Exercices associés au cours d'*Analyse Numérique I*
Chapitre 4: *Interpolation*

Exercice 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $n+1$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux. On note

Q. 1 *a. Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i de degré n vérifiant*

$$L_i(x_j) = \delta_{ij},\ \forall j \in [\![0,n]\!]. \tag{1}$$

b. Montrer que les $(L_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n).

□

On défini le polynôme P_n par

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x). \tag{2}$$

Q. 2 *Montrer que polynôme P_n est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant $\mathrm{P}_n(x_i) = y_i$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$.*

□

Correction

R. 1 a. De (1), on déduit que les n points distincts x_j pour $j \in [\![0,n]\!]\backslash\{i\}$ sont les n zéros du polynôme L_i de degré n : il s'écrit donc sous la forme

$$L_i(x) = C\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(x - x_j) \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Pour déterminer la constante C, on utilise (1) avec $j = i$

$$L_i(x_i) = 1 = C\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)$$

Les points x_i sont distincts deux à deux, on a $\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(x_i - x_j) \neq 0$ et donc

$$C = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)}$$

d'où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{x - x_j}{x_i - x_j},\quad \forall i \in [\![0,n]\!]. \tag{3}$$

Il reste à démontrer l'unicité. On suppose qu'il existe L_i et U_i deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant (1). Alors $Q_i = L_i - U_i$ est polynôme de degré n (au plus) admettant $n+1$ zéros distincts, c'est donc le polynôme nul et on a nécessairement $L_i = U_i$.

b. On sait que $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$. Pour que les $\{L_i\}_{i\in[\![0,n]\!]}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ il suffit de démontrer qu'ils sont linéairement indépendants.
Soit $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ $n+1$ scalaires. Montrons pour celà que

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i L_i = 0 \implies \lambda_i = 0,\ \forall i \in [\![0,n]\!]$$

Noter que la première égalité est dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ et donc le 0 est pris au sens polynôme nul.
On a

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i L_i = 0 \iff \sum_{i=1}^{n}\lambda_i L_i(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Soit $k \in [\![0,n]\!]$. En choisissant $x = x_k$, on a par (1) $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i L_i(x_k) = \lambda_k$ et donc

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i L_i = 0 \implies \sum_{i=1}^{n}\lambda_i L_i(x_k) = 0,\ \forall k \in [\![0,n]\!] \iff \lambda_k = 0,\ \forall k \in [\![0,n]\!].$$

Les $\{L_i\}_{i\in[\![0,n]\!]}$ sont donc linéairement indépendants.

R. 2 Par construction $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et on a, $\forall j \in [\![0,n]\!]$[1],

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_n(x_j) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x_j)\\ &= \sum_{i=0}^{n} y_i \delta_{i,j} \text{ par (1)}\\ &= y_j.\end{aligned}$$

Pour demontrer l'unicité, on propose ici deux méthodes

- On note P_a et P_b deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant (1). Le polynôme $\mathrm{Q} = \mathrm{P}_a - \mathrm{P}_b$ appartient aussi à $\mathbb{R}_n[X]$ et il vérifie, $\forall i \in [\![0,n]\!]$,

$$\mathrm{Q}(x_i) = \mathrm{P}_a(x_i) - \mathrm{P}_b(x_i) = 0.$$

  Les $n+1$ points x_i étant distincts, ce sont donc $n+1$ racines distinctes du polynôme Q. Or tout polynôme de degré n admet au plus n racines disctinctes[2]. On en déduit que le seul polynôme de degré au plus n admettant $n+1$ racines distinctes est le polynôme nulle et donc $\mathrm{P}_a = \mathrm{P}_b$.

- c'est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant (2) car la décomposition dans la base $\{L_i\}_{i\in[\![0,n]\!]}$ est unique.

◇

Exercice 2

Ecrire la fonction Lagrange permettant de calculer $\mathcal{P}_n$ (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$) au point $t \in \mathbb{R}$.

Correction
But : Calculer le polynôme $\mathcal{P}_n(t)$ définit par (4.4)
Données : $\boldsymbol{X}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $X(i) = x_{i-1}$ $\forall i \in [\![1,n+1]\!]$ et $X(i) \neq X(j)$ pour $i \neq j$,
$\boldsymbol{Y}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $Y(i) = y_{i-1}$ $\forall i \in [\![1,n+1]\!]$,
t : un réel.
Résultat : y : le réel $y = \mathcal{P}_n(t)$.

