E}(\log((b-a)/\mathrm{eps})/\log(2))$
  $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{\mathrm{kmin}+1}$ $\rhd$ $\boldsymbol{X}(k+1)$ contiendra $x_k$, ...
  $\mathrm{A} \leftarrow a,\ \mathrm{B} \leftarrow b,\ \boldsymbol{X}(1) \leftarrow (\mathrm{A}+\mathrm{B})/2$
  **Pour** $k \leftarrow 1$ **à** $\mathrm{kmin}$ **faire**
    **Si** $f(\boldsymbol{X}(k)) == 0$ **alors**
      $\mathrm{A} \leftarrow \boldsymbol{X}(k),\ \mathrm{B} \leftarrow \boldsymbol{X}(k)$
    **Sinon Si** $f(\mathrm{B})f(\boldsymbol{X}(k)) < 0$ **alors**
      $\mathrm{A} \leftarrow \boldsymbol{X}(k)$ $\rhd$ B inchangé
    **Sinon**
      $\mathrm{B} \leftarrow \boldsymbol{X}(k)$ $\rhd$ A inchangé
    **Fin Si**
    $\boldsymbol{X}(k+1) \leftarrow (\mathrm{A}+\mathrm{B})/2$
  **Fin Pour**
  $x \leftarrow \boldsymbol{X}(\mathrm{kmin}+1)$
**Fin Fonction**

**Algorithm** Méthode de dichotomie : version 3

**Données :** $a,\ b$ : deux réels $a < b$,
$f$ : $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses de la proposition 1.1,
$\mathrm{eps}$ : un réel strictement positif.

**Résultat :** $x$ : un réel tel que $|x - \alpha| \leqslant \mathrm{eps}$.

**Fonction** $x \leftarrow$ DICHOTOMIE3 $(\ f, a, b, \mathrm{eps}\ )$
  $\mathrm{kmin} \leftarrow \mathrm{E}(\log((b-a)/\mathrm{eps})/\log(2))$
  $A,\ B \in \mathbb{R}$
  $A \leftarrow a,\ B \leftarrow b,\ x \leftarrow (a+b)/2$
  **Pour** $k \leftarrow 1$ **à** $\mathrm{kmin}$ **faire**
    **Si** $f(x) == 0$ **alors**
      $A \leftarrow x,\ B \leftarrow x$
    **Sinon Si** $f(B)f(x) < 0$ **alors**
      $A \leftarrow x$ ▷ $B$ inchangé
    **Sinon**
      $B \leftarrow x$ ▷ $A$ inchangé
    **Fin Si**
    $x \leftarrow (A+B)/2$
  **Fin Pour**
**Fin Fonction**

**Algorithm** Méthode de dichotomie : version 4

**Données :** $a,\ b$ : deux réels $a < b$,
$f$ : $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ et $f(a)f(b) < 0$
$\mathrm{eps}$ : un réel strictement positif.

**Résultat :** $x$ : un réel tel que $|x - \alpha| \leqslant \mathrm{eps}$.

```
Fonction x ← Dichotomie4 ( f, a, b, eps )
    A, B ∈ ℝ
    A ← a, B ← b, x ← (a + b)/2
    Tantque |x − A| > eps faire
        Si f(x) == 0 alors
            A ← x, B ← x
        Sinon Si f(B)f(x) < 0 alors
            A ← x                                   ▷ B inchangé
        Sinon
            B ← x                                   ▷ A inchangé
        Fin Si
        x ← (A + B)/2
    Fin Tantque
Fin Fonction
```

## Que pensez vous de cet algorithme?

**Algorithm** Méthode de dichotomie : version 5

**Données :** $a, b$ : deux réels $a < b$,
$f$ : $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ et $f(a)f(b) < 0$.

**Résultat :** $x$ : un réel tel que $f(x) = 0$.

**Fonction** $x \leftarrow$ DICHOTOMIE5 ( $f, a, b$ )
  $A, B \in \mathbb{R}$
  $A \leftarrow a,\ B \leftarrow b,\ x \leftarrow (a+b)/2,\ \mathrm{xp} \leftarrow a$
  **Tantque** $x \sim= \mathrm{xp}$ **faire**
    **Si** $f(B)f(x) < 0$ **alors**
      $A \leftarrow x$ ▷ $B$ inchangé
    **Sinon**
      $B \leftarrow x$ ▷ $A$ inchangé
    **Fin Si**
    $\mathrm{xp} \leftarrow x$
    $x \leftarrow (A+B)/2$
  **Fin Tantque**
**Fin Fonction**

# Plan

# Points fixes

Soit $\Phi : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée. Rechercher un **point fixe** de $\Phi$ revient à

Trouver $\alpha \in [a, b]$ tel que

$$\alpha = \Phi(\alpha).$$

L'algorithme de la **méthode du point fixe** consiste en la construction, si elle existe, de la suite

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}), \ \forall k \in \mathbb{N} \tag{1}$$

avec $x^{(0)} \in [a, b]$ donné.

### Definition 1.2

Soient $(E, \mathrm{d})$ un **espace métrique** et $(\boldsymbol{u}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $E$ convergeant vers $\boldsymbol{\alpha} \in E$. On dit que cette suite **converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ avec un ordre** $p \geqslant 1$ **au moins** si

$$\exists k_0 \in \mathbb{N},\ \exists C > 0 \ \text{ tels que } \ \mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k+1]}, \boldsymbol{\alpha}) \leqslant C\,\mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k]}, \boldsymbol{\alpha})^p,\ \forall k \geqslant k_0. \tag{2}$$

où $C < 1$ si $p = 1$.

Exemples de distances:

- $\mathrm{d}(x, y) = |x - y|$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$
- $\mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ dans $\mathbb{R}^n$, où $\|.\|$ est l'une quelconque des normes habituelles.

**Théorème 2: Théorème du point fixe dans $\mathbb{R}$**

Soient $[a, b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $\Phi$ une application continue de $[a, b]$ dans lui-même. Alors, il existe **au moins** un point $\alpha \in [a, b]$ vérifiant $\Phi(\alpha) = \alpha$. Le point $\alpha$ est appelé **point fixe de la fonction** $\Phi$.
De plus, si $\Phi$ est contractante (lipschitzienne de rapport $L \in [0, 1[$), c'est à dire

$$\exists L < 1 \text{ t.q. } |\Phi(x) - \Phi(y)| \leqslant L|x - y| \; \forall (x, y) \in [a, b]^2, \tag{3}$$

alors $\Phi$ admet un **unique** point fixe $\alpha \in [a, b]$.
Pour tout $x_0 \in [a, b]$, la suite

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \; \forall k \in \mathbb{N} \tag{4}$$

est bien définie et elle converge vers $\alpha$ avec un ordre 1 au moins.
On a les deux estimations suivantes :

$$|x_k - \alpha| \leqslant L^k |x_0 - \alpha|, \; \forall k \geqslant 0, \tag{5}$$

$$|x_k - \alpha| \leqslant \frac{L}{1 - L} |x_k - x_{k-1}|, \; \forall k \geqslant 0, \tag{6}$$

## Théorème 3: Convergence globale, méthode du point fixe

Soit $\Phi \in \mathcal{C}^1([a,b])$ vérifiant $\Phi([a,b]) \subset [a,b]$ et

$$\exists L < 1 \text{ tel que } \forall x \in [a,b], \ |\Phi'(x)| \leqslant L, \tag{7}$$

Soit $x_0 \in [a,b]$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. On a alors

1. la fonction $\Phi$ admet un unique point fixe $\alpha \in [a,b]$,
2. $\forall k \in \mathbb{N}, \ x_k \in [a,b]$,
3. la suite $(x_k)$ converge vers $\alpha$ avec un ordre 1 au moins.
4. Si $x_0 \neq \alpha$, alors
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha} = \Phi'(\alpha). \tag{8}$$

### Théorème 4: Convergence locale du point fixe

Soit $\alpha$ un point fixe d'une fonction $\Phi$ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $\alpha$.
Si $|\Phi'(\alpha)| < 1$, alors il existe $\delta > 0$ pour lequel $x_k$ converge vers $\alpha$ pour tout $x_0$ tel que $|x_0 - \alpha| \leqslant \delta$.
De plus, si $x_0 \neq \alpha$, on a

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha} = \Phi'(\alpha). \tag{9}$$

### Exercice 2:

Soit $\alpha$ un point fixe d'une fonction $\Phi$ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $\alpha$ et vérifiant $\Phi'(\alpha) = 0$.

**Q.1** *Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x_0 \in ]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$ la suite définie par $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ converge vers $\alpha$.*

On suppose de plus que $\Phi'$ est dérivable sur $]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$ et qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta], \ |\Phi''(x)| \leqslant M$$

**Q.2**

1. *Montrer que*

$$\forall x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta], \ |x_k - \alpha| \leqslant \frac{2}{M}\left(\frac{1}{2}M|x_0 - \alpha|\right)^{2^k}$$

2. *Quel est l'ordre de convergence dans ce cas.*

**Q.3** *A quelle condition a-t'on*

$$|x_k - \alpha| \leqslant \frac{2}{M}10^{-2^k}.$$

**Proposition 4.1:**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $\Phi \in \mathcal{C}^{p+1}(\mathcal{V})$ pour un certain voisinage $\mathcal{V}$ de $\alpha$ point fixe de $\Phi$. Si $\Phi^{(i)}(\alpha) = 0$, pour $1 \leqslant i \leqslant p$ et si $\Phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$, alors la méthode de point fixe associée à la fonction $\Phi$ est d'ordre $p+1$ et

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\Phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}. \tag{10}$$

# Plan

# Points fixes attractifs et répulsifs

Soit $\Phi : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ admettant un point fixe $\alpha \in [a, b]$.

