Exercices associés au cours d'*Analyse Numérique I*
Chapitre 5 : *Intégration*
Ajouts du 02/12/2023

Exercice 1

Soient f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ une formule de quadrature élémentaire

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \tag{1}$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels.

Q. 1 *Démontrer que l'application* $f \longmapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ *définie de* $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, *muni de la norme infini, à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *est linéaire et continue.* ▫

Soit $k \in \mathbb{N}$.

Q. 2 *Montrer que si* $\mathcal{Q}_n$ *est de degré d'exactitude* k *au moins alors*

$$\forall r \in [\![0, k]\!], \quad (b - a) \sum_{i=0}^{n} w_i x_i^r = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r + 1}. \tag{2}$$

▫

Q. 3 *Montrer que si* (2) *est vérifiée alors* $\mathcal{Q}_n$ *est de degré d'exactitude* k *au moins.* ▫

Q. 4 *En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les* $(w_i)_{i=0}^n$ *pour que* $\mathcal{Q}_n$ *soit de degré d'exactitude* 0 *au moins.* ▫

Correction

R. 1 On commence par démontrer la linéarité. Soient f et g dans $\in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, et λ et μ deux réels. Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, et on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_n(\lambda f + \mu g, a, b) &= (b - a) \sum_{j=0}^{n} w_j (\lambda f + \mu g)(x_j) \\
&= (b - a) \sum_{j=0}^{n} w_j \big(\lambda f(x_j) + \mu g(x_j)\big) \\
&= \lambda (b - a) \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) + \mu (b - a) \sum_{j=0}^{n} w_j g(x_j) \\
&= \lambda \mathcal{Q}_n(f, a, b) + \mu \mathcal{Q}_n(g, a, b).
\end{aligned}$$

L'application $f \longmapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est donc linéaire. Pour démontrer qu'elle est continue, il suffit alors de démontrer que

$$\exists C > 0, \quad \text{tel que } |\mathcal{Q}_n(f, a, b)| \leqslant C \|f\|_\infty, \ \forall f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}).$$

Or, on a, pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{Q}_n(f,a,b)| &= |(b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j)| \\
&\leqslant (b-a)\sum_{j=0}^{n} |w_j||f(x_j)| \\
&\leqslant C\,\|f\|_\infty\,, \quad \text{avec} \quad C = (b-a)\sum_{j=0}^{n}|w_j| \text{ indépendant de } \ f.
\end{aligned}$$

R. 2 si $\mathcal{Q}_n$ est de degré d'exactitude k au moins alors on a par définition

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx = \mathcal{Q}_n(\mathrm{P},a,b),\ \forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_k[X]$$

et donc

$$\int_a^b x^r dx = \mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r, a, b),\ \forall r \in [\![0,k]\!].$$

De plus on a

$$\int_a^b x^r dx = \left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right]_a^b = \frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}. \tag{3}$$

et

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r) = (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i x_i^r$$

ce qui donne le résultat voulu.

R. 3 Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_k[X]$. Il existe une unique décomposition dans la base des monômes $\{1, X, \ldots, X^k\}$ qui s'écrit

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j x^j, \quad \text{avec } a_j \in \mathbb{R},\ \forall j \in [\![0,k]\!].$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_n(\mathrm{P}) &= (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i \mathrm{P}(x_i) \\
&= (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i \sum_{r=0}^{k} a_r x_i^r \\
&= (b-a)\sum_{r=0}^{k} a_r \sum_{i=0}^{n} w_i x_i^r \\
&= \sum_{r=0}^{k} a_r \mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r)
\end{aligned}$$

Or par hypothèse on a (2), en utilisant (3), on obtient alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_n(\mathrm{P}) &= \sum_{r=0}^{k} a_r \int_a^b x^r dx \\
&= \int_a^b \sum_{r=0}^{k} a_r x^r dx \\
&= \int_a^b \mathrm{P}(x)dx.
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{Q}_n$ est de degré d'exactitude k au moins.

R. 4 De ce qui précède, on a $\mathcal{Q}_n$ est de degré d'exactitude k au moins si et seulement si (2) est vérifiée. On obtient donc avec $k = 0$ que $\mathcal{Q}_n$ est de degré d'exactitude $k = 0$ au moins si et seulement si

$$(b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i x_i^0 = (b-a) \iff \sum_{i=0}^{n} w_i = 1.$$

$\diamond$

Exercice 2

Soient f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs réelles et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \tag{4}$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a,b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels vérifiant

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad w_i = w_{n-i}. \tag{5}$$

Q. 1 *a. Donner explicitement un exemple de points $(x_i)_{i=0}^n$ vérifiant (5) (n restant quelconque).*

b. Etablir que

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\quad x_i - \frac{a+b}{2} = -\left(x_{n-i} - \frac{a+b}{2}\right).$$

c. Si n est impair, montrer que $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $x_i \neq \dfrac{a+b}{2}$.

d. Si n est pair, montrer qu'il existe un unique $i \in [\![0,n]\!]$ tel que $x_i = \dfrac{a+b}{2}$.

$\square$

Q. 2 *Démontrer que l'application $f \longmapsto \mathcal{Q}_n(f,a,b)$ définie de $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$, muni de la norme infini, à valeurs dans $\mathbb{R}$ est linéaire et continue.* $\square$

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et P un polynôme de degré $2m+1$ s'écrivant sous la forme

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{j=0}^{2m+1} a_j x^j$$

avec $(a_j)_{j=0}^{2m+1}$ des réels et $a_{2m+1} \neq 0$.