[1] A noter le choix de l'indice j. Que doit-on faire dans ce qui suit si l'on choisi i comme indice?
[2] Le théorème de d'Alembert-Gauss affirme que tout polynôme à coefficients complexes de degré n admet n racines complexes qui ne sont pas nécessairement distinctes

Algorithme 1 $\mathcal{R}_0$

$\boxed{\text{Calcul de } y = \mathcal{P}_n(t) = \sum_{i=1}^{n+1} Y(i)L_{i-1}(t)}$

Algorithme 1 $\mathcal{R}_1$

$y \leftarrow 0$
Pour $i \leftarrow 1$ **à** $n+1$ **faire**
  $y \leftarrow y + Y(i) * L_{i-1}(t)$
Fin Pour

Algorithme 1 $\mathcal{R}_1$

$y \leftarrow 0$
Pour $i \leftarrow 1$ **à** $n+1$ **faire**
  $\boxed{y \leftarrow y + Y(i) * L_{i-1}(t)}$
Fin Pour

Algorithme 1 $\mathcal{R}_2$

$y \leftarrow 0$
Pour $i \leftarrow 1$ **à** $n+1$ **faire**
  $L \leftarrow \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} \dfrac{t - X(j)}{X(i) - X(j)}$
  $y \leftarrow y + Y(i) * L$
Fin Pour

Algorithme 1 $\mathcal{R}_2$

$y \leftarrow 0$
Pour $i \leftarrow 1$ **à** $n+1$ **faire**
  $\boxed{L \leftarrow \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} \dfrac{t - X(j)}{X(i) - X(j)}}$
  $y \leftarrow y + Y(i) * L$
Fin Pour

Algorithme 1 $\mathcal{R}_3$

$y \leftarrow 0$
Pour $i \leftarrow 1$ **à** $n+1$ **faire**
  $L \leftarrow 1$
  Pour $j \leftarrow 1$ **à** $n+1$, $(j \sim= i)$ **faire**
    $L \leftarrow L * (t - X(j))/(X(i) - X(j))$
  Fin Pour
  $y \leftarrow y + Y(i) * L$
Fin Pour

On obtient alors l'algorithme final

Algorithme 1 Fonction LAGRANGE permettant de calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange $\mathcal{P}_n(x)$ définit par (4.4)

Données : $\boldsymbol{X}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $X(i) = x_{i-1}\ \forall i \in [\![1, n+1]\!]$ et $X(i) \neq X(j)$ pour $i \neq j$,
$\boldsymbol{Y}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $Y(i) = y_{i-1}\ \forall i \in [\![1, n+1]\!]$,
t : un réel.
Résultat : y : le réel $y = \mathcal{P}_n(t)$.

Fonction $y \leftarrow$ LAGRANGE (t, X, Y)
  $y \leftarrow 0$
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** $n+1$ **faire**
    $L \leftarrow 1$
    Pour $j \leftarrow 1$ **à** $n+1$, $(j \sim= i)$ **faire**
      $L \leftarrow L * (t - X(j))/(X(i) - X(j))$
    Fin Pour
    $y \leftarrow y + Y(i) * L$
  Fin Pour
  return y
Fin Fonction

◇

EXERCICE 3

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a;b];\mathbb{R})$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $n+1$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux et $y_i = f(x_i)$.
On note par P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ et π_n le polynôme de degré $n+1$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i). \tag{4}$$

Q. 1 *Montrer que, $\forall x \in [a;b]$, il existe ξ_x appartenant au plus petit intervalle fermé contenant $x, x_0, \ldots, x_n$ tel que*

$$f(x) - \mathrm{P}_n(x) = \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \tag{5}$$

Indication : *Etudier les zéros de la fonction $F(t) = f(t) - \mathrm{P}_n(t) - \dfrac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n(t)$.* □