- Si $|\Phi'(\alpha)| < 1$ alors $\alpha$ est un point fixe attractif,
- Si $|\Phi'(\alpha)| > 1$ alors $\alpha$ est un point fixe répulsif.

On s'interesse ici au point fixe $\alpha = 1$ de la fonction $\Phi : x \mapsto x^2$.

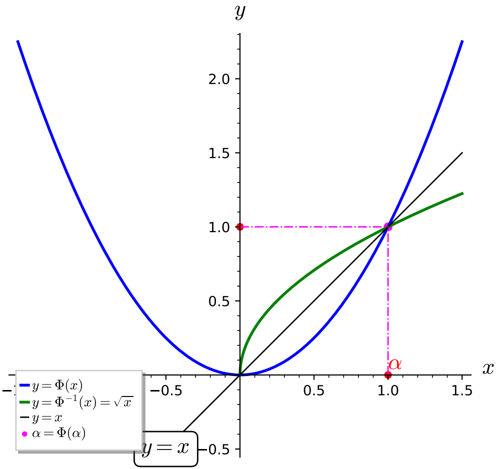
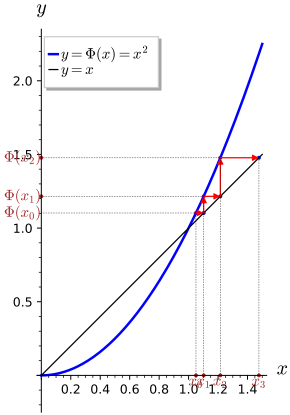
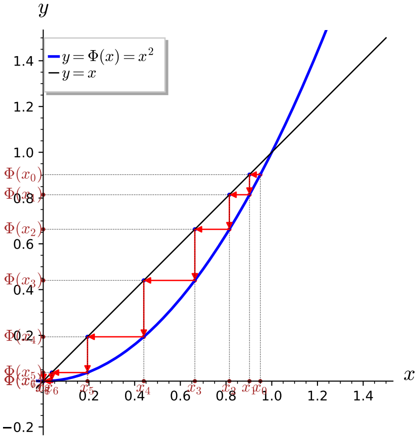



Figure: fonction $x^2$ et sa fonction réciproque $\sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$

## $\Phi'(\alpha) = 2$ : **point fixe répulsif**



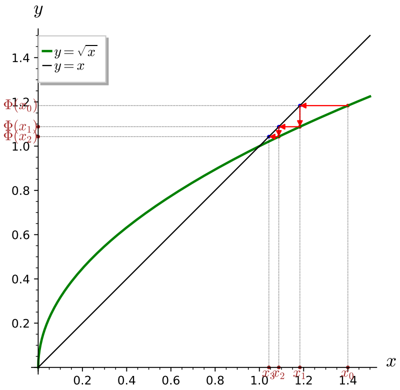

(a) $x_0 = 1.05$



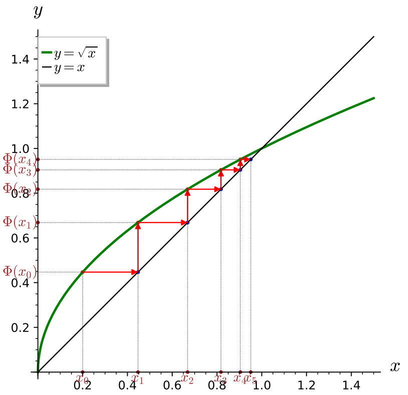

(b) $x_0 = 0.950$

Figure: $\alpha = 1$, point fixe répulsif de $x \mapsto x^2$

$(\Phi^{-1})'(1) = 1/2 < 1$, : **point fixe attractif**



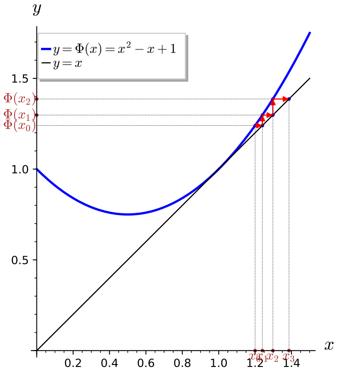

(a) $x_0 = 1.40$



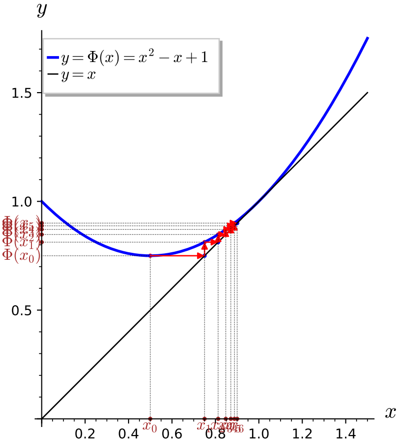

(b) $x_0 = 0.200$

Figure: $\alpha = 1$, point fixe attractif de $\Phi^{-1} : x \mapsto \sqrt{x}$

fonction $\Phi : x \mapsto x^2 - x + 1$ : **point fixe $\alpha = 1$, $\Phi'(\alpha) = 1$.**

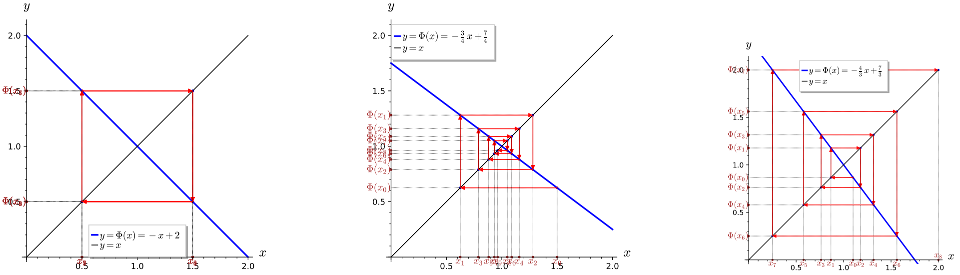



(a) $x_0 = 1.2$, $\alpha$ point répulsif




(b) $x_0 = 0.50$, $\alpha$ point attractif

Figure: $\alpha = 1$, point fixe attractif ou répulsif de $x \mapsto x^2 - x + 1$




(a) $x_0 = 1.50$ (b) $x_0 = 1.50$ (c) $x_0 = 1.10$

Figure: $\alpha = 1$, point fixe de fonctions affines particulières

# Plan

# Algorithme générique du point fixe

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}), \ \forall k \in \mathbb{N}, \text{ avec } x^{(0)} \in [a, b] \text{ donné.}$$

**Algorithm** Méthode de point fixe : version **Tantque** *formel*

$k \leftarrow 0$
**Tantque** non convergence **faire**
    $x_{k+1} \leftarrow \Phi(x_k)$
    $k \leftarrow k + 1$
**Fin Tantque**
$\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow x_k$ ▷ le dernier calculé.

**Algorithm** Méthode de point fixe : version **Répéter** *formel*

$k \leftarrow 0$
**Répéter**
    $k \leftarrow k + 1$
    $x_k \leftarrow \Phi(x_{k-1})$
**jusqu'à** convergence
$\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow x_k$ ▷ le dernier calculé.

## Critères d'arrêt?

- On n'est pas sûr de converger $\Longrightarrow$ $\mathrm{kmax}$: nb maximum d'itérations,
- Si on converge, on s'arrête dès que $|\Phi(x_k) - x_k| = |x_{k+1} - x_k| \leqslant \mathrm{tol}$.

# Algorithme générique du point fixe

**Algorithm** Méthode de point fixe : version **Tantque** *formel* avec critères d'arrêt

$k \leftarrow 0$
$\mathrm{err} \leftarrow |\Phi(x_0) - x_0|$ ▷ ou $\frac{|\Phi(x_0)-x_0|}{|x_0|+1}$
**Tantque** $\mathrm{err} > \epsilon$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
  $k \leftarrow k+1$
  $x_k \leftarrow \Phi(x_{k-1})$
  $\mathrm{err} \leftarrow |\Phi(x_k) - x_k|$ ▷ ou $\frac{|\Phi(x_k)-x_k|}{|x_k|+1}$
**Fin Tantque**
**Si** $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors** ▷ Convergence
  $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow x_k$ ▷ $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$
**Fin Si**

**Algorithm** Méthode de point fixe : version **Répéter** *formel* avec critères d'arrêt

$k \leftarrow 0$
**Répéter**
  $\mathrm{err} \leftarrow |\Phi(x_k) - x_k|$ ▷ ou $\frac{|\Phi(x_k)-x_k|}{|x_k|+1}$
  $x_{k+1} \leftarrow \Phi(x_k)$
  $k \leftarrow k+1$
**jusqu'à** $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ ou $k > \mathrm{kmax}$
**Si** $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors** ▷ Convergence
  $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow x_k$ ▷ $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$
**Fin Si**

**Algorithm** Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

**Données :**

- $\Phi$ : $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,
- $x_0$ : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

**Résultat :**

- $\alpha_{\mathrm{tol}}$ : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$ (ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}})-\alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

**Fonction** $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ PtFixe ( $\Phi, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}$ )
  $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $\mathrm{x} \leftarrow x_0$, $\mathrm{fx} \leftarrow \Phi(x_0)$,
  $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{fx} - \mathrm{x}|$ ▷ ou $\frac{|\mathrm{fx}-\mathrm{x}|}{|\mathrm{x}|+1}$
  **Tantque** $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\mathrm{x} \leftarrow \mathrm{fx}$
    $\mathrm{fx} \leftarrow \Phi(\mathrm{x})$
    $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{fx} - \mathrm{x}|$ ▷ ou $\frac{|\mathrm{fx}-\mathrm{x}|}{|\mathrm{x}|+1}$
  **Fin Tantque**
  **Si** $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors** ▷ Convergence
    $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{x}$
  **Fin Si**
**Fin Fonction**