Q. 3 *a. Calculer les dérivées $\mathrm{P}^{(2m+1)}$ et $\mathrm{P}^{(2m+2)}$.*

b. Montrer que

$$\mathrm{P}(x) = C\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} + \mathrm{R}(x) \tag{6}$$

en déterminant le degré maximum de R et en exprimant C en fonction des $(a_j)_{j=0}^{2m+1}$.

$\square$

Q. 4 *Montrer que*

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2k+1} dx = 0. \tag{7}$$

$\square$

Q. 5 *On suppose que la formule de quadrature élémentaire* (4) *est exacte pour les polynômes de* $\mathbb{R}_{2m}[X]$.

a. *Déduire de* (6) *et* (7) *que la formule de quadrature élémentaire* (4) *est exacte pour* P *si et seulement si*

$$(b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} = 0. \tag{8}$$

b. *En utilisant **Q. 1**, démontrer que* (7) *est toujours vérifiée.*

□

Q. 6 *Ecrire de manière très précise le résultat démontré.* □

Correction

R. 1 a. Soit $(x_i)_{i=0}^{n}$ la discrétisation régulière de l'intervalle $[a,b]$,

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad \forall i \in [\![0,n]\!],\ x_i = a + ih.$$

Dans ce cas, tous les points sont distincts deux à deux et on a pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $n-i \in [\![0,n]\!]$ et

$$\frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a + ih + a + (n-i)h}{2}.$$

Or $a + nh = b$, ce qui donne

$$\frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

b. De (5), on déduit

$$(5) \quad \Leftrightarrow \quad x_i + x_{n-i} = a+b \quad \Leftrightarrow \quad x_i - \frac{a+b}{2} = -\left(x_{n-i} - \frac{a+b}{2}\right)$$

c. Si $n = 2k-1$, (n impair), on a alors un nombre **pair** de points. Par l'absurde supposons $\exists i \in [\![0,n]\!]$ tel que $x_i = \dfrac{a+b}{2}$. Dans ce cas, on a $x_{n-i} = \dfrac{a+b}{2} = x_i$. Comme les points $(x_j)_{j=0}^{n}$ sont distincts deux à deux, pour avoir une contradiction, il suffit de monter que $i \neq n-i$. En effet, on a

$$[\![0,n]\!] = [\![0,2k-1]\!] = [\![0,k-1]\!] \cup [\![k,2k-1]\!].$$

- si $i \in [\![0,k-1]\!]$ alors

$$0 \leqslant i \leqslant k-1 \ \Leftrightarrow\ n-(k-1) \leqslant n-i \leqslant n \ \Leftrightarrow\ k \leqslant n-i \leqslant n,$$

  et donc $n-i \neq i$
- si $i \in [\![k,2k-1]\!]$ alors

$$k \leqslant i \leqslant 2k-1 \ \Leftrightarrow\ n-(2k-1) \leqslant n-i \leqslant n-k \ \Leftrightarrow\ 0 \leqslant n-i \leqslant k-1,$$

  et donc $n-i \neq i$.

d. Si $n = 2k$, (n pair), on a alors un nombre **impair** de points. Comme $n-k = k$, on obtient à partir de (5)

$$\frac{x_k + x_{n-k}}{2} = \frac{a+b}{2}$$

c'est à dire

$$x_k = \frac{a+b}{2}.$$

Comme les points sont distincts deux à deux, on obtient l'unicité.

R. 2 On commence par démontrer la linéarité. Soient f et g dans $\mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$, et λ et μ deux réels. Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$, et on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_n(\lambda f + \mu g, a, b) &= (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j(\lambda f + \mu g)(x_j) \\
&= (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j\big(\lambda f(x_j) + \mu g(x_j)\big) \\
&= \lambda(b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) + \mu(b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j g(x_j) \\
&= \lambda\mathcal{Q}_n(f,a,b) + \mu\mathcal{Q}_n(g,a,b).
\end{aligned}$$

L'application $f \longmapsto \mathcal{Q}_n(f,a,b)$ est donc linéaire. Pour démontrer qu'elle est continue, il suffit alors de démontrer que

$$\exists C > 0, \quad \text{tel que } |\mathcal{Q}_n(f,a,b)| \leqslant C\,\|f\|_\infty\,, \ \ \forall f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}).$$

Or, on a, pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{Q}_n(f,a,b)| &= |(b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j)| \\
&\leqslant (b-a)\sum_{j=0}^{n} |w_j||f(x_j)| \\
&\leqslant C\,\|f\|_\infty\,, \quad \text{avec} \ \ C = (b-a)\sum_{j=0}^{n}|w_j| \ \text{indépendant de} \ \ f.
\end{aligned}$$

R. 3 a. On a $\mathrm{P}(x) = a_{2m+1}x^{2m+1} + \sum_{j=0}^{2m} a_j x^j$ et comme la dérivée $(2m+1)$ d'un polynôme de degré $2m$ est nulle, on obtient

$$\mathrm{P}^{(2m+1)}(x) = a_{2m+1}\frac{d^{2m+1}x^{2m+1}}{dx^{2m+1}} = a_{2m+1}(2m+1)!$$

et

$$\mathrm{P}^{(2m+2)}(x) = 0.$$

b. C'est la division euclidienne du polynôme P de degré $(2m+1)$ par le polynôme $x \mapsto \big(x - \frac{a+b}{2}\big)^{2m+1}$ de degré $(2m+1)$. On a donc C constante et $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_{2m}[X]$. Pour calculer C, on dérive $(2m+1)$ fois (6), ce qui donne

$$\mathrm{P}^{(2m+1)}(x) = C(2m+1)!.$$

En identifiant, avec la sous-question précédente, on obtient $C = a_{2m+1}$.