Correction

R. 1 S'il existe $i \in [\![0,n]\!]$ tel que $x = x_i$ alors l'équation (5) est immédiatement vérifiée.
Soit $x \in [a,b]$ distinct de tous les x_i. Comme $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a;b];\mathbb{R})$, $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\pi_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, on en déduit que la fonction F est dans $\mathcal{C}^{n+1}([a;b];\mathbb{R})$. La fonction F admet aussi $n+2$ zéros : $x, x_0, \cdots, x_n$. On note $\xi_{x,1}^{[0]}, \cdots, \xi_{x,n+2}^{[0]}$ ces $n+2$ zéros ordonnés $\xi_{x,1}^{[0]} < \cdots < \xi_{x,n+2}^{[0]}$. La fonction F étant continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, le théorème de Rolle dit qu'entre deux zéros consécutifs de F, il existe au moins un zéro de $F' = F^{(1)}$. Plus précisemment on a

$$\forall i \in [\![1, n+1]\!], \quad \exists \xi_{x,i}^{[1]} \in]\xi_{x,i}^{[0]}, \xi_{x,i+1}^{[0]}[\ \text{ tels que } \ F^{(1)}(\xi_{x,i}^{[1]}) = 0$$

et on en déduit que la fonction $F^{(1)}$ admet $n+1$ zéros $\xi_{x,1}^{[1]}, \cdots, \xi_{x,n+1}^{[1]}$ et l'on a $\xi_{x,1}^{[0]} < \xi_{x,1}^{[1]} < \cdots < \xi_{x,n+1}^{[1]} < \xi_{x,n+2}^{[0]}$. Il faut noter la dépendance en x des zéros de F' d'où la notation un peu "lourde".
Montrons par récurrence finie que $(\mathcal{P}_k)$ est vraie pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$

$$(\mathcal{P}_k) \ : \ \exists \xi_{x,i}^{[k]}, \ i \in [\![1, n+2-k]\!], \ \xi_{x,1}^{[0]} < \xi_{x,1}^{[k]} < \cdots < \xi_{x,n+2-k}^{[k]} < \xi_{x,n+2}^{[0]} \ \text{ tels que } \ F^{(k)}(\xi_{x,i}^{[k]}) = 0$$

Initialisation : Pour $k = 1$, la preuve a déjà été faites.

Hérédité : Soit $1 < k-1 < n+1$, on suppose $(\mathcal{P}_{k-1})$ vérifiée. La fonction $F^{(k-1)}$ étant continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, le théorème de Rolle dit qu'entre deux zéros consécutifs de $F^{(k-1)}$, il existe au moins un zéro de $F^{(k)}$. Par hypothèse $F^{(k-1)}$ admet $n+2-(k-1)$ zéros vérifiant

$$\xi_{x,1}^{[0]} < \xi_{x,1}^{[k-1]} < \cdots < \xi_{x,n+2-(k-1)}^{[k-1]} < \xi_{x,n+2}^{[0]}$$

La fonction $F^{(k-1)}$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ puisque $F \in \mathcal{C}^{n+1}([a;b];\mathbb{R})$. Par application du théorème de Rolle, entre deux zéros de $F^{(k-1)}$, il existe au moins un zéro de $F^{(k)}$. Plus précisemment pour tout $i \in [\![1, n+2-k]\!]$ on a

$$\exists \xi_{x,i}^{[k]} \in]\xi_{x,i}^{[k-1]}, \xi_{x,i+1}^{[k-1]}[, \quad F^{(k)}(\xi_{x,i}^{[k]}) = 0$$

De plus, par construction, $\xi_{x,1}^{[0]} < \xi_{x,1}^{[k]} < \cdots < \xi_{x,n+2-k}^{[k]} < \xi_{x,n+2}^{[0]}$. et donc $(\mathcal{P}_k)$ est vraie.

