Exercice 1

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les sous-matrices principales d'ordre i, notées Δ_i, $i \in [\![1, n]\!]$ (voir Definition B.48, page 209) sont inversibles.
Montrer par récurrence sur l'ordre n de la matrice $\mathbb{A}$ qu'il existe une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que la matrice $\mathbb{U}$ définie par

$$\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$$

soit triangulaire supérieure avec $U_{i,i} = \det \Delta_i/(U_{1,1} \times \cdots \times U_{i-1,i-1})$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.
Correction Soit $n \geqslant 2$, on va démontrer par récurrence sur n la proposition suivante

$(\mathcal{P}_n)$**:** *Soit* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Si toutes les sous-matrices principales d'ordre* i *de* $\mathbb{A}$, *notées* Δ_i, $i \in [\![1, n]\!]$ *sont inversibles, alors il existe une matrice* $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, *triangulaire inférieure à diagonale unité telle que la matrice* $\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$ *soit triangulaire supérieure avec* $U_{i,i} = \det \Delta_i/(U_{1,1} \times \cdots \times U_{i-1,i-1})$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.

Initialisation: $n = 2$ Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Si $\Delta_1 = A_{1,1} \neq 0$ et $\Delta_2 = \mathbb{A}$ inversible. On va construire une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que $\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$ soit triangulaire supérieure.

$$\mathbb{E}\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ E_{2,1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} \\ 0 & U_{2,2} \end{pmatrix} = \mathbb{U}$$

On a donc $U_{2,1} = 0 = E_{2,1}A1, 1 + A_{2,1}$. Comme par hypothèse, $A_{1,1} \neq 0$, on a $E_{2,1} = -A_{2,1}/A_{1,1}$, ce qui donne

$$\mathbb{E}\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{A_{2,1}}{A_{1,1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} - \frac{A_{2,1}}{A_{1,1}}A_{1,2} \end{pmatrix} = \mathbb{U}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} U_{1,1} &= A_{1,1} = \det(\Delta_1), \\ U_{2,2} &= A_{2,2} - \frac{A_{2,1}}{A_{1,1}}A_{1,2} = \frac{A_{2,2}A_{1,1} - A_{2,1}A_{1,2}}{A_{1,1}} = \frac{\det \mathbb{A}}{U_{1,1}} = \frac{\det \Delta_2}{U_{1,1}}. \end{aligned}$$

Hérédité: Soit $n \geqslant 3$, on suppose que $(\mathcal{P}_{n-1})$ est vérifiée. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. dont toutes les sous-matrices principales d'ordre i de $\mathbb{A}$, notées Δ_i, $i \in [\![1, n]\!]$ sont inversibles. On décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme bloc

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{A}_{n-1} & \boldsymbol{g} \\ \hdashline \boldsymbol{f}^* & A_{n,n} \end{array}\right)$$

avec $\mathbb{A}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$, $\boldsymbol{f} \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $\boldsymbol{g} \in \mathbb{C}^{n-1}$. Comme les $n-1$ premières sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ sont les $n-1$ sous-matrices principales de $\mathbb{A}_{n-1}$, ces dernières sont, par hypothèse, inversibles. Par hypothèse de récurrence sur $\mathbb{A}_{n-1}$, il existe une matrice $\mathbb{E}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que la matrice $\mathbb{U}_{n-1} = \mathbb{E}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1}$ soit triangulaire supérieure.

On va construire (si possible) une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que $\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$ soit triangulaire supérieure. La matrice $\mathbb{E}$ s'écrit sous forme bloc

$$\mathbb{E} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{X}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hdashline \boldsymbol{h}^* & 1 \end{array}\right)$$

avec $\mathbb{X}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité et $\boldsymbol{h} \in \mathbb{C}^{n-1}$.

On a alors

$$\mathbb{E}\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{X}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hdashline \boldsymbol{h}^* & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{A}_{n-1} & \boldsymbol{g} \\ \hdashline \boldsymbol{f}^* & A_{n,n} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{X}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1} & \mathbb{X}_{n-1}\boldsymbol{g} \\ \hdashline \boldsymbol{h}^*\mathbb{A}_{n-1} + \boldsymbol{f}^* & \boldsymbol{h}^*\boldsymbol{g} + A_{n,n} \end{array}\right)$$

Pour que la matrice $\mathbb{E}\mathbb{A}$ soit triangulaire supérieure, il faut que $\mathbb{X}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1}$ soit triangulaire supérieure et $\boldsymbol{h}^*\mathbb{A}_{n-1} + \boldsymbol{f}^* = 0$. En choisissant $\mathbb{X}_{n-1} = \mathbb{E}_{n-1}$, on a $\mathbb{U}_{n-1} = \mathbb{X}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1}$ triangulaire supérieure. La matrice $\mathbb{A}_{n-1}$ étant inversible, on a $\boldsymbol{h}^* = -\boldsymbol{f}^*\mathbb{A}_{n-1}^{-1}$

On obtient donc

$$\mathbb{E}\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline \boldsymbol{h}^* & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{n-1} & \boldsymbol{g} \\ \hline \boldsymbol{f}^* & A_{n,n} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U}_{n-1} & \mathbb{E}_{n-1}\boldsymbol{g} \\ \hline 0 & A_{n,n} - \boldsymbol{h}^*\boldsymbol{g} \end{array}\right) = \mathbb{U}.$$

On a donc construit une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, $\mathbb{E}$, telle que $\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$ soit triangulaire supérieure. Par construction, on a

$$U_{i,j} = (\mathbb{U}_{n-1})_{i,j},\ \forall (i,j) \in [\![1, n-1]\!]^2$$

et donc, par hypothèse de récurrence sur $\mathbb{U}_{n-1}$, on obtient

$$U_{i,i} = \det \Delta_i/(U_{1,1} \times \cdots \times U_{i-1,i-1}), \quad \forall i \in [\![1, n-1]\!].$$

De plus on a,

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{E}\mathbb{A}) &= \det(\mathbb{E})\det(\mathbb{A}) && \\ &= \det(\mathbb{A}) && \text{car } \mathbb{E} \text{ tri. inf. à diag. unité} \\ &= \det(\Delta_n). && \text{car } \Delta_n = \mathbb{A}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{U}) &= \prod_{k=1}^{n} U_{k,k} && \text{car } \mathbb{U} \text{ tri. sup.} \\ &= U_{n,n} \prod_{k=1}^{n-1} U_{k,k} \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$, on en déduit que la matrice $\mathbb{U}$ est inversible (car $\mathbb{E}$ et $\mathbb{A}$ le sont), que ses coefficients sont non nuls et, en prenant le déterminant:

$$\det(\Delta_n) = U_{n,n} \prod_{k=1}^{n-1} U_{k,k}$$

et donc

$$U_{n,n} = \frac{\det(\Delta_n)}{\prod_{k=1}^{n-1} U_{k,k}}.$$

La proposition $(\mathcal{P}_n)$ est donc vraie.

Conclusion: On a démontré par récurrence que la proposition $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

$\diamond$