R. 4 En effectuant le changement de variable $t \mapsto \frac{a+b}{2} + t\frac{b-a}{2}$ on obtient

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} t^{2m+1}dt = 0.$$

On peut aussi utiliser directement la primitive de $\big(x - \frac{a+b}{2}\big)^{2m+1}$ qui est $\dfrac{1}{2m+2}\big(x - \frac{a+b}{2}\big)^{2m+2}$...

R. 5 a. On a, en utilisant la linéarité de l'intégrale et (6)

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx \ = \ C\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} dx + \int_a^b \mathrm{R}(x)dx$$

En utilisant la linéarité de $\mathcal{Q}_n(\bullet, a, b)$ et (6) on obtient

$$\mathcal{Q}_n(\mathrm{P},a,b) = (b-a)C\sum_{i=0}^{n} w_i\left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} + (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i\mathrm{R}(x_i).$$

On a $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_{2m}[X]$ et, par hypothèse, la formule de quadrature est exacte pour les polyômes de les polynômes de $\mathbb{R}_{2m}[X]$ ce qui donne

$$\mathcal{Q}_n(\mathrm{R}, a, b) = (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i \mathrm{R}(x_i).$$

Or, la formule de quadrature élémentaire (4) est exacte pour P si et seulement si

$$\mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b) = \int_a^b \mathrm{P}(x)dx$$

ce qui est donc équivalent à

$$(b-a)C\sum_{i=0}^{n} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} = C\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} dx.$$

En utilisant (7) et le fait que $C = a_{2m+1} \neq 0$, on en déduit que la formule de quadrature élémentaire (4) est exacte pour P si et seulement si (8) est vérifiée.

b. • Si $n = 2k$, (n paire), on a alors un nombre **impair** de points avec nécessairement $x_k = x_{n-k} = \frac{a+b}{2}$ et

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} &= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} + 0 \times w_k + \sum_{i=k+1}^{2k} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} - \sum_{i=k+1}^{2k} w_{n-i} \left(x_{n-i} - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} - \sum_{j=0}^{k-1} w_j \left(x_j - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

• Si $n = 2k-1$, (n impaire), on alors un nombre **pair** de points (avec $x_i \neq \frac{a+b}{2}$, $\forall i \in [\![0, n]\!]$) et

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} &= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} + \sum_{i=k}^{2k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} - \sum_{i=k}^{2k-1} w_{n-i} \left(x_{n-i} - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} - \sum_{j=0}^{k-1} w_j \left(x_j - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

R. 6 Soit $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par (4) où les $(x_i)_{i=0}^{n}$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$ et les $(w_i)_{i=0}^{n}$ sont des réels vérifiant (5). Si cette formule est exacte pour les polynômes de degré $2m$ alors elle est nécessairement exacte pour les polynômes de degré $2m+1$.

$\diamond$

Exercice 3

Soient a, b deux réels, $a < b$ et $\mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$ l'espace des fonctions définie de $[a; b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient $f \in \mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \tag{9}$$

où les $(x_i)_{i=0}^{n}$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$ et les $(w_i)_{i=0}^{n}$ sont des réels.

Q. 1 *Démontrer que l'application $f \longmapsto \mathcal{Q}_n(f,a,b)$ définie de $\mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est linéaire.*

□

On note, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$,

$$L_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

et $t_i = (x_i - a)/(b-a)$. On rappelle que le polynôme d'interpolation de Lagrange associés aux points $(x_i, f(x_i))_{i\in[\![0,n]\!]}$ s'écrit

$$\mathcal{L}_n(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

et que si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$ alors on a

$$\forall x \in [a,b],\ \exists \xi_x \in [a,b],\quad f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) \tag{10}$$

Q. 2 *Montrer que*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b L_i(x)dx = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j}dt. \tag{11}$$

□

Q. 3 *a. Montrer que si $\mathcal{Q}_n$ a pour degré d'exactitude n au moins alors, on a*

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\quad w_i = \frac{1}{b-a}\int_a^b L_i(x)dx. \tag{12}$$

b. Montrer que si (16) *est vérifiée, alors $\mathcal{Q}_n$ a pour degré d'exactitude n au moins.*

□

Q. 4 *On suppose les poids $(w_i)_{i=0}^n$ donnés par* (16)*. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$ alors on a*

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \mathcal{Q}_n(f,a,b)\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty \int_a^b \left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right| dx \tag{13}$$

□

Correction

R. 1 Soient f et g dans $\mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$, et λ et μ deux réels. Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$, et on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_n(\lambda f + \mu g, a, b) &= (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j(\lambda f + \mu g)(x_j)\\
&= (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j\big(\lambda f(x_j) + \mu g(x_j)\big)\\
&= \lambda(b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) + \mu(b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j g(x_j)\\
&= \lambda\mathcal{Q}_n(f,a,b) + \mu\mathcal{Q}_n(g,a,b).
\end{aligned}$$

L'application $f \longmapsto \mathcal{Q}_n(f,a,b)$ est donc linéaire.