**Algorithm** Méthode de point fixe : version **Répéter** avec critères d'arrêt

**Données :**

- $\Phi$ : $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,
- $x_0$ : donnée initiale, $x_\in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

**Résultat :**

- $\alpha_{\mathrm{tol}}$ : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$ (ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}})-\alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

**Fonction** $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ PtFixe ( $\Phi, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}$ )
  $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $\mathrm{x} \leftarrow x_0$
  **Répéter**
    $\mathrm{xp} \leftarrow \mathrm{x}$
    $\mathrm{x} \leftarrow \Phi(\mathrm{xp})$
    $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{x} - \mathrm{xp}|$ ▷ ou $\frac{|\mathrm{x}-\mathrm{xp}|}{|\mathrm{xp}|+1}$
    $k \leftarrow k + 1$
  **jusqu'à** $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ ou $k > \mathrm{kmax}$
  **Si** $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors** ▷ Convergence
    $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{x}$
  **Fin Si**
**Fin Fonction**

# Plan

# Applications à la recherche de racines

$$f(x) = 0 \iff \Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} x + f(x) = x.$$

si $\mathcal{F} \in \mathcal{C}^0$ tel que $\mathcal{F}(0) = 0$ alors

$$f(x) = 0 \iff \Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} x + \mathcal{F}(f(x)) = x.$$

Objectif : Construire une suite $x_{k+1}$ tel que $|x_{k+1} - \alpha| \leqslant |x_k - \alpha|$.

formule de taylor :

$$f(\alpha) = 0 = f(x_k) + hf'(\xi) \text{ avec } h = \alpha - x_k.$$

Soit $q_k \approx f'(\xi)$ et $\tilde{h}$ solution de

$$f(x_k) + \tilde{h}q_k = 0$$

Si $q_k \neq 0$, on obtient la suite itérative $x_{k+1} = x_k + \tilde{h}$ i.e.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{q_k}, \ \forall k \in \mathbb{N} \tag{11}$$

# Applications à la recherche de racines

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{q_k}, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

$x_{k+1}$ : intersection droite de pente $q_k$ passant par $((x_k), f(x_k))$ avec $(Ox)$

- **Méthode de la corde** :
$$q_k = q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
- **Méthode de la sécante** :
$$q_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$
où $x_{-1}$ et $x_0$ sont données,
- **Méthode de Newton** : en supposant $f'$ connu, on prend
$$q_k = f'(x_k).$$

# Plan

**Exercice 3:**

Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ vérifiant $f(a)f(b) < 0$. et $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Soit $x_0 \in [a, b]$ donné. La suite obtenue par la méthode de la corde est donnée par

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

On note $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{\lambda}$.

**Q.1** *Montrer que si pour tout* $x \in [a, b]$ *on a*

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leqslant f(x) \leqslant \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \tag{12}$$

*alors* $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$.

**Q.2** *Montrer que si pour tout* $x \in [a, b]$ *on a*

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \tag{13}$$

*alors* $|\Phi'(x)| < 1$.

**Q.3** *En déduire que sous les deux conditions précédentes la méthode de la corde converge vers l'unique solution* $\alpha \in [a, b]$ *de* $f(x) = 0$.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x_k), \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

On pose $\Phi(x) = x - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x)$, alors $x_{k+1} = \Phi(x_k)$.

**Proposition 4.2: convergence, méthode de la corde**

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ tel que $f(b) \neq f(a)$ et $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On note $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 \in [a,b]$ et pour tout $k \geqslant 0$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda}. \tag{14}$$

On suppose de plus que $\forall x \in [a,b]$

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leqslant f(x) \leqslant \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \tag{15}$$

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \tag{16}$$

alors la suite $(x_k)$ converge vers l'unique racine $\alpha \in [a,b]$ de $f$.

**Proposition 4.3: ordre de convergence de la méthode de la corde**

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ tel que $f(b) \neq f(a)$. Si la suite $(x_k)$ définie par la méthode de la corde en (14) converge vers $\alpha \in ]a, b[$ alors la convergence est au moins d'ordre 1.

De plus, si $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un certain voisinage $\mathcal{V}$ de $\alpha$ et si $f'(\alpha) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ alors la convergence est au moins d'ordre 2.

Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

**Données :**

$\Phi$ : $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,
$x_0$ : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
$\mathrm{tol}$ : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
$\mathrm{kmax}$ : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

**Résultat :**

$\alpha_{\mathrm{tol}}$ : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}})-\alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

```
Fonction α_tol ← PtFixe ( Φ, x_0, tol, kmax )
  k ← 0, α_tol ← ∅
  x ← x_0,
  err ← tol + 1
  Tantque err > tol et k ⩽ kmax faire
    k ← k + 1
    xp ← x
    x ← Φ(xp)
    err ← |x − xp|                          ▷ ou |xp−x|/(|x|+1)
  Fin Tantque
  Si err ⩽ tol alors                        ▷ Convergence
    α_tol ← x
  Fin Si
Fin Fonction
```

**Méthode de la corde :**

$$\Phi(x) = x - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x)$$

Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

**Données :**

$\Phi$ : $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,
$x_0$ : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
$\mathrm{tol}$ : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
$\mathrm{kmax}$ : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

**Résultat :**

$\alpha_{\mathrm{tol}}$ : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}})-\alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

**Fonction** $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ PTFIXE ( $\Phi, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}$ )
  $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $\mathrm{x} \leftarrow x_0$,
  $\mathrm{err} \leftarrow \mathrm{tol} + 1$
  **Tantque** $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\mathrm{xp} \leftarrow \mathrm{x}$
    $\mathrm{x} \leftarrow \Phi(\mathrm{xp})$
    $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{x} - \mathrm{xp}|$ ▷ ou $\frac{|\mathrm{xp}-\mathrm{x}|}{|\mathrm{x}|+1}$
  **Fin Tantque**
  **Si** $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors** ▷ Convergence
    $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{x}$
  **Fin Si**
**Fin Fonction**

**Algorithm** Méthode de la corde

**Données :**

$f$ : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,
$a$, $b$ : deux réels tels que $f(a) \neq f(b)$,
$x_0$ : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
$\mathrm{tol}$ : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
$\mathrm{kmax}$ : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

**Résultat :**

$\alpha_{\mathrm{tol}}$ : un réel tel que $|f(\alpha_{\mathrm{tol}})| \leqslant \mathrm{tol}$

**Fonction** $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ CORDE ( $f, a, b, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}$ )
  $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $q \leftarrow \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$
  $\mathrm{x} \leftarrow x_0$,
  $\mathrm{err} \leftarrow \mathrm{tol} + 1$
  **Tantque** $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\mathrm{xp} \leftarrow \mathrm{x}$
    $\mathrm{x} \leftarrow \mathrm{xp} - q * f(\mathrm{xp})$
    $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{x} - \mathrm{xp}|$
  **Fin Tantque**
  **Si** $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors** ▷ Convergence
    $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{x}$
  **Fin Si**
**Fin Fonction**

Plus simple, plus court ... ???

Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

**Données :**

- $\Phi$ : $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,
- $x_0$ : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- $\mathrm{tol}$ : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- $\mathrm{kmax}$ : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

**Résultat :**

- $\alpha_{\mathrm{tol}}$ : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$ (ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}})-\alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

```
Fonction α_tol ← PtFixe ( Φ, x_0, tol, kmax )
   k ← 0, α_tol ← ∅
   x ← x_0,
   err ← tol + 1
   Tantque err > tol et k ⩽ kmax faire
      k ← k + 1
      xp ← x
      x ← Φ(xp)
      err ← |x − xp|                          ▷ ou |xp−x|/(|x|+1)
   Fin Tantque
   Si err ⩽ tol alors                          ▷ Convergence
      α_tol ← x
   Fin Si
Fin Fonction
```

**Algorithm** Méthode de la corde utilisant la fonction PtFixe

**Données :**

- $f$ : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,
- $a$, $b$ : deux réels tels que $f(a) \neq f(b)$,
- $x_0$ : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- $\mathrm{tol}$ : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- $\mathrm{kmax}$ : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

**Résultat :**

- $\alpha_{\mathrm{tol}}$ : un réel tel que $|f(\alpha_{\mathrm{tol}})| \leqslant \mathrm{tol}$

```
Fonction α_tol ← Corde ( f, a, b, x_0, tol, kmax )
   q ← (b−a)/(f(b)−f(a))
   Φ ← (x ↦ x − q ∗ f(x))                     ▷ définition de fonction
   α_tol ← PtFixe(Φ, x_0, tol, kmax)
Fin Fonction
```

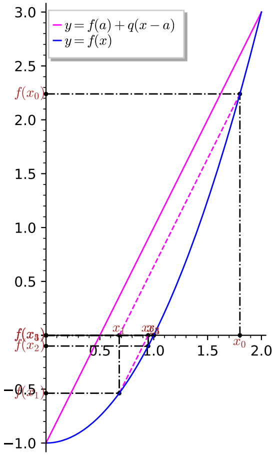
Plus simple, plus court ... ???

