Exercices associés au cours d'*Analyse Numérique I*
Chapitre 5: *Intégration*

Exercice 1

Soient $(x_i)_{i=0}^n$ $(n+1)$ points donnés et distincts 2 à 2 d'un intervalle $[a,b]$ $(a<b)$. Ecrire une fonction algorithmique WeightsFromPoints permettant de déterminer les poids $(w_i)_{i=0}^n$ de telle sorte que la formule de quadrature élémentaire associée soit de degré d'exactitude n au moins en s'inspirant de résultats obtenus dans la démonstration de la Proposition 5.7. On pourra utiliser la fonction algorithmique $\boldsymbol{x} \leftarrow$ Solve$(\mathbb{A}, \boldsymbol{b})$ permettant de résoudre le système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Correction Nous avons vu, dans la Proposition 5.7, que pour avoir une formule de quadrature élémentaire de degré d'exactitude n, il est nécessaire et suffisant que les $(n+1)$ poids $(w_i)_{i=0}^n$ soient solution du système linéaire suivant:

$$(b-a)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ \frac{b^2-a^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}$$

Algorithme 1 Fonction WeightsFromPoints retournant le tableau des poids $\boldsymbol{w}$ associé à un tableau de points $\boldsymbol{x}$ donnés (points 2 à 2 distincts) appartenant à un intervalle $[a,b]$.

Données : $\boldsymbol{x}$: tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$ contenant $(n+1)$ points distincts deux à deux dans un intervalle $[a,b]$ avec la convention $\boldsymbol{x}(i) = x_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$
$a,\ b$: deux réels, $a<b$.
Résultat : $\boldsymbol{w}$: vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ avec $\boldsymbol{w}(i) = w_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$

Fonction $\boldsymbol{w} \leftarrow$ WeightsFromPoints ($\boldsymbol{x}, a, b$)
  $\boldsymbol{b} \leftarrow \boldsymbol{O}_{n+1}$
  $\mathbb{A} \leftarrow \mathbb{O}_{n+1,n+1}$
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** $n+1$ **faire**
    Pour $j \leftarrow 1$ **à** $n+1$ **faire**
      $\mathbb{A}(i,j) \leftarrow \boldsymbol{x}(j)\hat{}(i-1)$
    Fin Pour
    $\boldsymbol{b}(i) \leftarrow (b\hat{}i - a\hat{}i)/(i*(b-a))$
  Fin Pour
  $\boldsymbol{w} \leftarrow$ Solve$(\mathbb{A}, \boldsymbol{b})$
Fin Fonction

◇

Exercice 2

Soient $(x_i)_{i=0}^n$ des points distincts 2 à 2 de l'intervalle $[a,b]$ vérifiant

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

On note $\mathrm{L}_i \in \mathbb{R}_n[X]$, $i \in [\![0,n]\!]$ les $(n+1)$ polynômes de base de Lagrange définis par

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

et vérifiant $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2$

Q. 1 *Soit* $i \in [\![0,n]\!]$. *Montrer que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{L}_i((a+b)-x) = \mathrm{L}_{n-i}(x).$$

□

Q. 2 *Soient* $(w_i)_{i=0}^n$ *définis par*

$$w_i = \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{L}_i(t)dt, \quad \forall i \in [\![0,n]\!]$$

Montrer que l'on a alors

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad w_i = w_{n-i}$$

□

Correction

R. 1 Soit $i \in [\![0,n]\!]$. On note $\varphi(x) = (a+b)-x$ le polynôme de degré 1 et $\mathrm{P} = \mathrm{L}_i \circ \varphi$ le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ (la composé de 2 polynômes est de degré le produit des degrés des 2 polynômes).
On a

$$\forall j \in [\![0,n]\!], \quad x_{n-j} = (a+b) - x_j$$

et

$$\mathrm{P}(x_j) = \mathrm{L}_i((a+b)-x_j) = \mathrm{L}_i(x_{n-j}) = \delta_{i,n-j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = n-j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = n-i \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} = \delta_{n-i,j}.$$

C'est à dire

$$\forall j \in [\![0,n]\!],\ \mathrm{P}(x_j) = \delta_{n-i,j}.$$

Or L_{n-i} est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant la relation précédente dont $\mathrm{P} = \mathrm{L}_{n-i}$ (voir Exercice 4.1.1, page 136).