R. 2 Par le changement de variables $s : t \longrightarrow a + (b-a)t$ on obtient

$$\int_a^b L_i(x)dx = \int_{s^{-1}(a)}^{s^{-1}(b)} L_i \circ s(t) s'(t) dt = (b-a) \int_0^1 L_i \circ s(t) dt$$

et l'on a $x_i = s(t_i) = a + (b-a)t_i$ où $t_i = (x_i - a)/(b-a)$. On en déduit

$$\begin{aligned}
\int_0^1 L_i \circ s(t) dt &= \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{s(t) - s(t_j)}{s(t_i) - s(t_j)} dt = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{(b-a)(t-t_j)}{(b-a)(t_i - t_j)} dt \\
&= \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t - t_j}{t_i - t_j} dt
\end{aligned}$$

et on obtient bien (15).

R. 3 a. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. On a $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$. Par hypothèse, la formule de quadrature a pour degré d'exactitude n au moins et donc on a

$$\mathcal{Q}_n(L_i, a, b) \overset{\text{hyp}}{=} \int_a^b L_i(x) dx.$$

Or comme $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $\forall j \in [\![0, n]\!]$, on a

$$\mathcal{Q}_n(L_i, a, b) = (b-a) \sum_{j=0}^{n} w_j L_i(x_j) = (b-a) w_i.$$

Ce qui donne

$$w_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_i(x) dx.$$

b. Par hypothèse, les poids $(w_i)_{i=0}^n$ étant donnés par (15), La formule de quadrature s'écrit

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \overset{\text{hyp}}{=} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b L_i(x) dx.$$

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[X]$. Par unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange, on a $\mathrm{P} = \mathcal{L}_n(P)$ et

$$\begin{aligned}
\int_a^b \mathrm{P}(x) dx &= \int_a^b \mathcal{L}_n(P)(x) dx \\
&= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} L_i(x) \mathrm{P}(x_i) dx \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(x_i) \int_a^b L_i(x) dx \\
&= (b-a) \sum_{i=0}^{n} w_i \mathrm{P}(x_i) = \mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b).
\end{aligned}$$

La formule de quadrature est donc exacte pour tout les polynômes de degré n au moins.

R. 4 Comme $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$, on déduit de (10) que pour tout $x \in [a; b]$, il existe $\xi_x \in [a, b]$ tel que

$$\begin{aligned}
|f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \pi_n(x) \right| \\
&\leqslant \frac{\left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty}{(n+1)!} |\pi_n(x)|
\end{aligned}$$

L'application $f - \mathcal{L}_n(f)$ étant continue sur $[a;b]$, elle est alors intégrable sur $[a,b]$, et l'application $|f - \mathcal{L}_n(f)|$ l'est aussi. De même $|\pi_n(x)|$ est intégrable sur $[a,b]$. On obtient alors

$$\int_a^b |f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x)|dx \leqslant \frac{\left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty}{(n+1)!} \int_a^b |\pi_n(x)|dx.$$

De plus

$$\left| \int_a^b f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x)dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x)|dx$$

ce qui donne

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \mathcal{L}_n(f)(x)dx \right| \leqslant \frac{\left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty}{(n+1)!} \int_a^b |\prod_{i=0}^n (x - x_i)|dx.$$

La formule de quadrature est de degré d'exactitude n au moins et le polynôme d'interpolation de Lagrange $\mathcal{L}_n(f)$ est de degré n donc on a

$$\begin{aligned}
\int_a^b \mathcal{L}_n(f)(x)dx &= \mathcal{Q}_n(\mathcal{L}_n(f), a, b) \\
&= (b-a) \sum_{i=0}^n w_i \mathcal{L}_n(f)(x_i) \\
&= (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \text{ car } \mathcal{L}_n(f)(x_i) = f(x_i) \\
&= \mathcal{Q}_n(f, a, b)
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)dx - \mathcal{Q}_n(f,a,b) \right| &= \left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \mathcal{L}_n(f)(x)dx \right| \\
&\leqslant \frac{\left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty}{(n+1)!} \int_a^b |\prod_{i=0}^n (x - x_i)|dx.
\end{aligned}$$

◇

Exercice 4

Soient a, b deux réels, $a < b$ et $\mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$ l'espace des fonctions définie de $[a;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient $f \in \mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \tag{14}$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a,b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels.
On suppose que (14) a pour degré d'exactitude n au moins.

Q. 1 *Démontrer que l'application* $f \longmapsto \mathcal{Q}_n(f,a,b)$ *définie de* $\mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *est linéaire.*

□

Soient π_n le polynôme de degré $(n+1)$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

et $m \in \mathbb{N}^*$.

rappel division euclidienne : Soient A et B deux polynômes, B étant non nul, alors il existe un unique couple de polynômes (Q,R) tel que

$$\mathrm{A}=\mathrm{BQ}+\mathrm{R} \quad \text{et} \quad \deg(\mathrm{R})<\deg(\mathrm{B}).$$

Dans la division euclidienne de A par B, Q est le quotient et R le reste.