$\alpha = 1$, racine de $f : x \mapsto x^2 - 1$

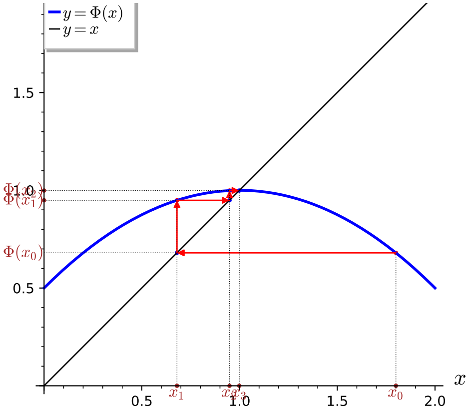
- exemple 1 : $a = 0.000$, $b = 2.000$, $x_0 = 1.800$,
- exemple 2 : $a = 0.5000$, $b = 1.900$, $x_0 = 1.800$.

| | **exemple 1** | **exemple 2** |
|---|---|---|
| $k$ | $\lvert x_k - \alpha \rvert$ | $\lvert x_k - \alpha \rvert$ |
| 0 | 8.0000e-01 | 8.0000e-01 |
| 1 | 3.2000e-01 | 1.3333e-01 |
| 2 | 5.1200e-02 | 2.9630e-02 |
| 3 | 1.3107e-03 | 5.3041e-03 |
| 4 | 8.5899e-07 | 8.9573e-04 |
| 5 | 3.6893e-13 | 1.4962e-04 |
| 6 | 0.0000e+00 | 2.4947e-05 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| 15 | 0.0000e+00 | 2.4756e-12 |

L'exemple 1 converge beaucoup plus rapidement

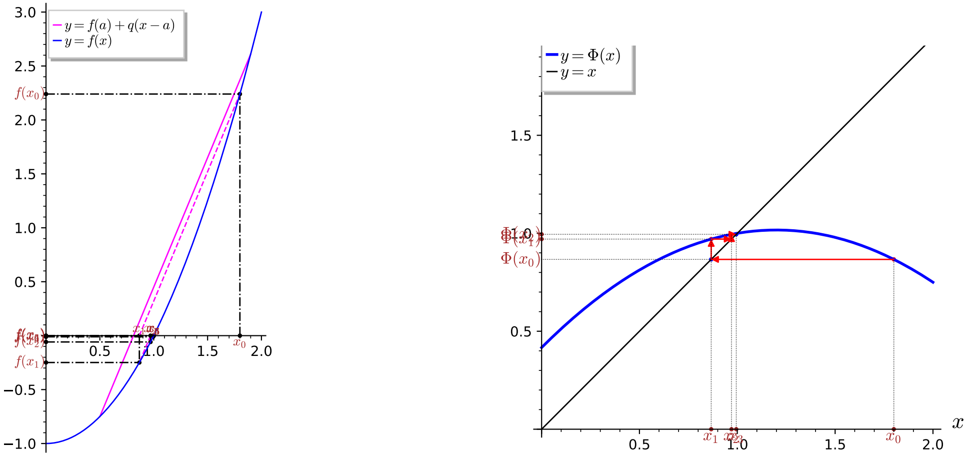



(a) représentation usuelle




(b) Représentation point fixe

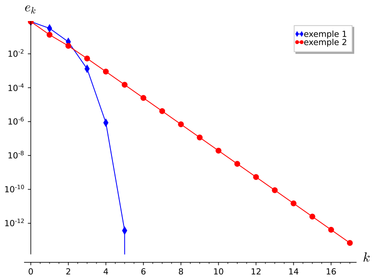
Figure: Exemple 1, méthode de la corde, $\alpha = 1$, racine de $f : x \mapsto x^2 - 1$ avec $a = 0.00$, $b = 2.00$, $x_0 = 1.80$,



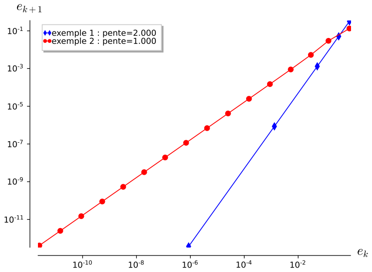

(a) représentation usuelle

(b) Représentation point fixe

Figure: Exemple 2, méthode de la corde, $\alpha = 1$, racine de $f \;:\; x \mapsto x^2 - 1$ avec $a = 0.50$, $b = 1.90$, $x_0 = 1.80$,




(a) Erreurs en fonctions des itérations




(b) Représentation en échelle logarithmique de $e_{k+1}$ en fonction de $e_k$. Les pentes sont calculées numériquement

Figure: Exemples 1 et 2, méthode de la corde, $\alpha = 1$, racine de $f \ : \ x \mapsto x^2 - 1$

Exemple 1 : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 2$ et $f'(\alpha) = 2 \Rightarrow$ convergence ordre 2.

Exemple 2 : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 2.400 \neq f'(\alpha) = 2 \Rightarrow$ convergence ordre 1.

# Plan

**Proposition 4.4: convergence de la méthode de Newton**

Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un certain voisinage d'une racine simple $\alpha$ de $f$. Soit $x_0$ donné dans ce voisinage, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la méthode de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

est localement convergente d'ordre 2.

**Exercice 4:**

En $-1700$ av. J.-C., les babyloniens ne connaissaient que les nombres rationnels (fractions) et ils utilisaient le système sexagésimal (base 60). Pour approcher la valeur $\sqrt{2}$, ils utilisaient comme approximation (voir tablette YBC 7289)

$$\alpha = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600}$$

L'erreur commise est $|\alpha - \sqrt{2}| \approx 5.994e-7$.

**Q.1** *Comment feriez-vous pour trouver* ***à la main*** *une méthode permettant de trouver des nombres rationnels approchant* $\sqrt{2}$.

**Q.2** *Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de* $\sqrt{a}$ *où* $a$ *est un réel positif.*

**Q.3** *Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de* $\sqrt[n]{a}$ *où* $a$ *est un réel positif et* $n \in \mathbb{N}^*$.

Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

**Données :**

$\Phi$ : $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,
$x_0$ : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
$\mathrm{tol}$ : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
$\mathrm{kmax}$ : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

**Résultat :**

$\alpha_{\mathrm{tol}}$ : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}})-\alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

```
Fonction α_tol ← PtFixe ( Φ, x_0, tol, kmax )
    k ← 0, α_tol ← ∅
    x ← x_0,
    err ← tol + 1
    Tantque err > tol et k ⩽ kmax faire
        k ← k + 1
        xp ← x
        x ← Φ(xp)
        err ← |x − xp|                    ▷ ou |xp−x|/(|x|+1)
    Fin Tantque
    Si err ⩽ tol alors                    ▷ Convergence
        α_tol ← x
    Fin Si
Fin Fonction
```

Méthode de Newton :

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

**Données :**

$\Phi$ : $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,
$x_0$ : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
$\mathrm{tol}$ : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
$\mathrm{kmax}$ : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

**Résultat :**

$\alpha_{\mathrm{tol}}$ : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}})-\alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

**Fonction** $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ PTFIXE ( $\Phi, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}$ )
  $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $\mathrm{x} \leftarrow x_0$,
  $\mathrm{err} \leftarrow \mathrm{tol} + 1$
  **Tantque** $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\mathrm{xp} \leftarrow \mathrm{x}$
    $\mathrm{x} \leftarrow \Phi(\mathrm{xp})$
    $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{x} - \mathrm{xp}|$ ▷ ou $\frac{|\mathrm{xp}-\mathrm{x}|}{|\mathrm{x}|+1}$
  **Fin Tantque**
  **Si** $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors** ▷ Convergence
    $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{x}$
  **Fin Si**
**Fin Fonction**

**Algorithm** Méthode de Newton

**Données :**

$f$ : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,
$\mathrm{df}$ : la dérivée de $f$,
$x_0$ : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
$\mathrm{tol}$ : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
$\mathrm{kmax}$ : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

**Résultat :**

$\alpha_{\mathrm{tol}}$ : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$

**Fonction** $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ NEWTON ( $f, \mathrm{df}, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}$ )
  $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $\mathrm{x} \leftarrow x_0$,
  $\mathrm{err} \leftarrow \mathrm{tol} + 1$
  **Tantque** $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\mathrm{xp} \leftarrow \mathrm{x}$
    $\mathrm{x} \leftarrow \mathrm{xp} - f(\mathrm{xp})/\mathrm{df}(\mathrm{xp})$ ▷ $\mathrm{df}(\mathrm{xp}) \neq 0$
    $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{x} - \mathrm{xp}|$
  **Fin Tantque**
  **Si** $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors** ▷ Convergence
    $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{x}$
  **Fin Si**
**Fin Fonction**

Plus simple, plus court ... ???

Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

**Données :**

- $\Phi$ : $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,
- $x_0$ : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- $\mathrm{tol}$ : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- $\mathrm{kmax}$ : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

**Résultat :**

- $\alpha_{\mathrm{tol}}$ : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$ (ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}})-\alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

**Fonction** $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ PtFixe ( $\Phi, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}$ )
  $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $\mathrm{x} \leftarrow x_0$,
  $\mathrm{err} \leftarrow \mathrm{tol} + 1$
  **Tantque** $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\mathrm{xp} \leftarrow \mathrm{x}$
    $\mathrm{x} \leftarrow \Phi(\mathrm{xp})$
    $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{x} - \mathrm{xp}|$  ▷ ou $\frac{|\mathrm{xp}-\mathrm{x}|}{|\mathrm{x}|+1}$
  **Fin Tantque**
  **Si** $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors**  ▷ Convergence
    $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{x}$
  **Fin Si**
**Fin Fonction**

**Algorithm** Méthode de Newton scalaire

**Données :**

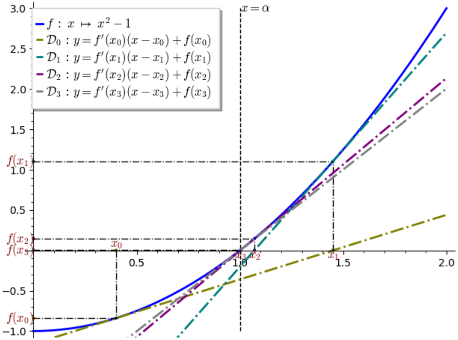
- $f$ : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,
- $\mathrm{df}$ : la dérivée de $f$,
- $x_0$ : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- $\mathrm{tol}$ : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- $\mathrm{kmax}$ : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

**Résultat :**

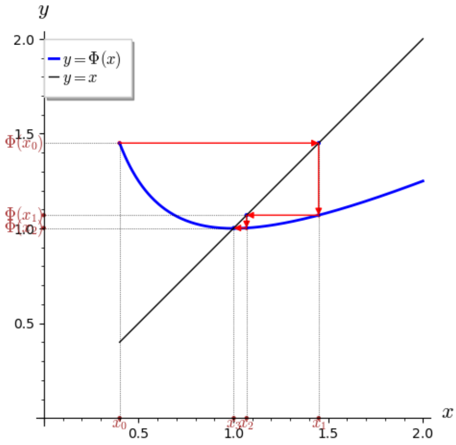
- $\alpha_{\mathrm{tol}}$ : un réel tel que

**Fonction** $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ Newton ( $f, \mathrm{df}, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}$ )
  $\Phi \leftarrow \left(x \mapsto x - f(x)/\mathrm{df}(x)\right)$
  $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ PtFixe$(\Phi, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax})$
**Fin Fonction**

Plus simple, plus court ... ???

