Exercice

En -1700 av. J.-C., les babyloniens ne connaissaient que les nombres rationnels (fractions) et ils utilisaient le système sexagésimal (base 60). Pour approcher la valeur $\sqrt{2}$, ils utilisaient comme approximation (voir tablette YBC 7289)

$$\alpha = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600}$$

L'erreur commise est $|\alpha - \sqrt{2}| \approx 5.994e - 7$.

Q. 1 *Comment feriez-vous pour trouver* ***à la main*** *une méthode permettant de trouver des nombres rationnels approchant* $\sqrt{2}$.

Q. 2 *Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de* $\sqrt{a}$ *où* a *est un réel positif.*

Q. 3 *Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de* $\sqrt[n]{a}$ *où* a *est un réel positif et* $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction Exercice

Q. 1 Il suffit de voir que $\sqrt{2}$ est la racine positive de $f(x) = x^2 - 2$ et d'appliquer la méthode de Newton par exemple. La suite des itérés de Newton s'écrit alors

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k} = \frac{x_k^2 + 2}{2x_k}$$

Avec $x_0 = \textbf{??}$, on obtient

k	x_k	$\lvert\sqrt{2} - x_k\rvert$
1	**??**	**??**
2	**??**	**??**
3	**??**	**??**

Avec $x_0 =$ **??**, on obtient

k	x_k	$\lvert\sqrt{2} - x_k\rvert$
1	??	??
2	??	??
3	??	??

Q. 2 Il suffit de voir que $\sqrt{a}$ est la racine positive de $f(x) = x^2 - a$ et d'appliquer la méthode de Newton par exemple. La suite des itérés de Newton s'écrit alors

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{x_k^2 + a}{2x_k}$$

Avec $a =$ **??** et $x_0 =$ **??**, on obtient

k	x_k	$\lvert\sqrt{??} - x_k\rvert$
1	??	??
2	??	??
3	??	??

Q. 3 Il suffit de voir que $\sqrt[n]{a}$ est la racine positive de $f(x) = x^n - a$ et d'appliquer la méthode de Newton par exemple. La suite des itérés de Newton s'écrit alors

$$x_{k+1} == x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^n - a}{n x_k^{n-1}} = \frac{(n-1)x_k^n - a}{n x_k^{n-1}}$$

Avec $a =$ **??**, $n =$ **??** et $x_0 =$ **??**, on obtient

k	x_k	$\lvert\sqrt[??]{??} - x_k\rvert$
1	??	??
2	??	??
3	??	??
4	??	??

◇