Q. 2 a. *Soit* $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_{n+m}[X]$. *Déterminer les degrés maximaux des polynômes* Q *(quotient) et* R *(reste), obtenus par la division euclidienne de* P *par* π_n*, et satisfaisant*

$$\mathrm{P}=\pi_n\mathrm{Q}+\mathrm{R}.$$

b. *En déduire que*

$$\forall \mathrm{P}\in\mathbb{R}_{n+m}[X],\quad \int_a^b \mathrm{P}(x)dx-\mathcal{Q}_n(\mathrm{P},a,b)=\int_a^b \mathrm{Q}(x)\pi_n(x)dx. \tag{15}$$

où Q *est le quotient de la division euclidienne de* P *par* π_n*,*

□

Q. 3 *Démontrer que* (14) *a pour degré d'exactitude* $n+m$ *au moins si et seulement si*

$$\forall \mathrm{H}\in\mathbb{R}_{m-1}[X],\quad \int_a^b \pi_n(x)\mathrm{H}(x)dx=0. \tag{16}$$

□

Q. 4 *En déduire le degré maximal d'exactitude de* (14)*.* □

Q. 5 *Démontrer que* (14) *a pour degré d'exactitude* $n+m$ *au moins si et seulement si*

$$\int_a^b \pi_n(x)x^k dx=0,\ \forall k\in [\![0,m-1]\!]. \tag{17}$$

□

Correction

R. 1 Soient f et g dans $\mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$, et λ et μ deux réels. Alors $\lambda f+\mu g\in\mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$, et on a

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_n(\lambda f+\mu g,a,b)&=(b-a)\sum_{j=0}^n w_j(\lambda f+\mu g)(x_j)\\&=(b-a)\sum_{j=0}^n w_j\big(\lambda f(x_j)+\mu g(x_j)\big)\\&=\lambda(b-a)\sum_{j=0}^n w_j f(x_j)+\mu(b-a)\sum_{j=0}^n w_j g(x_j)\\&=\lambda\mathcal{Q}_n(f,a,b)+\mu\mathcal{Q}_n(g,a,b).\end{aligned}$$

L'application $f\longmapsto\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ est donc linéaire.

R. 2 a. On effectue la division euclidienne de P, $\deg(\mathrm{P})\leqslant n+m$, par π_n, $\deg(\pi_n)=n+1$. On a alors l'existence et l'unicité d'un couple (Q,R) tel que $\deg(\mathrm{R})<\deg(\pi_n)=n+1$, c'est à dire $\mathrm{R}\in\mathbb{R}_n[X]$, et

$$\mathrm{P}=\pi_n\mathrm{Q}+\mathrm{R}.$$

- Si $\deg(\mathrm{P})\leqslant n<(n+1)=\deg(\pi_n)$, $\mathrm{Q}=0$ et $\mathrm{R}=\mathrm{P}$.

- Si $\deg(\mathrm{P}) \geqslant (n+1) = \deg(\pi_n) > \deg(\mathrm{R})$, on obtient

$$\deg(\mathrm{P}) = \deg(\pi_n \mathrm{Q}) = \deg(\pi_n) + \deg(\mathrm{Q})$$

et donc $\deg(\mathrm{Q}) = \deg(\mathrm{P}) - \deg(\pi_n) \leqslant n + m - (n+1) = m - 1$, c'est à dire $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$.

En résumé, on a $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_n[X]$, et on peut noter que, dans les deux cas, $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$.

b. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n+m}[X]$. On note Q et R, respectivement quotient et reste de la division euclidienne de P par π_n. On vient de voir que $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$.
Par linéarite de l'intégrale, on a

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx = \int_a^b \mathrm{Q}(x)\pi_n(x)dx + \int_a^b \mathrm{R}(x)dx$$

et par linéarite de $\mathcal{Q}_n$

$$\mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b) = \mathcal{Q}_n(\mathrm{Q}\pi_n, a, b) + \mathcal{Q}_n(\mathrm{R}, a, b).$$

Par hypothèse, la formule de quadrature a pour degré d'exactitude n et comme $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_n[X]$ on obtient

$$\int_a^b \mathrm{R}(x)dx = \mathcal{Q}_n(\mathrm{R}, a, b).$$

On en déduit alors que

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx - \mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b) = \int_a^b \mathrm{Q}(x)\pi_n(x)dx - \mathcal{Q}_n(\mathrm{Q}\pi_n, a, b).$$

Par construction $\pi_n(x_j) = 0$, $\forall j \in [\![0, n]\!]$, ce qui donne

$$\mathcal{Q}_n(\mathrm{Q}\pi_n, a, b) = (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j \mathrm{Q}(x_j)\pi_n(x_j) = 0$$

et donc

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx - \mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b) = \int_a^b \mathrm{Q}(x)\pi_n(x)dx.$$

R. 3 $\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que (16) est vérifié.
Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n+m}[X]$. On note Q et R, respectivement quotient et reste de la division euclidienne de P par π_n. On a vu en **Q.** 2 que $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$.
Comme $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$, on obtient

$$\int_a^b \pi_n(x)\mathrm{Q}(x)dx = 0$$

ce qui donne en utilisant (15) :

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx - \mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b) = 0.$$

Comme P est quelconque dans $\mathbb{R}_{n+m}[X]$, la formule de quadrature est donc de degré d'exactitude $n + m$.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que la formule de quadrature est de degré d'exactitude $(n+m)$.
Pour tout $\mathrm{H} \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$, le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{H}\pi_n \in \mathbb{R}_{n+m}[X]$. La formule de quadrature est donc exacte pour P :

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx - \mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b) = 0.$$

Par construction, la division euclienne de P par π_n a pour quotient H et pour reste 0. En utilisant (15), on obtient alors

$$\int_a^b \mathrm{Q}(x)\pi_n(x)dx = 0.$$

R. 4 Si $\mathrm{Q} = \pi_n$, on obtient

$$\int_a^b \pi_n(x)\mathrm{Q}(x)dx = \int_a^b \mathrm{Q}^2(x)dx > 0.$$

Comme $\deg(\pi_n) = n+1$, on déduit que l'on doit avoir $\deg(\mathrm{Q}) \leqslant n$ pour que (16) soit vérifiée. On a alors

$$\deg(\mathrm{P}) = m + n = \deg(\mathrm{Q}) + \deg(\pi_n) \leqslant n + (n+1)$$

et donc $m \leqslant n+1$. Le degré maximal d'exactitude est donc $2n+1$.