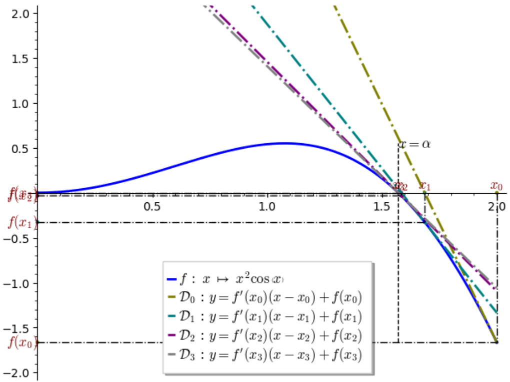



(a) représentation usuelle

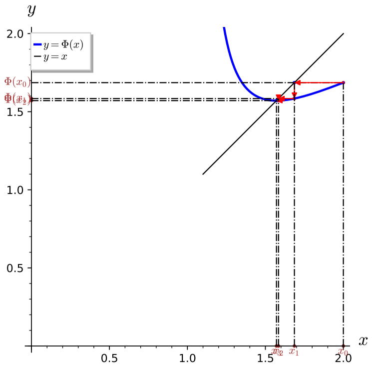



(b) Représentation point fixe avec $\Phi : x \mapsto x - \frac{x^2-1}{2x}$

Figure: Exemple 1, méthode de Newton, $\alpha = 1$, racine de $f : x \mapsto x^2 - 1$ avec $x_0 = 0.40$,



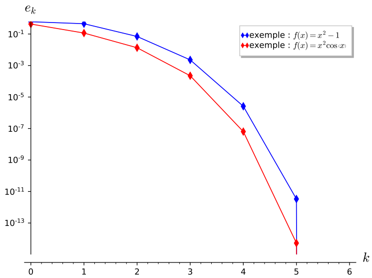

(a) représentation usuelle



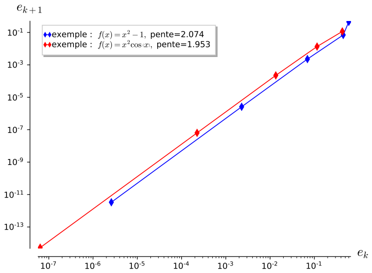

(b) Représentation point fixe avec

$$\Phi \ : \ x \mapsto \frac{x^2 \cos(x)}{x^2 \sin(x) - 2\,x \cos(x)} + x$$

Figure: Exemple 2, méthode de Newton, $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, racine de $f \ : \ x \mapsto x^2 \cos(x)$ avec $x_0 = 2.00$,




(a) Représentation de la convergence, $e_k$ en fonction de $k$




(b) Représentation de l'ordre de convergence en échelle logarithmique, $e_{k+1}$ en fonction de $e_k$ . Ordre théorique 2

Figure: Méthode de Newton, convergence et ordre

# Plan

Alternative à la méthode de Newton lorsque l'on ne connait pas la dérivée de la fonction $f$ :

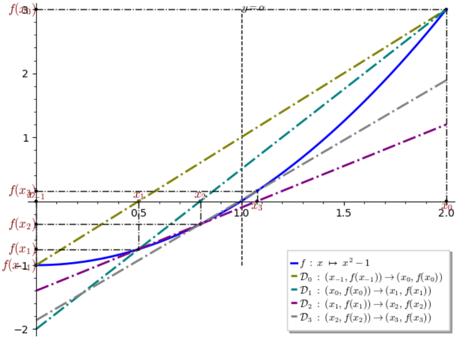
$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

### Proposition 4.5: Convergence méthode de la sécante (Admis)

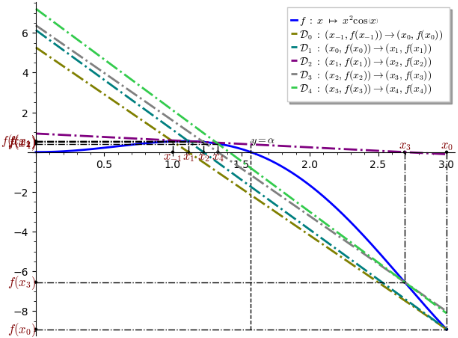
Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un certain voisinage d'une racine simple $\alpha$ de $f$. Soient $x_{-1}$ et $x_0$ donnés dans ce voisinage tels que $f(x_{-1}) \neq f(x_0)$ , la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la méthode de la sécante

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

est localement convergente d'ordre $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.

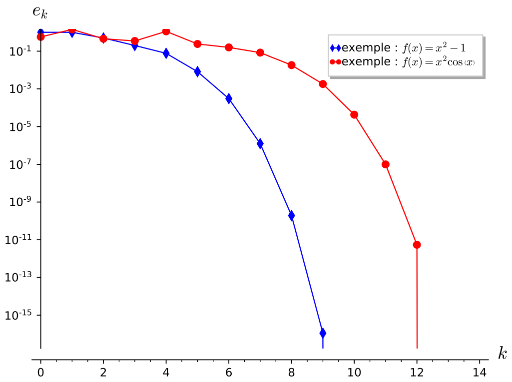



(a) $f(x) = x^2 - 1$, $x_{-1} = 0.000$ et $x_0 = 2.000$

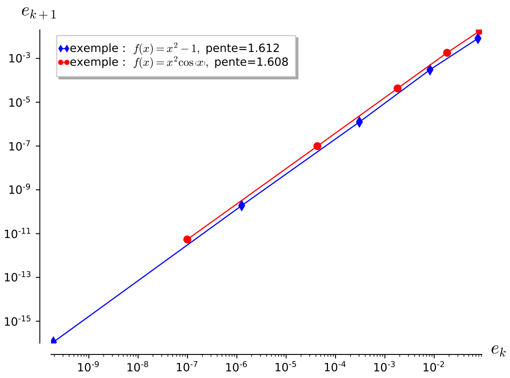



(b) $f(x) = x^2 \cos(x)$, $x_{-1} = 1.000$ et $x_0 = 3.000$

Figure: Méthode de la sécante




(a) Représentation de la convergence, $e_k$ en fonction de $k$



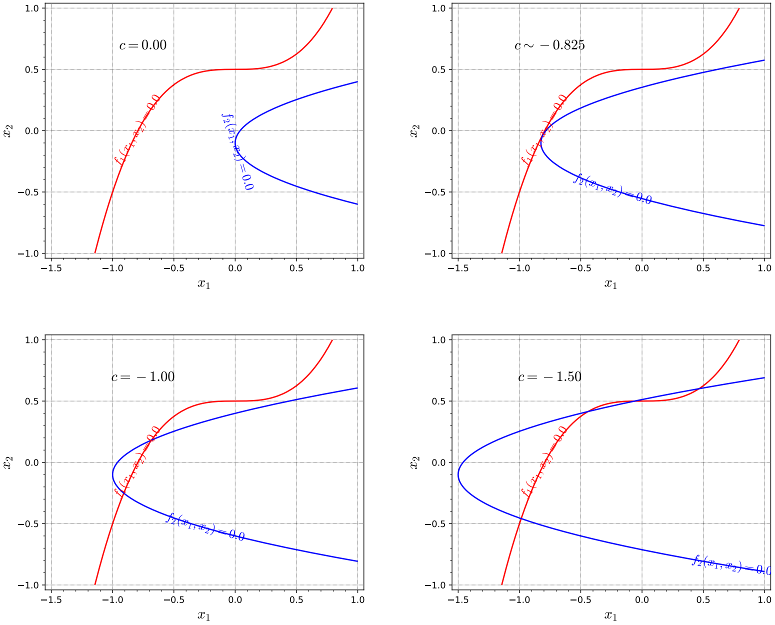

(b) Représentation de l'ordre de convergence en échelle logarithmique, $e_{k+1}$ en fonction de $e_k$ . Ordre théorique $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

Figure: Méthode de la sécante, convergence et ordre

# Plan

Soit $c \in \mathbb{R}$ donné.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2 - \frac{1}{2} & = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{25}\left(10\,x_2 + 1\right)^2 + c - x_1 & = 0. \end{cases} \tag{19}$$



$c = 0.00$
$c \sim -0.825$
$c = -1.00$
$c = -1.50$
$f_1(x_1, x_2) = 0.0$
$f_2(x_1, x_2) = 0.0$
$x_1$
$x_2$

Soient $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^0(U; \mathbb{R}^N)$