Avec $k = n+1$ on obtient

$$(\mathcal{P}_{n+1}) \ : \ \exists \xi_{x,1}^{[n+1]} \in]\xi_{x,1}^{[0]}, \xi_{x,n+2}^{[0]}[\ \text{ tel que } \ F^{(n+1)}(\xi_{x,1}^{[n+1]}) = 0$$

et donc

$$0 = F^{(n+1)}(\xi_{x,1}^{[n+1]}) = f^{(n+1)}(\xi_{x,1}^{[n+1]}) - \mathrm{P}_n^{(n+1)}(\xi_{x,1}^{[n+1]}) - \frac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n^{(n+1)}(\xi_{x,1}^{[n+1]})$$

Comme $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\mathrm{P}_n^{(n+1)} = 0$. De plus $\pi_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, et comme $\pi_n(x) = x^{n+1} + Q(x)$ avec $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ (i.e. son monône de puissance $n+1$ à pour coefficient 1) on obtient $\pi_n^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ On a alors

$$f^{(n+1)}(\xi_{x,1}^{[n+1]}) = \frac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{\pi_n(x)} (n+1)!$$

◇

Exercice 4

Soient $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ $n+1$ triplets de $\mathbb{R}^3$, où les x_i sont des points distincts deux à deux de l'intervalle $[a, b]$. Le polynôme d'interpolation de **Lagrange-Hermite**, noté H_n, associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, est défini par

$$\mathrm{H}_n(x_i) = y_i \quad \text{et} \quad \mathrm{H}'_n(x_i) = z_i, \ \forall i \in [\![0, n]\!] \tag{6}$$

Q. 1 *Quel est a priori le degré de* H_n*?* ▫

On défini le polynôme P_n par

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i(x) \tag{7}$$

avec, pour $i \in [\![0, n]\!]$, A_i et B_i polynômes de degré au plus $2n + 1$ indépendants des valeurs y_i et z_i.

Q. 2 *a. Déterminer des conditions suffisantes sur A_i et B_i pour que P_n vérifie* (6).

b. En déduire les expressions de A_i et B_i en fonction de L_i et de $L'_i(x_i)$ où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

▫

Q. 3 *Démontrer qu'il existe un unique polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite de degré au plus $2n + 1$ défini par (6).* ▫

Correction

R. 1 On a $2n + 2$ équations, donc à priori H_n est de degré $2n + 1$.

R. 2 a. D'après (7) on a pour tout $j \in [\![0, n]\!]$

$$\mathrm{P}_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x_j) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i(x_j)$$

Pour avoir $\mathrm{P}_n(x_j) = y_j$ il suffit d'avoir

$$A_i(x_j) = \delta_{i,j} \quad \text{et} \quad B_i(x_j) = 0, \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{8}$$

De même, on a

$$\mathrm{P}'_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i A'_i(x_j) + \sum_{i=0}^{n} z_i B'_i(x_j)$$

et donc pour avoir $\mathrm{P}'_n(x_j) = z_j$ il suffit d'avoir

$$A'_i(x_j) = 0 \quad \text{et} \quad B'_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{9}$$

b. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. On commence par déterminer le polynôme $A_i \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ vérifiant

$$A_i(x_j) = \delta_{i,j} \quad \text{et} \quad A'_i(x_j) = 0, \quad \forall j \in [\![0, n]\!].$$

Les points $(x_j)_{j\in[\![0,n]\!]\setminus\{i\}}$ sont racines doubles de A_i. Le polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ admet les mêmes racines (simples) que A_i et donc $L_i^2 \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ admet les mêmes racines doubles que A_i. On peut alors écrire

$$A_i(x) = \alpha_i(x)L_i^2(x) \quad \text{avec } \alpha_i(x) \in \mathbb{R}_1[X].$$

Il reste à déterminer le polynôme α_i. Or on a

$$A_i(x_i) = 1 \quad \text{et} \quad A'_i(x_i) = 0.$$

Comme $L_i(x_i) = 1$, on obtient

$$A_i(x_i) = \alpha_i(x_i)L_i^2(x_i) = \alpha_i(x_i) = 1$$

et

$$A'_i(x_i) = \alpha'_i(x_i)L_i^2(x_i) + 2\alpha_i(x_i)L'_i(x_i)L_i(x_i) = \alpha'_i(x_i) + 2\alpha_i(x_i)L'_i(x_i) = 0$$

c'est à dire

$$\alpha_i(x_i) = 1 \quad \text{et} \quad \alpha'_i(x_i) = -2L'_i(x_i).$$

Comme α_i est un polynôme de degré 1 on en déduit

$$\alpha_i(x) = 1 - 2L'_i(x_i)(x - x_i)$$

et donc

$$A_i(x) = (1 - 2L'_i(x_i)(x - x_i))L_i^2(x). \tag{10}$$

On détermine ensuite le polynôme $B_i \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ vérifiant

$$B_i(x_j) = 0 \quad \text{et} \quad B'_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad \forall j \in [\![0, n]\!].$$