R. 2 Soit $i \in [\![0,n]\!]$. On note $t = \varphi(x) = (a+b)-x$ le changement de variable affine. On a alors $\varphi^{-1}(t) = (a+b)-t$ et

$$\begin{aligned} w_i &= \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{L}_i(t)dt \\ &= \frac{1}{b-a}\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \mathrm{L}_i \circ \varphi(x)\varphi'(x)dt \\ &= \frac{1}{b-a}\int_b^a \mathrm{L}_i((a+b)-x)(-1)dx \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{L}_i((a+b)-x)dx \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{L}_{n-i}(x)dx \ \text{ d'après la question précédente} \\ &= w_{n-i}. \end{aligned}$$

Exercice 3

Q. 1 *Ecrire une fonction algorithmique* WeightsPointsNC *retournant les* $(n+1)$ *points et les* $(n+1)$ *poids de la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes à* $(n+1)$ *points.* □

Q. 2 *Ecrire une fonction algorithmique* QuadElemNC *retournant la valeur de* $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ *correpondant à la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes à* $(n+1)$ *points.* □

Correction

Algorithme 2 Fonction WeightsPointsNC retournant le tableau de points $\boldsymbol{x}$ donnés correspondant à la discrétisation régulière intervalle $[a,b]$. et le tableau des poids $\boldsymbol{w}$ associé à un

Données : $a,\ b$: deux réels, $a<b$,
n : $n \in \mathbb{N}^*$.
Résultat : $\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ avec $\boldsymbol{x}(i)=x_{i-1},\ \forall i \in [\![1,n+1]\!]$ et $x_{i-1}=a+(i-1)h,\ h=(b-a)/n$,
$\boldsymbol{w}$: vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ avec $\boldsymbol{w}(i)=w_{i-1},\ \forall i \in [\![1,n+1]\!]$

R. 1

Fonction $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}] \leftarrow$ WeightsPointsNC (a,b,n)
  $\boldsymbol{x} \leftarrow a:(b-a)/n:b$
  $\boldsymbol{w} \leftarrow$ WeightsFromPoints$(\boldsymbol{x},a,b)$
Fin Fonction

R. 2 On a de manière générique l'algorithme suivant:

Algorithme 3 Fonction QuadElemGen retourne la valeur de $I=(b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j)$.

Données : f : une fonction définie de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$,
a,b : deux réels avec $a<b$
$\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ contenant $(n+1)$ points distincts deux à deux dans un intervalle $[a,b]$ avec la convention $\boldsymbol{x}(i)=x_{i-1},\ \forall i \in [\![1,n+1]\!]$
$\boldsymbol{w}$: vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\boldsymbol{w}(i)=w_{i-1},\ \forall i \in [\![1,n+1]\!]$
Résultat : I : un réel

Fonction $I \leftarrow$ QuadElemGen $(f,a,b,\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})$
  $I \leftarrow 0$
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** Length$(\boldsymbol{x})$ **faire**
    $I \leftarrow I + \boldsymbol{w}(i) * f(\boldsymbol{x}(i))$
  Fin Pour
  $I \leftarrow (b-a)*I$
Fin Fonction

On peut noter que si l'on dispose de la fonction $s \leftarrow$ Dot$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ correpondant au produit scalaire de deux vecteurs du même espace alors on a directement

$$I \leftarrow (b-a) * \mathrm{Dot}(\boldsymbol{w}, f(\boldsymbol{x})).$$

Algorithme 4 Fonction QuadElemGen retourne la valeur de $I = (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j)$ où les poids w_i et les points x_i sont ceux définis par la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes

Données : f : une fonction définie de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$,
a, b : deux réels avec $a < b$,
n : $n \in \mathbb{N}^*$

Résultat : I : un réel

```
1: Fonction I ← QuadElemNC ( f, a, b, n )
2:     [x, w] ← WeightsPointsNC(a, b, n)
3:     I ← QuadElemGen(f, a, b, x, w)
4: Fin Fonction
```

◇

Exercice 4

Q. 1 *Déterminer les points* t_0, t_1 *de l'intervalle* $[-1,1]$ *et les poids* w_0, w_1 *tel que la formule de quadrature*