Trouver $\boldsymbol{\alpha} \in U \subset \mathbb{R}^N$ tel que

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 0 \iff \begin{cases} \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_N) & = & 0 \\ \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_N) & = & 0 \\ \vdots & & \\ \boldsymbol{f}_N(\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_N) & = & 0 \end{cases}$$

On pose, par ex., $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, : $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ Point fixe

Trouver $\boldsymbol{\alpha} \in U \subset \mathbb{R}^N$ tel que

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha} \iff \begin{cases} \boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_N) & = & \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\Phi}_2(\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_N) & = & \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots & & \\ \boldsymbol{\Phi}_N(\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_N) & = & \boldsymbol{\alpha}_N \end{cases}$$

# Plan

## Théorème 5.1: Point fixe de Banach ☆☆☆☆☆

Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach et $U \subset \mathcal{B}$ un sous-ensemble fermé. On suppose que $\boldsymbol{\Phi} : U \longrightarrow U$ est une application strictement contractante, i.e.

$$\exists L \in ]0,1[, \quad \|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y})\| \leqslant L \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|, \quad \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in U \times U. \tag{20}$$

Alors

1. $\boldsymbol{\Phi}$ admet un unique point fixe $\boldsymbol{\alpha} \in U$ (i.e. unique solution de $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$).
2. La suite des itérés $\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k]})$ converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ pour toute valeur initiale $\boldsymbol{x}^{[0]} \in U$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left\|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{x}^{[k]}\right\| \leqslant \frac{L^{k-l}}{1-L} \left\|\boldsymbol{x}^{[l+1]} - \boldsymbol{x}^{[l]}\right\|, \quad 0 \leqslant l \leqslant k \tag{21}$$

# Plan

$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction suffisament régulière. On défini la **matrice Jacobienne de $\boldsymbol{f}$**, notée $\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}$, par

$$\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

On a alors $\forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^N$ à l'ordre 1

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) \approx \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{h}. \tag{22}$$

On a $\forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^N$ à l'ordre 1

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) \approx \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{h}. \tag{23}$$

trouver $\boldsymbol{\alpha}$ tel que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 0$.

Si $\boldsymbol{x}^{[k]}$ est proche de $\boldsymbol{\alpha}$, alors avec $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{[k]}$ et $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{h}$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}) \approx \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]}) + \mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^{[k]}).\boldsymbol{h}$$

On résoud le système linéarisé

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]}) + \mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^{[k]}).\tilde{\boldsymbol{h}} = 0 \iff \mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^{[k]}).\tilde{\boldsymbol{h}} = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]}).$$

On pose $\Phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - ((\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}))^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. la méthode de Newton s'écrit alors

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \Phi(\boldsymbol{x}^{[k]}) = \boldsymbol{x}^{[k]} - \left((\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^{[k]})\right)^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]}) \tag{24}$$

### Théorème 5.2: (Admis)

Soit $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$. On suppose que la matrice Jacobienne appliquée en $\boldsymbol{x}$, $\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})$ est inversible dans un voisinage de $\boldsymbol{\alpha}$, avec $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 0$. Alors pour tout $\boldsymbol{x}^{[0]}$ suffisament proche de $\boldsymbol{\alpha}$ la suite définie par

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{x}^{[k]} - \left( \left( \mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^{[k]}) \right) \right)^{-1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]})$$

converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ et la convergence est d'ordre 2.

Comment fait-on pour calculer $-\left( \left( \mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^{[k]}) \right) \right)^{-1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]})$?

### Théorème 5.3: (Admis)

Soit $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$. On suppose que la matrice Jacobienne appliquée en $\boldsymbol{x}$, $\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})$ est inversible dans un voisinage de $\boldsymbol{\alpha}$, avec $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 0$. Alors pour tout $\boldsymbol{x}^{[0]}$ suffisament proche de $\boldsymbol{\alpha}$ la suite définie par

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{x}^{[k]} - \left((\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^{[k]})\right)^{-1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]})$$

converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ et la convergence est d'ordre 2.

Comment fait-on pour calculer $-\left((\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^{[k]})\right)^{-1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]})$?

On résoud le système linéaire

$$\left((\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^{[k]})\right) \boldsymbol{h} = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]})$$

Remarque : Si l'on ne connait pas explicitement la Jacobienne de $f$, il est possible de calculer une approximation de celle-ci en utilisant des formules de dérivation numérique.

Méthode de Newton scalaire

**Données :**

| | | |
|---|---|---|
| $f$ | : | $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , |
| $\mathrm{df}$ | : | la dérivée de $f$, |
| $x_0$ | : | donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$, |
| $\mathrm{tol}$ | : | la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$, |
| $\mathrm{kmax}$ | : | nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$ |

**Résultat :**

$\alpha_{\mathrm{tol}}$ : un réel tel que

**Fonction** $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ Newton ( $f, \mathrm{df}, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}$ )
  $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $\mathrm{x} \leftarrow x_0$,
  $\mathrm{err} \leftarrow \mathrm{tol} + 1$
  **Tantque** $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\mathrm{xp} \leftarrow \mathrm{x}$
    $\mathrm{x} \leftarrow \mathrm{xp} - f(\mathrm{xp})/\mathrm{df}(\mathrm{xp})$  $\rhd$ $\mathrm{x} \leftarrow \Phi(\mathrm{xp})$
    $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{x} - \mathrm{xp}|$
  **Fin Tantque**
  **Si** $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors**
    $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{x}$
  **Fin Si**
**Fin Fonction**

Méthode de Newton *vectorielle* :

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \left( (\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})\right)^{-1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

Méthode de Newton scalaire

**Données :**

| | | |
|---|---|---|
| $f$ | : | $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , |
| $\mathrm{df}$ | : | la dérivée de $f$, |
| $x_0$ | : | donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$, |
| $\mathrm{tol}$ | : | la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$, |
| $\mathrm{kmax}$ | : | nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$ |

**Résultat :**

| | | |
|---|---|---|
| $\alpha_{\mathrm{tol}}$ | : | un réel tel que |

**Fonction** $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ NEWTON ( $f, \mathrm{df}, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}$ )
  $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $\mathrm{x} \leftarrow x_0$,
  $\mathrm{err} \leftarrow \mathrm{tol} + 1$
  **Tantque** $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\mathrm{xp} \leftarrow \mathrm{x}$
    $\mathrm{x} \leftarrow \mathrm{xp} - f(\mathrm{xp})/\mathrm{df}(\mathrm{xp})$  ▷ $\mathrm{x} \leftarrow \Phi(\mathrm{xp})$
    $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{x} - \mathrm{xp}|$
  **Fin Tantque**
  **Si** $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors**
    $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{x}$
  **Fin Si**
**Fin Fonction**

**Algorithm** Méthode de Newton vectorielle

**Données :**

| | | |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{f}$ | : | $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ , |
| $\mathrm{Jf}$ | : | la matrice Jacobienne de $f$, |
| $\boldsymbol{x0}$ | : | donnée initiale, $\boldsymbol{x0} \in \mathbb{R}^N$, |
| $\mathrm{tol}$ | : | la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$, |
| $\mathrm{kmax}$ | : | nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$ |

**Résultat :**

| | | |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}}$ | : | un élément de $\mathbb{R}^N$ proche de $\boldsymbol{\alpha}$. |

**Fonction** $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ NEWTON ( $\boldsymbol{f}, \mathrm{Jf}, \boldsymbol{x0}, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}$ )
  $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $\boldsymbol{x} \leftarrow \boldsymbol{x0}$,
  $\mathrm{err} \leftarrow \mathrm{tol} + 1$
  **Tantque** $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\boldsymbol{xp} \leftarrow \boldsymbol{x}$
    $\boldsymbol{h} \leftarrow \mathrm{SOLVE}(\mathrm{Jf}(\boldsymbol{xp}), -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{xp}))$
    $\boldsymbol{x} \leftarrow \boldsymbol{xp} + \boldsymbol{h}$
    $\mathrm{err} \leftarrow \mathrm{NORM}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{xp})$
  **Fin Tantque**
  **Si** $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors**  ▷ Convergence
    $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}} \leftarrow \boldsymbol{x}$
  **Fin Si**
**Fin Fonction**

# Rappel : Point fixe scalaire. Et le cas vectoriel ... ???

Méthode de point fixe scalaire

**Données :**

| | | |
|---|---|---|
| $\Phi$ | : | $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , |
| $x_0$ | : | donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$, |
| $\mathrm{tol}$ | : | la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$, |
| $\mathrm{kmax}$ | : | nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$ |

**Résultat :**

$\alpha_{\mathrm{tol}}$ : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}})-\alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

**Fonction** $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ PtFixe ( $\Phi, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}$ )
    $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
    $\mathrm{x} \leftarrow x_0$, $\mathrm{fx} \leftarrow \Phi(x_0)$,
    $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{fx} - \mathrm{x}|$ ▷ ou $\frac{|\mathrm{fx}-\mathrm{x}|}{|\mathrm{x}|+1}$
    **Tantque** $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
        $k \leftarrow k + 1$
        $\mathrm{x} \leftarrow \mathrm{fx}$
        $\mathrm{fx} \leftarrow \Phi(\mathrm{x})$
        $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{fx} - \mathrm{x}|$ ▷ ou $\frac{|\mathrm{fx}-\mathrm{x}|}{|\mathrm{x}|+1}$
    **Fin Tantque**
    **Si** $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors** ▷ Convergence
        $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{x}$
    **Fin Si**
**Fin Fonction**

