Exercices de révision

Exercice 1

Definition: uniquement pour l'exercice !

On dit que $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une **factorisation** $\mathbb{W}\mathbb{U}$ si il existe $\mathbb{W} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **triangulaire inférieure inversible** et $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **triangulaire supérieure à diagonale unité** telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{W}\mathbb{U}.$$

On note $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$, $\mathbb{W} = (w_{i,j})_{i,j=1}^n$ et $\mathbb{U} = (u_{i,j})_{i,j=1}^n$ les composantes de ces matrices.

Q. 1 *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$.*

a. Rappeler la définition des sous-matrices principales de $\mathbb{A}$.

b. Démontrer que toutes les sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ sont inversibles.

c. Démontrer que la factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$ est unique.

d. Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$ donné. Expliquer comment résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ à l'aide de la factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$.

□

Q. 2 *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$. Expliquer de manière détaillée une méthodologie pour calculer les coefficients des matrices $\mathbb{W}$ et $\mathbb{U}$. On explicitera les formules utilisées.* □

Q. 3 *[Algo.] Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$.*

a. Ecrire la fonction ResTriSup *retournant $\boldsymbol{x}$, solution de $\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ où $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice triangulaire supérieure inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$.*

b. Ecrire la fonction algorithmique FactWU *retournant les matrices $\mathbb{W}$ et $\mathbb{U}$.*

c. On suppose la fonction ResTriInf *retournant $\boldsymbol{x}$, solution de $\mathbb{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ avec $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure inversible, déjà écrite. Ecrire la fonction algorithmique* ResWU *retournant $\boldsymbol{x}$, solution de $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en utilisant sa factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$.*

□

Q. 4 *Nous allons démontrer par récurrence sur l'ordre $n \geqslant 2$ des matrices que si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice dont toutes les sous-matrices principales sont inversibles, alors elle admet une factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$.*

a. Ecrire proprement la proposition $(\mathcal{P}_n)$ à démontrer par récurrence.

*b. **Initialisation :** montrer que $(\mathcal{P}_2)$ est vraie.*

*c. **Hérédité :** en supposant que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie montrer que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vérifiée (on pourra utiliser une décomposition bloc)*

d. Conclure

□

Q. 5 *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$. Montrer que toutes les sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ sont inversibles.* □

Q. 6 *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne définie positive.*

a. Rappeler la définition d'une matrice hermitienne définie positive.

b. Démontrer que $\mathbb{A}$ est inversible.

c. Montrer que toutes les sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ sont hermitiennes définies positives.

d. En déduire que $\mathbb{A}$ *admet une unique factorisation* $\mathbb{W}\mathbb{U}$.

$\square$