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx 2\sum_{i=0}^{1} w_i g(t_i)$$

soit de degré d'exactitude 3. □

Q. 2 *En déduire une formule de quadrature pour le calcul de* $\int_a^b f(x)dx$ *qui soit de degré d'exactitude* 3. □

Correction

R. 1 D'après la Proposition 5.9, si t_0 et t_1 sont distincts et dans l'intervalle $[-1,1]$ alors avec

$$w_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{t-t_1}{t_0-t_1}dt \text{ et } w_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{t-t_0}{t_1-t_0}dt$$

la formule de quadrature est de degré d'exactitude 1.
Pour déterminer les points t_0 et t_1, on utilise la Proposition 5.11 (degré maximal d'exactitude) avec $m = n+1 = 2$: la formule de quadrature est de degré $2n+1 = 3$ ssi

$$\int_{-1}^{1} \pi_1(t)Q(t)dt = 0, \forall Q \in \mathbb{R}_1[X]$$

avec $\pi_1(t) = (t-t_0)(t-t_1)$. Par linéarité ceci est équivalent à

$$\int_{-1}^{1} \pi_1(t)t^k dt = 0, \forall k \in [\![0,1]\!]$$

c'est à dire

$$\int_{-1}^{1} \pi_1(t)dt = 0 \text{ et } \int_{-1}^{1} \pi_1(t)tdt = 0.$$

Or on a

$$\int_{-1}^{1} \pi_1(t)dt = \int_{-1}^{1} t^2 - (t_0+t_1)t + t_0t_1 dt = \frac{2}{3} + 2t_0t_1$$

et

$$\int_{-1}^{1} \pi_1(t)tdt = \int_{-1}^{1} t^3 - (t_0 + t_1)t^2 + t_0t_1tdt = -\frac{2}{3}(t_0 + t_1).$$

On est amené à résoudre le système non linéaire

$$t_0t_1 = -\frac{1}{3} \text{ et } -\frac{2}{3}(t_0 + t_1) = 0$$

ce qui donne $t_0 = -\sqrt(3)/3$ et $t_1 = \sqrt(3)/3$.
Il reste à calculer w_0 et w_1. On a

$$w_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{t - \sqrt(3)/3}{-2\sqrt(3)/3}dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{-\sqrt(3)/3}{-2\sqrt(3)/3}dt = 1/2$$

et

$$w_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{t + \sqrt(3)/3}{2\sqrt(3)/3}dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt(3)/3}{2\sqrt(3)/3}dt = 1/2.$$

La formule de quadrature

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx g(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + g(\frac{\sqrt{3}}{3})$$

est donc d'ordre 3.

R. 2 On effectue le changement de variable $x = \varphi(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$ en appliquant la Proposition 5.3 (changement de variable affine) pour obtenir que

$$(b-a)\left(\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_1)\right)$$

est une formule de quadrature approchant $\int_a^b f(x)dx$ avec un degré d'exactitude de 3 où $x_0 = \varphi(t_0)$ et $x_1 = \varphi(t_1)$.

◇

Exercice 5

L'objectif de cet exercice est de calculer les points et les poids de la formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n+1)$ points. La formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n+1)$ points sur $[-1, 1]$ est donnée par

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx 2\sum_{i=0}^{n} w_i g(t_i)$$

où les $(t_i)_{i=0}^n$ sont les $n+1$ racines du polynôme de Legendre $\mathrm{P}_{n+1}(t)$. Cette formule à pour degré d'exactitude $2n+1$.
Soient $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)dt$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et $\|\mathrm{P}\| = \langle \mathrm{P}, \mathrm{P}\rangle^{1/2}$ la norme associée.
Soit M_n le polynôme de Legendre normalisé de degré $(n+1)$, $\mathrm{M}_n = \frac{\mathrm{P}_n}{\|\mathrm{P}_n\|}$. On utilisera les résultats sur les polynômes de Legendre rappelés en cours.