**Algorithm** Méthode de Newton scalaire

**Données :**

| | | |
|---|---|---|
| $f$ | : | $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , |
| $\mathrm{df}$ | : | la dérivée de $f$, |
| $x_0$ | : | donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$, |
| $\mathrm{tol}$ | : | la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$, |
| $\mathrm{kmax}$ | : | nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$ |

**Résultat :**

$\alpha_{\mathrm{tol}}$ : un réel tel que

**Fonction** $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ Newton ( $f, \mathrm{df}, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}$ )
    $\Phi \leftarrow \big(x \mapsto x - f(x)/\mathrm{df}(x)\big)$
    $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ PtFixe$(\Phi, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax})$
**Fin Fonction**

# Rappel : Point fixe scalaire. Et le cas vectoriel ... ???

**Méthode de point fixe scalaire**

**Données :**

| | | |
|---|---|---|
| $\Phi$ | : | $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , |
| $x_0$ | : | donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$, |
| $\mathrm{tol}$ | : | la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$, |
| $\mathrm{kmax}$ | : | nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$ |

**Résultat :**

$\alpha_{\mathrm{tol}}$ : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$
(ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}})-\alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

```
Fonction α_tol ← PtFixe ( Φ, x_0, tol, kmax )
    k ← 0, α_tol ← ∅
    x ← x_0, fx ← Φ(x_0),
    err ← |fx − x|                                  ▷ ou |fx−x|/(|x|+1)
    Tantque  err > tol et k ⩽ kmax faire
        k ← k + 1
        x ← fx
        fx ← Φ(x)
        err ← |fx − x|                              ▷ ou |fx−x|/(|x|+1)
    Fin Tantque
    Si err ⩽ tol alors                              ▷ Convergence
        α_tol ← x
    Fin Si
Fin Fonction
```

**Méthode de point fixe vectorielle**

**Données :**

| | | |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{\Phi}$ | : | $\boldsymbol{\Phi} : \mathbb{K}^N \longrightarrow \mathbb{K}^N$ , |
| $\boldsymbol{x0}$ | : | donnée initiale, $\boldsymbol{x0} \in \mathbb{K}^N$, |
| $\mathrm{tol}$ | : | la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$, |
| $\mathrm{kmax}$ | : | nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$ |

**Résultat :**

$\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}}$ : un réel tel que $\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}}) - \boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}}\| \leqslant \mathrm{tol}$

```
Fonction α_tol ← PtFixeVec ( Φ, x0, tol, kmax )
    k ← 0, α_tol ← ∅
    x ← x0, fx ← Φ(x0),
    err ← ‖fx − x‖
    Tantque  err > tol et k ⩽ kmax faire
        k ← k + 1
        x ← fx
        fx ← Φ(x)
        err ← ‖fx − x‖
    Fin Tantque
    Si err ⩽ tol alors
        α_tol ← x
    Fin Si
Fin Fonction
```

# Rappel : Point fixe scalaire. Et le cas vectoriel ... ???

**Méthode de Newton vectorielle**

**Données :**

$\boldsymbol{f}$ : $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ ,
$\mathrm{Jf}$ : la matrice Jacobienne de $\boldsymbol{f}$,
$\boldsymbol{x0}$ : donnée initiale, $\boldsymbol{x0} \in \mathbb{R}^N$,
$\mathrm{tol}$ : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
$\mathrm{kmax}$ : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

**Résultat :**

$\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}}$ : un élément de $\mathbb{R}^N$ proche de $\boldsymbol{\alpha}$.

**Fonction** $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}} \leftarrow \textsc{NewtonVec}\ (\ \boldsymbol{f}, \mathrm{Jf}, \boldsymbol{x0}, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}\ )$
  $\boldsymbol{\Phi} \leftarrow \left(\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} - \textsc{Solve}(\mathrm{Jf}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\right)$
  $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}} \leftarrow \textsc{PtFixeVec}(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{x0}, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax})$
**Fin Fonction**

**Méthode de point fixe vectorielle**

**Données :**

$\Phi$ : $\boldsymbol{\Phi} : \mathbb{K}^N \longrightarrow \mathbb{K}^N$ ,
$\boldsymbol{x0}$ : donnée initiale, $\boldsymbol{x0} \in \mathbb{K}^N$,
$\mathrm{tol}$ : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
$\mathrm{kmax}$ : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

**Résultat :**

$\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}}$ : un réel tel que $\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}}) - \boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}}\| \leqslant \mathrm{tol}$

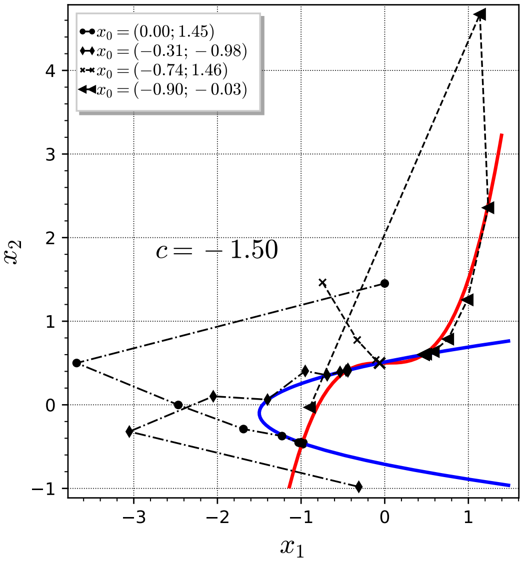
**Fonction** $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}} \leftarrow \textsc{PtFixeVec}\ (\ \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{x0}, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}\ )$
  $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $\boldsymbol{x} \leftarrow \boldsymbol{x0}$, $\boldsymbol{fx} \leftarrow \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x0})$,
  $\mathrm{err} \leftarrow \|\boldsymbol{fx} - \boldsymbol{x}\|$
  **Tantque** $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\boldsymbol{x} \leftarrow \boldsymbol{fx}$
    $\boldsymbol{fx} \leftarrow \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$
    $\mathrm{err} \leftarrow \|\boldsymbol{fx} - \boldsymbol{x}\|$
  **Fin Tantque**
  **Si** $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors**
    $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}} \leftarrow \boldsymbol{x}$
  **Fin Si**
**Fin Fonction**

# Plan

Représentation de 4 suites de Newton avec $c = -3/2$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2 - \frac{1}{2} & = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{25}\,(10\,x_2 + 1)^2 + c - x_1 & = 0. \end{cases}$$

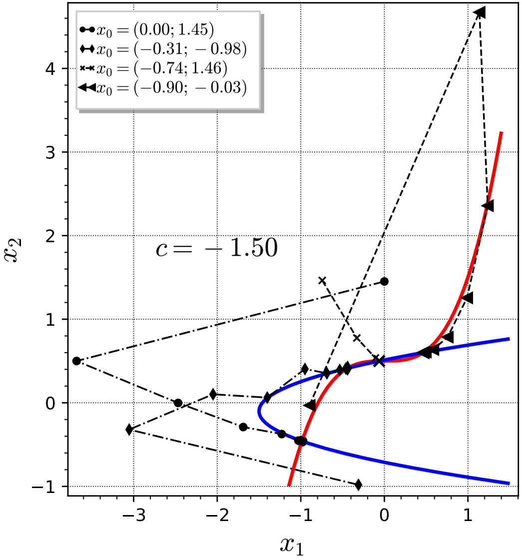
Conclusion?



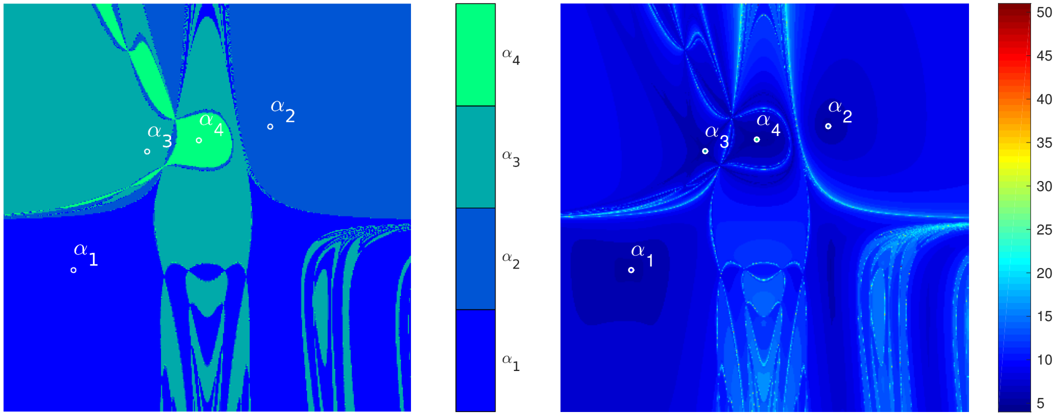
Représentation de 4 suites de Newton avec $c = -3/2$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2 - \frac{1}{2} & = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{25}\,(10\,x_2 + 1)^2 + c - x_1 & = 0. \end{cases}$$

Conclusion?




Très difficile, si l'on n'est pas suffisament proche d'un point fixe, de prédire vers lequel on converge.