R. 5 D'après la **Q. 3**, il suffit de démontrer que (16) est équivalent à (17).

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose (16) vérifiée.
Le résultat est immédiat car, $\forall k \in [\![0, m-1]\!]$, $x \mapsto x^k \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose (17) vérifiée.
Soit $\mathrm{H} \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$. Il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{H}(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k x^k.$$

On utilise la linéarite de l'intégrale pour obtenir

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathrm{H}(x)\pi_n(x)dx &= \int_a^b \pi_n(x) \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k x^k dx \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \int_a^b \pi_n(x)x^k dx \\ &\overset{(17)}{=} \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \times 0 = 0.\end{aligned}$$

◇

Exercice 5

Soient $(t_i)_{i=0}^n$, $(n+1)$ points distincts de $[-1;1]$.
On note $\mathcal{F}([-1;1];\mathbb{R})$ l'espace des fonctions définie de $[-1;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient $g \in \mathcal{F}([-1;1];\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_{-1}^1 g(t)dt$ par $\mathcal{S}_n(g)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{S}_n(g) \overset{\text{def}}{=} 2\sum_{i=0}^{n} w_i g(t_i)$$

Q. 1 *Démontrer que l'application $g \longmapsto \mathcal{S}_n(g)$ définie de $\mathcal{F}([-1;1];\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est linéaire.* ▫

On pose

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad L_i(t) \overset{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}.$$

Q. 2 *a. Montrer que si $\mathcal{S}_n$ a pour degré d'exactitude n au moins alors, on a*

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad w_i = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_i(t)dt. \tag{18}$$

b. Montrer que si (18) est vérifiée, alors $\mathcal{S}_n$ a pour degré d'exactitude n au moins.

▫

On rappele que la formule de quadrature $\mathcal{S}_n$ à $(n+1)$ points distincts, dont les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont données par (18), a pour degré d'exactitude $(n+m)$, $m \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si

$$\int_{-1}^{1} \pi_n(t)\mathrm{Q}(t)dt = 0,\ \forall \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{m-1}[X] \tag{19}$$

avec $\pi_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^{n}(t-t_i)$.
Par la suite, on suppose que les $(t_i)_{i=0}^n$ sont les $(n+1)$ racines distinctes dans $]-1;1[$ du polynôme de Legendre de degré $(n+1)$ et que les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont données par (18).

Les polynômes de Legendre peuvent être définis par la formule de récurrence de Bonnet

$$(n+1)\mathrm{P}_{n+1}(t) = (2n+1)t\mathrm{P}_n(t) - n\mathrm{P}_{n-1}(t),\ \forall n \geqslant 1 \tag{20}$$

avec $\mathrm{P}_0(t) = 1$ et $\mathrm{P}_1(t) = t$.
On a les propriétés suivantes :

prop.1 le polynôme de Legendre P_n est de degré n,

prop.2 la famille $\{\mathrm{P}_k\}_{k=0}^n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$,

prop.3 pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_m(t)\mathrm{P}_n(t)dt = \frac{2}{2n+1}\delta_{m,n}, \tag{21}$$

ce qui correspond à l'orthogonalité des polynômes de Legendre pour le produit scalaire

$$\langle \mathrm{P}_m, \mathrm{P}_n \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}_m(t)\mathrm{P}_n(t)dt.$$

prop.4 Soit $n \geqslant 1$, P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et ses n racines, notées $(t_i)_{i=0}^n$, sont simples dans $]-1,1[$, c'est à dire

$$\mathrm{P}_n(t) = C\prod_{i=0}^{n-1}(t-t_i),\ C \in \mathbb{R}^*$$

où les t_i sont 2 à 2 distincts (et ordonnés). Les $(n+1)$ racines simples de P_{n+1} sont alors chacunes dans l'un des $(n+1)$ intervalles $]-1,t_0[$, $]t_0,t_1[$, ..., $]t_{n-2},t_{n-1}[$, $]t_{n-1},1[$.

Q. 3 *a. En utilisant les polynômes de Legendre, démontrer que la formule de quadrature $\mathcal{S}_n$ est de degré d'exactitude $2n+1$.*

b. Montrer que la formule de quadrature $\mathcal{S}_n$ n'est pas de degré d'exactitude $2n+2$.

c. Démontrer que $\mathcal{S}_n$ est l'unique formule de quadrature à $(n+1)$ points distincts dans $[-1;1]$ ayant pour degré d'exactitude $2n+1$.