Q. 1 *Montrer que*

$$c_{n+1}\mathrm{M}_{n+1}(t) = t\mathrm{M}_n(t) - c_n\mathrm{M}_{n-1}(t), \quad n > 1 \tag{1}$$

avec

$$\mathrm{M}_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}},\ \mathrm{M}_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t \text{ et } c_n = \sqrt{\frac{n^2}{4n^2-1}}$$

□

On définit le vecteur $\boldsymbol{M}(t)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ par

$$\boldsymbol{M}(t) = (\mathrm{M}_0(t), \ldots, \mathrm{M}_n(t))^t.$$

Q. 2 *Montrer que l'on a*

$$t\boldsymbol{M}(t) = \mathbb{A}\boldsymbol{M}(t) + c_{n+1}\mathrm{M}_{n+1}(t)\boldsymbol{e}_{n+1} \tag{2}$$

où l'on explictera la matrice tridiagonale $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ en fonction des coefficients $c_1, \ldots, c_n$. Le vecteur $\boldsymbol{e}_{n+1}$ étant le $(n+1)$-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. □

Q. 3 *En déduire que les $(n+1)$ racines distinctes de $\mathrm{M}_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ sont les $(n+1)$ valeurs propres de $\mathbb{A}$.* □

Q. 4 *Montrer que*

$$2\sum_{k=0}^{n} w_k \mathrm{M}_i(t_k)\mathrm{M}_j(t_k) = \delta_{i,j}, \ \forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2 \tag{3}$$

où $\delta_{i,j} = 0$, si $i \neq j$ et $\delta_{i,i} = 1$. □

On note $\mathbb{W} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice diagonale, de diagonale $(w_0, \ldots, w_n)$ et $\mathbb{P} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice définie par $\mathbb{P}_{i+1,j+1} = \mathrm{M}_j(t_i)$, $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2$.

Q. 5 *a. Montrer que $2\mathbb{P}^t\mathbb{W}\mathbb{P} = \mathbb{I}$.*

b. En déduire que $\mathbb{W}^{-1} = 2\mathbb{P}\mathbb{P}^t$.

c. En déduire que $\frac{1}{w_i} = 2\sum_{k=0}^{n} (\mathrm{M}_k(t_i))^2$, $\forall i \in [\![0,n]\!]$.

□

On suppose que l'on dispose de la fonction **algorithmique** $\textsc{eig}(\mathbb{A})$ retournant l'ensemble des valeurs propres d'une matrice symétrique $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dans l'ordre croissant sous la forme d'un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Q. 6 *a. Ecrire la fonction $[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{w}] \leftarrow \textsc{GaussLegendre}(n)$ retournant le tableau des points $\boldsymbol{t}$ et le tableau des poids $\boldsymbol{w}$ en utilisant les résultats obtenus dans cet exercice.*

b. Ecrire la fonction $I \leftarrow \textsc{QuadElemGaussLegendre}(f, a, b, n)$ retournant une approximation de $\int_a^b f(x)dx$ en utilisant la formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n+1)$ points sur l'intervalle $[a,b]$.

□

Correction

R. 1 Par définition, on a $\mathrm{M}_n = \frac{\mathrm{P}_n}{\|\mathrm{P}_n\|}$ et

$$\|\mathrm{P}_n\|^2 = \langle \mathrm{P}_n, \mathrm{P}_n \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}_n(t)\mathrm{P}_n(t)dx = \frac{2}{2n+1}.$$

On en déduit que

$$\mathrm{M}_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\mathrm{P}_n.$$

De plus, par la formule de récurrence de Bonnet, on obtient

$$\mathrm{M}_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ et } \mathrm{M}_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t$$

ainsi que, $\forall n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}(n+1)\sqrt{\frac{2}{2n+3}}\mathrm{M}_{n+1}(t) &= (2n+1)\sqrt{\frac{2}{2n+1}}t\mathrm{M}_n(t) - n\sqrt{\frac{2}{2n-1}}\mathrm{M}_{n-1} \\ &= \sqrt{2(2n+1)}t\mathrm{M}_n(t) - n\sqrt{\frac{2}{2n-1}}\mathrm{M}_{n-1}\end{aligned}$$

En multipliant cette équation par $\sqrt{\frac{1}{2(2n+1)}}$, on a

$$(n+1)\sqrt{\frac{2}{2n+3}}\sqrt{\frac{1}{2(2n+1)}}\mathrm{M}_{n+1}(t) = t\mathrm{M}_n(t) - n\sqrt{\frac{2}{2n-1}}\sqrt{\frac{1}{2(2n+1)}}\mathrm{M}_{n-1}$$

Or on a

$$n\sqrt{\frac{2}{2n-1}}\sqrt{\frac{1}{2(2n+1)}} = \sqrt{\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}} = c_n$$

et

$$(n+1)\sqrt{\frac{2}{2n+3}}\sqrt{\frac{1}{2(2n+1)}} = \sqrt{\frac{(n+1)^2}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}} = c_{n+1}$$

ce qui démontre le résultat voulu.

