

Exercices associés au cours d'Analyse Numérique I

Jeux de Rolle

EXERCICE 1

On rappelle le théorème de Rolle:

Théorème (Rolle). Soient a, b deux réels, $a < b$, et, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que

- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$,
- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et n un entier, $n \geq 2$.

Q. 1 Soient $g \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$ et p un entier, $p \geq 1$. On suppose que g admet au moins $(p + 1)$ zéros distincts dans I , notés $(x_i)_{i=0}^p$, et ordonnés $x_0 < x_1 < \dots < x_p$.
Montrer que g' admet au moins p zéros distincts dans I , séparant strictement les $(p + 1)$ zéros de g . \square

Q. 2 Soient $u \in \mathcal{C}^n(I; \mathbb{R})$, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et q un entier, $q \geq 1$. On suppose que $u^{(k)}$, dérivée $k^{\text{ième}}$ de u , admet au moins $(q + 1)$ zéros distincts dans I , notés $(t_i)_{i=0}^q$, et ordonnés $t_0 < t_1 < \dots < t_q$.
Montrer que $u^{(k+1)}$ admet au moins q zéros distincts dans I , séparant strictement les $(q + 1)$ zéros de $u^{(k)}$. \square

Q. 3 Soit $f \in \mathcal{C}^n(I; \mathbb{R})$. On suppose que f admet au moins $(n + 1)$ zéros distincts dans I , notés $(z_i)_{i=0}^n$.

- Montrer que $f^{(n)}$ admet au moins un zéro dans I .
 - Peut-on abaisser la régularité de la fonction f ?
- \square

Correction

R. 1 On peut appliquer le théorème de Rolle sur chacun des intervalles d'extrémités deux zéros consécutifs de g . En effet, soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On a $[x_{k-1}, x_k] \subset I$ et

- g est continue sur $[x_{k-1}, x_k]$,
- g est dérivable sur $]x_{k-1}, x_k[$,
- $g(x_{k-1}) = g(x_k) (= 0)$.

D'après le théorème de Rolle, il existe alors $\xi_k \in]x_{k-1}, x_k[$ tel que $g'(\xi_k) = 0$.

On a donc

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad g'(\xi_k) = 0$$

et

$$x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \dots < x_{p-1} < \xi_p < x_p.$$

Ceci démontre que g' admet au moins p zéros distincts dans I , séparant strictement les $(p + 1)$ zéros de g .

R. 2 Comme $u \in \mathcal{C}^n(I; \mathbb{R})$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on obtient

$$u^{(k)} \in \mathcal{C}^{n-k}(I; \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}).$$

On peut donc appliquer le résultat de la question précédente avec $g = u^{(k)}$ et $p = q$. On conclut donc que $g' = u^{(k+1)}$ admet au moins q zéros distincts dans I , séparant strictement les $(q + 1)$ zéros de $g = u^{(k)}$.

R. 3 a. On note $(x_i)_{i=0}^n$ les $(z_i)_{i=0}^n$ ordonnés par ordre croissant. On a donc $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ et ce sont $(n + 1)$ zéros distincts de f . Comme $f \in \mathcal{C}^n(I; \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$, on peut utiliser le résultat de **Q.1** avec $g = f$ et $p = n$, pour obtenir que $f^{(1)}$ admet n zéros distincts sur I (que l'on peut toujours ordonner au besoin).

Comme $f \in \mathcal{C}^n(I; \mathbb{R})$ et $n \geq 2$, on a $f^{(1)} \in \mathcal{C}^{n-1}(I; \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$. On peut utiliser le résultat de **Q.2** avec $u = f$, $k = 1$ et $q = n$, pour obtenir que $f^{(2)}$ admet $(n - 1)$ zéros distincts sur I (que l'on peut toujours ordonner au besoin).

Grâce à la régularité de f , on peut itérer le processus jusque la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f par application du résultat de **Q.2**.

$$\begin{aligned} f^{(1)} \in \mathcal{C}^{n-1}(I; \mathbb{R}), \quad n \text{ zéros distincts} &\implies \text{Q.2 avec } u = f, \quad k = 1, \quad q = n : \\ &f^{(2)} \in \mathcal{C}^{n-2}(I; \mathbb{R}), \quad (n - 1) \text{ zéros distincts} \\ &\implies \text{Q.2 avec } u = f, \quad k = 2, \quad q = n - 1 : \\ &f^{(3)} \in \mathcal{C}^{n-3}(I; \mathbb{R}), \quad (n - 2) \text{ zéros distincts} \\ &\dots \\ &\implies \text{Q.2 avec } u = f, \quad k = n - 2, \quad q = 3 : \\ &f^{(n-1)} \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}), \quad 2 \text{ zéros distincts} \\ &\implies \text{Q.2 avec } u = f, \quad k = n - 1, \quad q = 2 : \\ &f^{(n)} \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R}), \quad 1 \text{ zéro.} \end{aligned}$$

b. En fait, dans **Q.1**, il n'est pas nécessaire d'avoir $g \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$ pour appliquer le théorème de Rolle, il suffit d'avoir $g \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$ et g dérivable sur I .

De même, on déduit que pour **Q.2**, il n'est pas nécessaire d'avoir $u \in \mathcal{C}^n(I; \mathbb{R})$, il suffit d'avoir $u \in \mathcal{C}^{n-1}(I; \mathbb{R})$ et $u^{(n-1)}$ dérivable sur I .

On peut donc abaisser la régularité de f à $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I; \mathbb{R})$ et $f^{(n-1)}$ dérivable sur I .

◇