□

Soient a,b deux réels, $a<b$. On note $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i$, $\forall i \in [\![0,n]\!]$, où les $(t_i)_{i=0}^n$ sont les $(n+1)$ racines distinctes dans $]-1;1[$ du polynôme de Legendre de degré $(n+1)$.
Soient $f \in \mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$, espace des fonctions définies de $[a;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$., et $n \in \mathbb{N}$.
On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i^\star f(x_i)$$

On pose

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\quad L_i^\star(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

Q. 4 a. *Montrer que la formule de quadrature $\mathcal{Q}_n$ est de degré d'exactitude n au moins si et seulement si*

$$w_i^\star = \frac{1}{b-a}\int_a^b L_i^\star(x)dx, \quad \forall i \in [\![0,n]\!]. \tag{22}$$

b. *En déduire que la formule de quadrature $\mathcal{Q}_n$ est de degré d'exactitude n au moins si et seulement si*

$$w_i^\star = w_i, \quad \forall i \in [\![0,n]\!].$$

où les w_i sont donnée par (18).

□

On suppose que $w_i^\star = w_i$, $\forall i \in [\![0,n]\!]$.

Q. 5 *Montrer que $\mathcal{Q}_n$ est l'unique formule de quadrature élémentaire à $(n+1)$ points distincts dans $[a,b]$ ayant pour degré d'exactitude $(2n+1)$ précisément.* □

Correction

R. 1 Soient f et g dans $\mathcal{F}([-1;1];\mathbb{R})$ (espace vectoriel), et λ et μ deux réels. Alors $\lambda f+\mu g \in \mathcal{F}([-1;1];\mathbb{R})$, et on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_n(\lambda f+\mu g) &= 2\sum_{j=0}^n w_j(\lambda f+\mu g)(x_j)\\
&= 2\sum_{j=0}^n w_j\big(\lambda f(x_j)+\mu g(x_j)\big)\\
&= \lambda 2\sum_{j=0}^n w_j f(x_j) + \mu 2\sum_{j=0}^n w_j g(x_j)\\
&= \lambda\mathcal{S}_n(f)+\mu\mathcal{S}_n(g).
\end{aligned}$$

L'application $\mathcal{S}_n$ est donc linéaire.

R. 2 a. Soit $i \in [\![0,n]\!]$. On a $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$. Par hypothèse, la formule de quadrature a pour degré d'exactitude n au moins et donc on a

$$\mathcal{S}_n(L_i) \overset{\text{hyp}}{=} \int_{-1}^1 L_i(t)dt.$$

Comme $L_i(t_j) = \delta_{i,j}$, $\forall j \in [\![0,n]\!]$, on en déduit

$$\mathcal{S}_n(L_i) = 2\sum_{j=0}^n w_j L_i(t_j) = 2w_i.$$

Ce qui donne

$$w_i = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 L_i(t)d.$$

b. Par hypothèse, les poids $(w_i)_{i=0}^n$ étant donnés par (18), La formule de quadrature s'écrit

$$\mathcal{S}_n(g) \overset{\text{hyp}}{=} \sum_{i=0}^n g(t_i)\int_{-1}^1 L_i(t)dt.$$

On note $\mathcal{L}_n(P)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de $\mathbb{R}_n[X]$ passant par les points $(t_i, g(t_i))_{i=0}^n$ donné par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}_n(P)(t) = \sum_{i=0}^n g(t_i)L_i(t).$$

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[X]$. Par unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange, on a $\mathrm{P} = \mathcal{L}_n(P)$ et

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)dt &= \int_{-1}^{1} \mathcal{L}_n(P)(t)dt \\
&= \int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{n} L_i(t)\mathrm{P}(t_i)dt \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(t_i) \int_{-1}^{1} L_i(t)dt \\
&= 2\sum_{i=0}^{n} w_i \mathrm{P}(t_i) = \mathcal{S}_n(\mathrm{P}).
\end{aligned}$$

La formule de quadrature est donc exacte pour tous les polynômes de degré n au moins.

R. 3 a. Par hypothèse, les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont données par (18), $\mathcal{S}_n$ a pour degré d'exactiude $2n+1$ si et seulement si on a (19) avec $m = n+1$.
D'après les propriétés des polynômes de Legendre P_n, on a $\mathrm{P}_{n+1}(t) = C\pi_n(t)$ avec $C \in \mathbb{R}^*$.
On en déduit que (19) avec $m = n+1$ est équivalent à

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_{n+1}(t)\mathrm{Q}(t)dt = 0, \ \forall \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[X].$$

Or, la famille des les polynômes de Legendre $\{\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et comme les polynômes de Legendre sont orthogonaux, la relation précedente est vérifiée.

b. Supposons qu'il existe une autre formule de quadrature élémentaire à $(n+1)$ points distincts dans $[-1,1]$

$$\tilde{\mathcal{S}}_n(g) \stackrel{\text{def}}{=} 2\sum_{i=0}^{n} \tilde{w}_i g(\tilde{t}_i)$$

ayant pour degré d'exactitude $(2n+1)$ précisement. D'après la **Q. 2**, on a donc

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad \tilde{w}_i = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{L}_i(t)dt, \quad \text{où } \tilde{L}_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j}.$$

Notons $\tilde{\pi}_n(t) = \prod_{i=0}^n (t-\tilde{t}_i)$. Comme $\mathcal{S}_n$ et $\tilde{\mathcal{S}}_n$ ont pour degré d'exactitude $(2n+1)$ précisement, on déduit de (19) avec $m = n+1$, que

$$\int_{-1}^{1} \pi_n(t)\mathrm{Q}(t)dt = \int_{-1}^{1} \tilde{\pi}_n(t)\mathrm{Q}(t)dt = 0, \ \forall \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[X]$$

Le polynôme $\mathrm{R} = \pi_n - \tilde{\pi}_n$ est dans $\mathbb{R}_n[X]$ car les polynômes π_n et $\tilde{\pi}_n$ de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ sont unitaires. On a alors