R. 2 On déduit de la question précédente que

$$t\mathrm{M}_0(t) = \sqrt{\frac{1}{3}}t = c_1\mathrm{M}_1(t)$$

et

$$t\mathrm{M}_i(t) = c_i\mathrm{M}_{i-1}(t) + c_{i+1}\mathrm{M}_{i+1}(t),\ \forall i \in [\![1, n]\!].$$

Ces $(n+1)$ équations peuvent s'écrire matriciellement sous la forme

$$\begin{aligned} t\begin{pmatrix} \mathrm{M}_0(t) \\ \mathrm{M}_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathrm{M}_{n-1}(t) \\ \mathrm{M}_n(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & 0 & c_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{M}_0(t) \\ \mathrm{M}_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathrm{M}_{n-1}(t) \\ \mathrm{M}_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ c_{n+1}\mathrm{M}_{n+1}(t) \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{A}\boldsymbol{M}(t) + c_{n+1}\mathrm{M}_{n+1}(t)\boldsymbol{e}_{n+1}. \end{aligned}$$

R. 3 Le polynôme de Legendre $\mathrm{P}_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ admet $(n+1)$ racines simples distinctes dans $]-1,1[$ notées $(t_i)_{i=0}^n$. (voir rappels) Donc le polynôme de Legendre normalisé $\mathrm{M}_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ a les mêmes racines et on déduit de la question précédente que

$$\mathbb{A}\boldsymbol{M}(t_i) = t_i\boldsymbol{M}(t_i),\ \forall i \in [\![0, n]\!].$$

Comme les $(n+1)$ racines de P_{n+1} séparent strictement les n racines de P_n (voir rappels), alors $\mathrm{P}_n(t_i) \neq 0$ et donc $\mathrm{M}_n(t_i) \neq 0$. On en déduit que le vecteur $\boldsymbol{M}(t_i)$ est non nul et,

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ (t_i, \boldsymbol{M}(t_i)) \text{ est un mode propre de } \mathbb{A}.$$

On peut noter que $\mathbb{A}$ est symétrique et donc ses valeurs propres sont réelles.
Les $(n+1)$ valeurs propres de la matrice $\mathbb{A}$ sont les $(n+1)$ racines de P_{n+1}, et donc les $(n+1)$ points de la formule de quadrature de Gauss-Legendre.

R. 4 Par construction, on a

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{M}_i(t)\mathrm{M}_j(t)dx = \delta_{i,j},\ \forall (i,j) \in [\![0,n]\!].$$

On a $\mathrm{M}_i \in \mathbb{R}_i[X]$ et $\mathrm{M}_j \in \mathbb{R}_j[X]$, ce qui donne $\mathrm{M}_i\mathrm{M}_j \in \mathbb{R}_{i+j}[X]$ avec $i+j \leqslant 2n$. Or la formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n+1)$ points a pour degré d'exactitude $2n+1$, elle est donc exacte pour le polynôme $\mathrm{M}_i\mathrm{M}_j$. On en déduit alors

$$\delta_{i,j} = \int_{-1}^{1} \mathrm{M}_i(t)\mathrm{M}_j(t)dt = 2\sum_{k=0}^{n} w_k \mathrm{M}_i(t_k)\mathrm{M}_j(t_k),\ \forall (i,j) \in [\![0,n]\!]$$

R. 5 a. Soit $(i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2$, on a

$$\begin{aligned}(\mathbb{P}^{\mathsf{t}}\mathbb{W}\mathbb{P})_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n+1} (\mathbb{P}^{\mathsf{t}})_{i,k}(\mathbb{W}\mathbb{P})_{k,j}\\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}_{k,i}(\mathbb{W}\mathbb{P})_{k,j}\end{aligned}$$

et, comme $\mathbb{W}$ est diagonale,

$$(\mathbb{W}\mathbb{P})_{k,j} = \sum_{l=1}^{n+1} \mathbb{W}_{k,l}\mathbb{P}_{l,j} = \mathbb{W}_{k,k}\mathbb{P}_{k,j}.$$