(a) Bassin d'attraction des racines

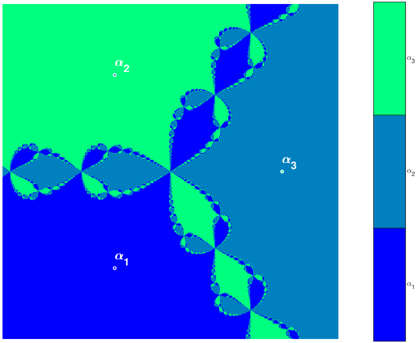
(b) Nombre d'itérations de convergence

Figure: Méthode de Newton

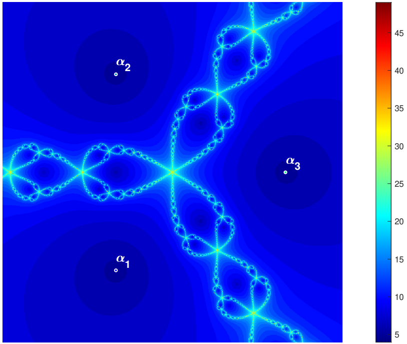
# Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton

on peut poser $z = x + \imath y$, et le système équivalent devient

$$\begin{cases} f_1(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 1 & = 0 \\ f_2(x,y) = 3x^2y - x^3 & = 0. \end{cases}$$

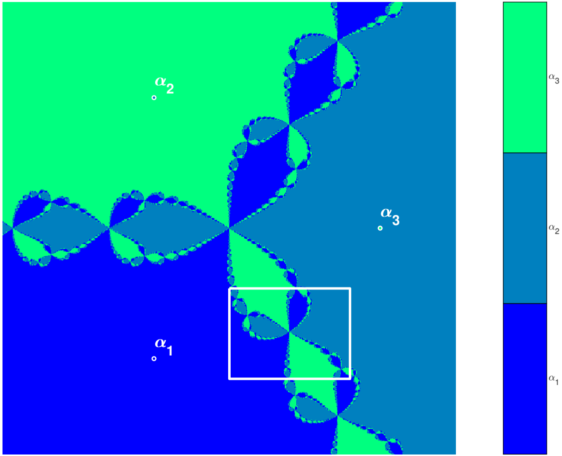



(a) Bassin d'attraction des racines



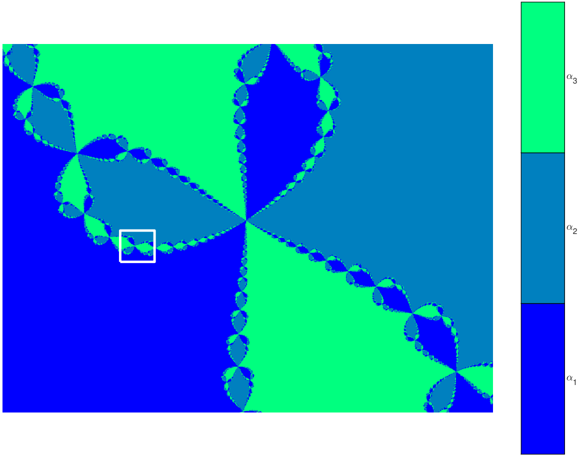

(b) Nombre d'itérations de convergence

# Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton



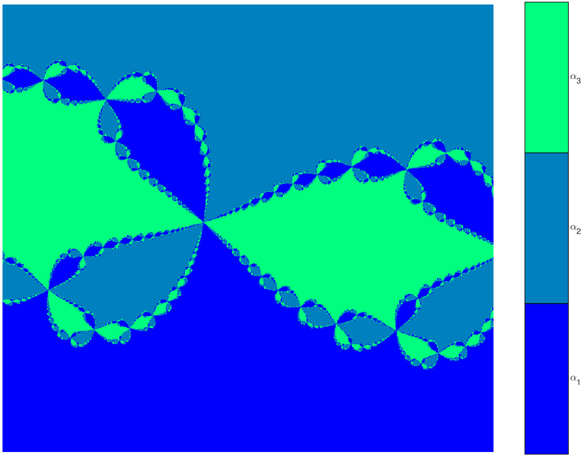

Méthode de Newton, zoom 1 sur les bassins d'attraction

# Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton



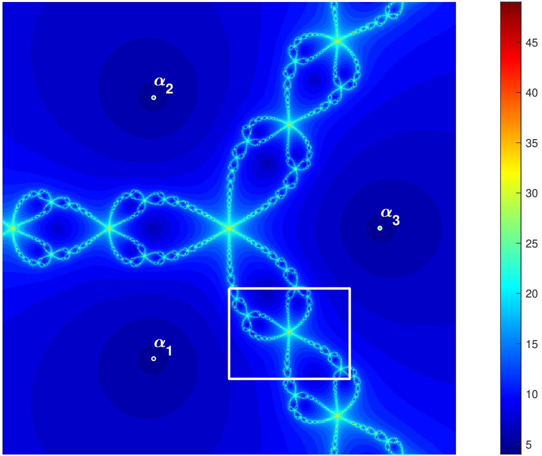

Méthode de Newton, zoom 2 sur les bassins d'attraction

# Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton



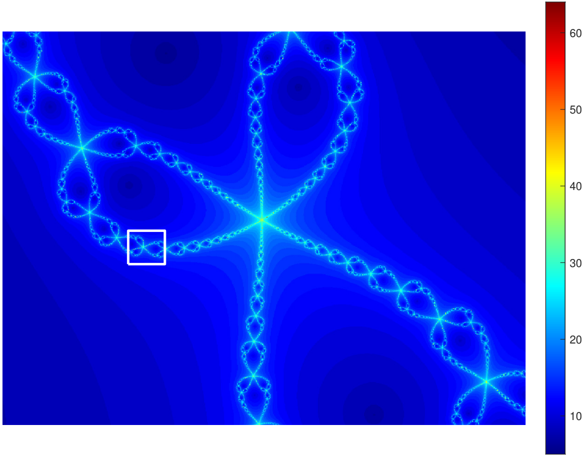

Méthode de Newton, zoom 3 sur les bassins d'attraction

# Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton



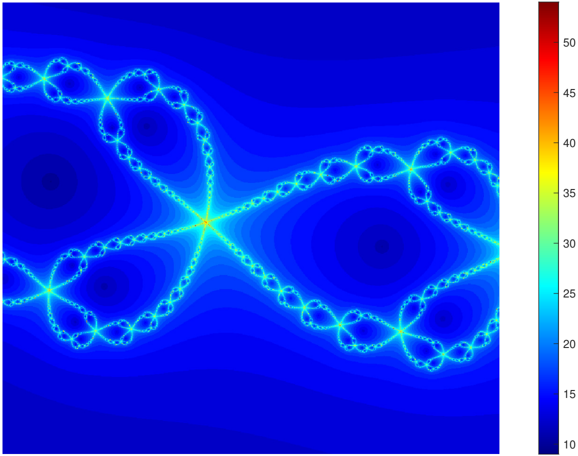

Méthode de Newton, zoom 1 sur les nombres d'itérations

# Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton



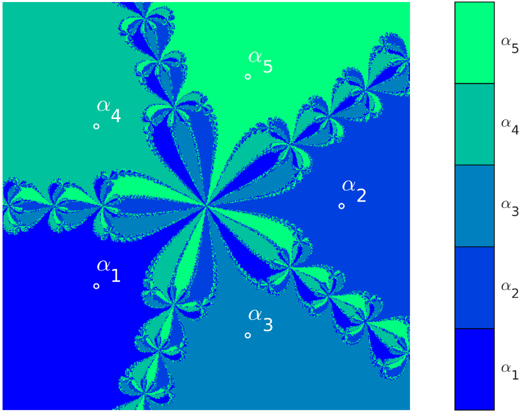

Méthode de Newton, zoom 2 sur les nombres d'itérations

# Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton

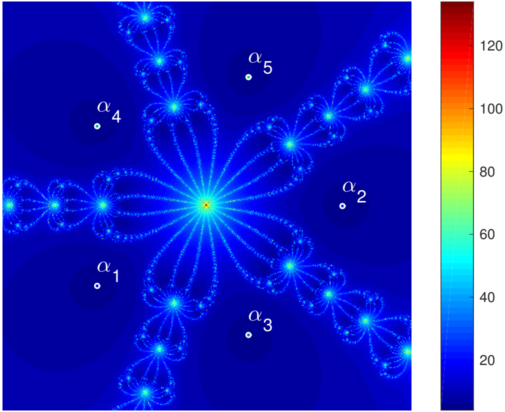



Méthode de Newton, zoom 3 sur les nombres d'itérations

# Exemple complexe : $z^5 - 1 = 0$, fractale de Newton



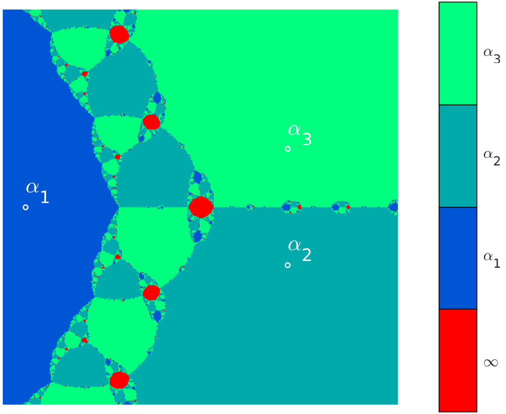

(a) Bassin d'attraction des racines



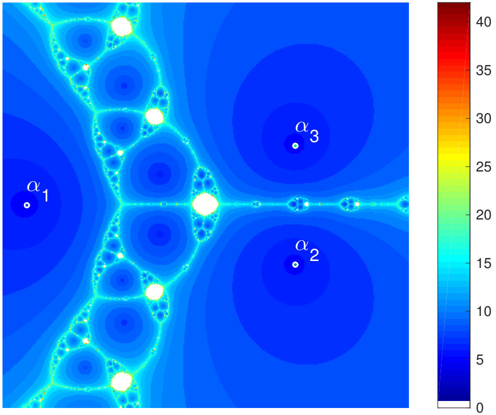

(b) Nombre d'itérations de convergence

$$[-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$$

# Exemple complexe : $z^3 - 2z + 2 = 0$, fractale de Newton




(a) Bassin d'attraction des racines. En rouge zône de divergence




(b) Nombre d'itérations de convergence. En blanc zône de divergence

$$[-2, 2] \times [-2, 2]$$