Les points $(x_j)_{j\in[\![0,n]\!]\setminus\{i\}}$ sont racines doubles de B_i et le point x_i est racine simple. Le polynôme $L_i^2 \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ admet les mêmes racines doubles. On peut alors écrire

$$B_i(x) = C(x - x_i)L_i^2(x) \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Il reste à déterminer la constante C. Or $L_i(x_i) = 1$ et comme $B'_i(x_i) = 1$ on obtient

$$B'_i(x_i) = CL_i^2(x_i) + 2C(x_i - x_i)L'_i(x_i)L_i(x_i) = C = 1$$

ce qui donne

$$B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x). \tag{11}$$

On vient de démontrer l'existence en construisant un polynôme de degré $2n + 1$ vérifiant (6).

R. 3 Deux démonstrations pour l'unicité sont proposées (la deuxième donne aussi l'existence).

dém. 1: Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ vérifiant (6). Le polynôme $\mathrm{R} = \mathrm{P} - \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ admet alors $n + 1$ racines doubles distinctes :$(x_0, \cdots, x_n)$. Or le seul polynôme de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ ayant $n + 1$ racines doubles est le polynôme nul et donc $\mathrm{R} = 0$, i.e. $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$.

dém. 2: Soit $\Phi : \mathbb{R}_{2n+1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$ définie par

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_{2n+1}[X], \quad \Phi(\mathrm{P}) = (\mathrm{P}(x_0), \cdots, \mathrm{P}(x_n), \mathrm{P}'(x_0), \cdots, \mathrm{P}'(x_n)).$$

L'existence et l'unicité du polynôme H_n est équivalente à la bijectivité de l'application Φ. Or celle-ci est une application linéaire entre deux espaces de dimension $2n + 2$. Elle est donc bijective si et seulement si elle injective (ou surjective). Pour vérifier l'injectivité de Φ il est nécessaire et suffisant de vérifier que son noyau est réduit au polynôme nul.
Soit $\mathrm{P} \in \ker \Phi$. On a alors $\Phi(\mathrm{P}) = \mathbf{0}_{2n+2}$ et donc $(x_0, \cdots, x_n)$ sont $n + 1$ racines doubles distinctes de P. Or le seul polynôme de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ ayant $n + 1$ racines doubles est le polynôme nul et donc $\mathrm{P} = 0$.

◇

Exercice 5

Soit $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a,b];\mathbb{R})$. On suppose de plus que, $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $x_i \in [a,b]$, $y_i = f(x_i)$ et $z_i = f'(x_i)$. On note

$$\pi_n^2(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2$$

et H_n le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux triplets $(x_i, f(x_i), f'(x_i))_{i\in[\![0,n]\!]}$.

Q. 1 *Montrer que*

$$|f(x) - \mathrm{H}_n(x)| \leqslant \frac{\left\|f^{(2n+2)}\right\|_\infty}{(2n+2)!}\pi_n^2(x). \tag{12}$$

Indications : *Etudier les zéros de la fonction* $F(y) = f(y) - \mathrm{H}_n(y) - \dfrac{f(x)-\mathrm{H}_n(x)}{\pi_n^2(x)}\pi_n^2(y)$ *et appliquer le théorème de Rolle.* □

Correction

R. 1 Soit $i \in [\![1,n]\!]$, on a $f(x_i) - \mathrm{H}_n(x_i) = 0$ et l'inégalité (12) est donc vérifiée pour $x = x_i$.
Soit $x \in [a,b]$ tel que $x \neq x_i$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$. On a alors $\pi_n^2(x) \neq 0$. Comme $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a;b];\mathbb{R})$, $\mathrm{H}_n \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ et $\pi_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, on en déduit que

$$F \in \mathcal{C}^{2n+2}([a;b];\mathbb{R}).$$

On note que π_n^2 admet $(x_0, \cdots, x_n)$ comme racines doubles distinctes. Par construction $f - \mathrm{H}_n$ admet les mêmes racines doubles. On en déduit alors que F admet aussi $(x_0, \cdots, x_n)$ comme racines doubles. De plus, on a $F(x) = 0$ (i.e. x est racine simple) et donc

$$F \text{ admet au moins } 2n+3 \text{ racines (comptées avec leurs multiplicités).}$$