On obtient donc

$$(\mathbb{P}^{\mathsf{t}}\mathbb{W}\mathbb{P})_{i,j} = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}_{k,i}\mathbb{W}_{k,k}\mathbb{P}_{k,j} = \sum_{k=1}^{n+1} w_{k-1}\mathrm{M}_{i-1}(t_{k-1})\mathrm{M}_{j-1}(t_{k-1}).$$

En utilisant la relation démontré dans la question précédente, on a

$$(\mathbb{P}^{\mathsf{t}}\mathbb{W}\mathbb{P})_{i,j} = \frac{1}{2}\delta_{i-1,j-1} = \frac{1}{2}\delta_{i,j}$$

c'est à dire

$$\mathbb{P}^{\mathsf{t}}\mathbb{W}\mathbb{P} = \frac{1}{2}\mathbb{I}$$

et on en déduit que $\mathbb{P}$ et $\mathbb{W}$ sont inversibles .

b. A partir de $\mathbb{P}^{\mathsf{t}}\mathbb{W}\mathbb{P} = \frac{1}{2}\mathbb{I}$, on déduit

$$2\mathbb{I} = \left(\mathbb{P}^{\mathsf{t}}\mathbb{W}\mathbb{P}\right)^{-1} = 2\mathbb{I} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{W}^{-1}\left(\mathbb{P}^{\mathsf{t}}\right)^{-1}$$

En multipliant par $\mathbb{P}$ à gauche et par $\mathbb{P}^{\mathsf{t}}$ à droite, on obtient

$$\mathbb{W}^{-1} = 2\mathbb{P}\mathbb{P}^{\mathsf{t}}.$$

c. Comme la matrice $\mathbb{W}$ est diagonale inversible, son inverse est diagonale et on a

$$\left(\mathbb{W}^{-1}\right)_{i,i} = \frac{1}{\mathbb{W}_{i,i}} = \frac{1}{w_{i-1}},\ \forall i \in [\![1,n+1]\!].$$

On a donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{w_{i-1}} &= 2\left(\mathbb{P}\mathbb{P}^{\mathsf{t}}\right)_{i,i}\\ &= 2\sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{P}_{i,j}\left(\mathbb{P}^{\mathsf{t}}\right)_{j,i}\\ &= 2\sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{P}_{i,j}^2\\ &= 2\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{M}_k(t_{i-1})\right)^2,\ \forall i \in [\![1,n+1]\!].\end{aligned}$$

R. 6 a. Les $(n+1)$ points $(t_i)_{i=0}^n$ de la méthode de quadrature de Gauss-Legendre sur $[-1,1]$, sont les racines du polynôme de Legendre P_{n+1} de degré $n+1$. Pour les calculer, on va utiliser le fait que ce sont les valeurs propres de la matrice symétrique $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & 0 & c_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_n & 0 \end{pmatrix}$$

avec $c_k = \sqrt{\frac{k^2}{4k^2-1}}$, $\forall k \geqslant 1$.
Pour calculer les poids $(w_i)_{i=0}^n$, on va utiliser la formule

$$\frac{1}{w_i} = 2\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{M}_k(t_i)\right)^2, \ \forall i \in [\![0,n]\!]$$

conjointement avec la formule de récurrence

$$\mathrm{M}_k(t) = \frac{1}{c_k}\big(t\mathrm{M}_{k-1}(t) - c_{k-1}\mathrm{M}_{k-2}(t)\big), \ k \geqslant 2, \ \text{avec } \mathrm{M}_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \ \mathrm{M}_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t.$$

Algorithme 5 Fonction GaussLegendre retournant le tableau des points $\boldsymbol{t}$ et le tableau des poids $\boldsymbol{w}$