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{R}(t)\mathrm{Q}(t)dt = 0, \ \forall \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[X]$$

En choisissant $\mathrm{Q} = \mathrm{R}$, on obtient

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{R}^2(t)dt = 0$$

ce qui entraine $\mathrm{R} = 0$ et donc les points $(\tilde{t}_i)_{i=0}^n$ et $(t_i)_{i=0}^n$ sont identiques à une permutation des indices près, c'est à dire

$$\tilde{t}_{\sigma(i)} = t_i, \ \forall i \in [\![0,n]\!].$$

On a alors $\tilde{w}_{\sigma(i)} = w_i, \ \forall i \in [\![0,n]\!]$ et

$$\tilde{\mathcal{S}}_n(g) \stackrel{\text{def}}{=} 2\sum_{i=0}^{n} \tilde{w}_i g(\tilde{t}_i) = 2\sum_{i=0}^{n} \tilde{w}_{\sigma(i)} g(\tilde{t}_{\sigma(i)} = 2\sum_{i=0}^{n} w_i g(t_i) = \mathcal{S}_n(g).$$

R. 4 a. Démontrons l'équivalence

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $i \in [\![0,n]\!]$. On a $L_i^\star \in \mathbb{R}_n[X]$. Par hypothèse, la formule de quadrature a pour degré d'exactitude n au moins et donc on a

$$\mathcal{Q}_n(L_i^\star, a, b) \overset{\text{hyp}}{=} \int_a^b L_i^\star(x)dx.$$

Or comme $L_i^\star(x_j) = \delta_{i,j}$, $\forall j \in [\![0,n]\!]$, on a

$$\mathcal{Q}_n(L_i^\star, a, b) = (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j^\star L_i^\star(x_j) = (b-a)w_i^\star.$$

Ce qui donne

$$w_i^\star = \frac{1}{b-a}\int_a^b L_i^\star(x)dx.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Par hypothèse, les poids $(w_i^\star)_{i=0}^n$ étant donnés par (22), La formule de quadrature s'écrit

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \overset{\text{hyp}}{=} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b L_i^\star(x)dx.$$

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[X]$. Par unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange, on a $\mathrm{P} = \mathcal{L}_n(P)$ et

$$\begin{aligned}
\int_a^b \mathrm{P}(x)dx &= \int_a^b \mathcal{L}_n(P)(x)dx \\
&= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} L_i^\star(x)\mathrm{P}(x_i)dx \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(x_i)\int_a^b L_i^\star(x)dx \\
&= (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i^\star \mathrm{P}(x_i) = \mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b).
\end{aligned}$$

La formule de quadrature est donc exacte pour tout les polynômes de degré n au moins.

b. Il suffit pour celà de démontrer que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b L_i^\star(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_i(t)dt. \qquad (R_1)$$

On utilise le changement de variable

$$x = \varphi(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

ce qui correspond bien à $x_i = \varphi(t_i)$, $\forall i \in [\![0,n]\!]$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_a^b L_i^\star(x)dx &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} L_i^\star \circ \varphi(t)\varphi'(t)dt \\
&= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} L_i^\star \circ \varphi(t)dt.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
L_i^\star \circ \varphi(t) &= \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{\varphi(t) - x_j}{x_i - x_j} \\
&= \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_j)}{\varphi(t_i) - \varphi(t_j)} \\
&= \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) - \left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_j\right)}{\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i\right) - \left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_j\right)} \\
&= \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t - t_j}{t_i - t_j} = L_i(t).
\end{aligned}$$

ce qui donne (R_1).

R. 5 Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$. Avec le changement de variable $x = \varphi(t) = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}t$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathrm{P}(x)dx &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \mathrm{P} \circ \varphi(t)\varphi'(t)dt \\ &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} \mathrm{P} \circ \varphi(t)dt. \qquad (R_2)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b) &= (b-a) \sum_{i=0}^{n} w_i^\star \mathrm{P}(x_i) \\ &= (b-a) \sum_{i=0}^{n} w_i \mathrm{P}(\varphi(t)_i) \\ &= \frac{b-a}{2} \mathcal{S}_n(\mathrm{P} \circ \varphi) \qquad (R_3)\end{aligned}$$

Comme $\varphi \in \mathbb{R}_1[X]$, on a $\mathrm{P} \circ \varphi \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$.[1] La formule de quadrature $\mathcal{S}_n$ étant de degré d'exactitue $2n+1$, on a alors

$$\mathcal{S}_n(\mathrm{P} \circ \varphi) = \int_{-1}^{1} \mathrm{P} \circ \varphi(t)dt.$$

On en déduit en utilisant (R_2)

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx = \frac{b-a}{2} \mathcal{S}_n(\mathrm{P} \circ \varphi)$$

puis en utilisant (R_3)

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx = \mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b).$$

La formule de quadrature élémentaire $\mathcal{Q}_n$ est donc de degré d'exactitude $2n+1$.
Par l'absurde on peut démontrer que $\mathcal{Q}_n$ n'est pas de degré d'exactitude $2n+2$ car sinon $\mathcal{S}_n$ serait aussi de degré d'exactitude $2n+2$.
Par l'absurde on peut démontrer que $\mathcal{Q}_n$ est unique car sinon $\mathcal{S}_n$ ne serait pas unique.

◇

1. Rappel : Soient $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_p[X]$ et $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_q[X]$, alors $\mathrm{P} \circ \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{pq}[X]$.