

# Exercices associés au cours d'Analyse Numérique I

## Jeux de Rolle

### EXERCICE 1

On rappelle le théorème de Rolle:

**Théorème** (Rolle). Soient  $a, b$  deux réels,  $a < b$ , et,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que

- $f$  est continue sur  $[a, b]$ ,
- $f$  est dérivable sur  $]a, b[$ ,
- $f(a) = f(b)$ .

Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $n$  un entier,  $n \geq 2$ .

**Q. 1** Soient  $g \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$  et  $p$  un entier,  $p \geq 1$ . On suppose que  $g$  admet au moins  $(p + 1)$  zéros distincts dans  $I$ , notés  $(x_i)_{i=0}^p$ , et ordonnés  $x_0 < x_1 < \dots < x_p$ .  
Montrer que  $g'$  admet au moins  $p$  zéros distincts dans  $I$ , séparant strictement les  $(p + 1)$  zéros de  $g$ .  $\square$

**Q. 2** Soient  $u \in \mathcal{C}^n(I; \mathbb{R})$ ,  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $q$  un entier,  $q \geq 1$ . On suppose que  $u^{(k)}$ , dérivée  $k^{\text{ième}}$  de  $u$ , admet au moins  $(q + 1)$  zéros distincts dans  $I$ , notés  $(t_i)_{i=0}^q$ , et ordonnés  $t_0 < t_1 < \dots < t_q$ .  
Montrer que  $u^{(k+1)}$  admet au moins  $q$  zéros distincts dans  $I$ , séparant strictement les  $(q + 1)$  zéros de  $u^{(k)}$ .  $\square$

**Q. 3** Soit  $f \in \mathcal{C}^n(I; \mathbb{R})$ . On suppose que  $f$  admet au moins  $(n + 1)$  zéros distincts dans  $I$ , notés  $(z_i)_{i=0}^n$ .

- Montrer que  $f^{(n)}$  admet au moins un zéro dans  $I$ .
  - Peut-on abaisser la régularité de la fonction  $f$ ?
- $\square$

### Correction

**R. 1** On peut appliquer le théorème de Rolle sur chacun des intervalles d'extrémités deux zéros consécutifs de  $g$ . En effet, soit  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . On a  $[x_{k-1}, x_k] \subset I$  et

- $g$  est continue sur  $[x_{k-1}, x_k]$ ,
- $g$  est dérivable sur  $]x_{k-1}, x_k[$ ,
- $g(x_{k-1}) = g(x_k) (= 0)$ .

D'après le théorème de Rolle, il existe alors  $\xi_k \in ]x_{k-1}, x_k[$  tel que  $g'(\xi_k) = 0$ .

On a donc

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad g'(\xi_k) = 0$$

et

$$x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \dots < x_{p-1} < \xi_p < x_p.$$

Ceci démontre que  $g'$  admet au moins  $p$  zéros distincts dans  $I$ , séparant strictement les  $(p + 1)$  zéros de  $g$ .

**R. 2** Comme  $u \in \mathcal{C}^n(I; \mathbb{R})$  et  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on obtient

$$u^{(k)} \in \mathcal{C}^{n-k}(I; \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}).$$

On peut donc appliquer le résultat de la question précédente avec  $g = u^{(k)}$  et  $p = q$ . On conclut donc que  $g' = u^{(k+1)}$  admet au moins  $q$  zéros distincts dans  $I$ , séparant strictement les  $(q + 1)$  zéros de  $g = u^{(k)}$ .

**R. 3** a. On note  $(x_i)_{i=0}^n$  les  $(z_i)_{i=0}^n$  ordonnés par ordre croissant. On a donc  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  et ce sont  $(n + 1)$  zéros distincts de  $f$ . Comme  $f \in \mathcal{C}^n(I; \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$ , on peut utiliser le résultat de **Q.1** avec  $g = f$  et  $p = n$ , pour obtenir que  $f^{(1)}$  admet  $n$  zéros distincts sur  $I$  (que l'on peut toujours ordonner au besoin).

Comme  $f \in \mathcal{C}^n(I; \mathbb{R})$  et  $n \geq 2$ , on a  $f^{(1)} \in \mathcal{C}^{n-1}(I; \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$ . On peut utiliser le résultat de **Q.2** avec  $u = f$ ,  $k = 1$  et  $q = n$ , pour obtenir que  $f^{(2)}$  admet  $(n - 1)$  zéros distincts sur  $I$  (que l'on peut toujours ordonner au besoin).

Grâce à la régularité de  $f$ , on peut itérer le processus jusque la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de  $f$  par application du résultat de **Q.2**.

$$\begin{aligned} f^{(1)} \in \mathcal{C}^{n-1}(I; \mathbb{R}), \quad n \text{ zéros distincts} &\implies \text{Q.2 avec } u = f, \quad k = 1, \quad q = n : \\ &f^{(2)} \in \mathcal{C}^{n-2}(I; \mathbb{R}), \quad (n - 1) \text{ zéros distincts} \\ &\implies \text{Q.2 avec } u = f, \quad k = 2, \quad q = n - 1 : \\ &f^{(3)} \in \mathcal{C}^{n-3}(I; \mathbb{R}), \quad (n - 2) \text{ zéros distincts} \\ &\dots \\ &\implies \text{Q.2 avec } u = f, \quad k = n - 2, \quad q = 3 : \\ &f^{(n-1)} \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}), \quad 2 \text{ zéros distincts} \\ &\implies \text{Q.2 avec } u = f, \quad k = n - 1, \quad q = 2 : \\ &f^{(n)} \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R}), \quad 1 \text{ zéro.} \end{aligned}$$

b. En fait, dans **Q.1**, il n'est pas nécessaire d'avoir  $g \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$  pour appliquer le théorème de Rolle, il suffit d'avoir  $g \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$  et  $g$  dérivable sur  $I$ .

De même, on déduit que pour **Q.2**, il n'est pas nécessaire d'avoir  $u \in \mathcal{C}^n(I; \mathbb{R})$ , il suffit d'avoir  $u \in \mathcal{C}^{n-1}(I; \mathbb{R})$  et  $u^{(n-1)}$  dérivable sur  $I$ .

On peut donc abaisser la régularité de  $f$  à  $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I; \mathbb{R})$  et  $f^{(n-1)}$  dérivable sur  $I$ .

◇