Données : n : $n \in \mathbb{N}$
Résultat : $\boldsymbol{t}$: vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ avec $\boldsymbol{t}(i) = t_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$
$\boldsymbol{w}$: vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ avec $\boldsymbol{w}(i) = w_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$

```
Fonction [t, w] ← GaussLegendre ( n )
  c ← O_n
  A ← O_{n+1,n+1}
  Pour k ← 1 à n faire
    c(k) ← sqrt(k^2/(4*k^2 − 1))
    A(k, k+1) ← c(k)
    A(k+1, k) ← c(k)
  Fin Pour
  t ← eig(A)
  Pour i ← 1 à n+1 faire
    M0 ← sqrt(1/2)
    M1 ← sqrt(3/2) * t(i)
    S ← M0^2 + M1^2
    Pour k ← 2 à n faire
      M ← (1/c(k)) * (M1 * t(i) − c(k − 1) * M0)
      S ← S + M^2
      M0 ← M1
      M1 ← M
    Fin Pour
    w(i) ← 1/(2 * S)
  Fin Pour
Fin Fonction
```

---

b. On va utiliser la formule

$$I = (b-a) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

avec $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i$ où les points $(t_i)_{i=0}^n$ et les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont ceux de la méthode de quadrature de Gauss-Legendre sur $[-1,1]$.

Algorithme 6 Fonction QuadElemGaussLegendre retournant une approximation de $\int_a^b f(x)dx$ en utilisant la formule de quadrature de Gauss-Legendre à $n+1$ points sur l'intervalle $[a,b]$.

Données : f : une fonction de $[a,b]$ à valeurs réels
a, b : deux réels avec $a < b$
n : $n \in \mathbb{N}$
Résultat : I : un réel

```
Fonction I ← QuadElemGaussLegendre ( f, a, b, n )
  [t, w] ← GaussLegendre(n)
  I ← 0
  Pour i ← 1 à n + 1 faire
    I ← I + w(i) * f((a + b)/2 + (b − a)/2 * t(i))
  Fin Pour
  I ← (b − a) * I
Fin Fonction
```

◇

Exercice 6

Ecrire une fonction algorithmique QuadSimpson retournant une approximation de l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ utilisant la méthode de quadrature composée de Simpson en **minimisant** le nombre d'appels à la fonction f. On rappelle que la formule élémentaire de Simpson est donnée par

$$\mathcal{Q}_2(g, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b-a}{6}(g(a) + 4g(\frac{a+b}{2}) + g(b)).$$

Correction En notant $m_j = \frac{\alpha_{j-1}+\alpha_j}{2}$ le point milieu de l'intervalle $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx \sum_{j=1}^{k} \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x)dx &\approx \sum_{j=1}^{k} \mathcal{Q}_2(f, \alpha_{j-1}, \alpha_j) = \frac{h}{6} \sum_{j=1}^{k} (f(\alpha_{j-1}) + 4f(m_j) + f(\alpha_j)) \\ &\approx \frac{h}{6}\left(4 \sum_{j=1}^{k} f(m_j) + f(\alpha_0) + 2 \sum_{j=1}^{k-1} f(\alpha_j) + f(\alpha_k)\right) \quad (4)\end{aligned}$$

Algorithme 7 Fonction QuadSimpson retourne une approximation de l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ utilisant la méthode de quadrature composée de Simpson en **minimisant** le nombre d'appels à la fonction f.

Données : f : une fonction définie de $[alpha, beta]$ dans $\mathbb{R}$,
$alpha, beta$: deux réels avec $alpha < beta$,
k : $n \in \mathbb{N}^*$

Résultat : I : un réel

Fonction $I \leftarrow$ QuadSimpson $(f, alpha, beta, k)$
  $h \leftarrow (beta - alpha)/k$
  $\boldsymbol{x} \leftarrow alpha : h : beta$
  $\boldsymbol{m} \leftarrow alpha + h/2 : h : beta$
  $S \leftarrow 0$ ▷ Calcul de $\sum_{j=1}^{k} f(m_j)$
  Pour $j \leftarrow 1$ **à** k **faire**
    $S \leftarrow S + f(\boldsymbol{m}(j))$
  Fin Pour
  $I \leftarrow 4 * S$
  $S \leftarrow 0$ ▷ Calcul de $\sum_{j=1}^{k-1} f(\alpha_j) = \sum_{j=2}^{k} f(\boldsymbol{x}_j)$
  Pour $j \leftarrow 2$ **à** k **faire**
    $S \leftarrow S + f(\boldsymbol{x}(j))$
  Fin Pour
  $I \leftarrow (h/6) * (I + 2 * S + f(\boldsymbol{x}(1)) + f(\boldsymbol{x}(k+1)))$
Fin Fonction

◇