Les points $x, x_0, \cdots, x_n$ étant distincts, la fonction F' admet par le théorème de Rolle $n+1$ zeros distincts entre eux et distincts des points $x, x_0, \cdots, x_n$. De plus les points $x_0, \cdots, x_n$ sont racines de F' puisque racines doubles de F. On en déduit alors que

$$F' \text{ admet au moins } 2n+2 \text{ racines distinctes deux à deux.}$$

Par applications successives du théorème de Rolle, on abouti a :

$$F^{(2n+2)} \text{ admet au moins une racine notée } \xi_x \in]a,b[.$$

On a alors

$$F^{(2n+2)}(\xi_x) = 0 = f^{(2n+2)}(\xi_x) - \mathrm{H}_n^{(2n+2)}(\xi_x) - \frac{f(x)-\mathrm{H}_n(x)}{\pi_n^2(x)}\frac{d^{2n+2}\pi_n^2}{dx^{2n+2}}(\xi_x)$$

Comme $\mathrm{H}_n \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ on a $\mathrm{H}_n^{(2n+2)} \equiv 0$. De plus comme $\pi_n^2(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2 \in \mathbb{R}_{2n+2}[X]$ sa dérivée d'ordre $2n+2$ est constante et

$$\frac{d^{2n+2}\pi_n^2}{dx^{2n+2}} = (2n+2)!$$

On en déduit alors

$$f^{(2n+2)}(\xi_x) = \frac{f(x)-\mathrm{H}_n(x)}{\pi_n^2(x)}(2n+2)!$$

On a donc montrer que $\forall x \in [a,b]$ $\exists \xi_x \in]a,b[$ tels que

$$f(x) - \mathrm{H}_n(x) = \frac{\pi_n^2(x)}{(2n+2)!}f^{(2n+2)}(\xi_x).$$

Comme $\pi_n^2(x) \geqslant 0$ on obtient bien (12).

◇

EXERCICE 6

Ecrire une fonction algorithmique HERMITE permettant de calculer H_n (polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$) en $t \in \mathbb{R}$.

Correction

But : Calculer le polynôme $\mathrm{H}_n(t)$ défini par (4.26)
Données :
- $\boldsymbol{X}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $X(i) = x_{i-1}$ $\forall i \in [\![1,n+1]\!]$ et $X(i) \neq X(j)$ pour $i \neq j$,
- $\boldsymbol{Y}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $Y(i) = y_{i-1}$ $\forall i \in [\![1,n+1]\!]$,
- $\boldsymbol{Z}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $Z(i) = z_{i-1}$ $\forall i \in [\![1,n+1]\!]$,
- t : un réel.

Résultat : pH : le réel $\mathrm{pH} = \mathrm{H}_n(t)$.

D'après la Définition 4.9, on a

$$\mathrm{H}_n(t) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(t) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i(t) = \sum_{i=0}^{n}(y_i A_i(t) + z_i B_i(t))$$

avec

$$A_i(t) = (1 - 2L_i'(x_i)(t-x_i))L_i^2(t) \quad \text{et} \quad B_i(t) = (t-x_i)L_i^2(t)$$

où

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-x_j}{x_i-x_j}.$$

Pour rendre effectif le calcul de $\mathrm{H}_n(t)$, il reste à déterminer $L_i'(x_i)$. On a

$$L_i'(x) = \sum_{\substack{k=0\\ k\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i-x_k} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i\\ j\neq k}}^{n} \frac{t-x_j}{x_i-x_j}$$

d'où

$$L_i'(x_i) = \sum_{\substack{k=0\\ k\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i-x_k}. \tag{13}$$

La fonction que l'on va écrire use (et certains diront abuse) de fonctions.

Algorithme 2 Fonction HERMITE permettant de calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite $\mathrm{H}_n(t)$ défini par (4.26)

```
Fonction pH ← Hermite ( X, Y, Z, t )
  pH ← 0
  Pour i ← 0 à n faire
    pH ← pH + PolyA(i, X, t) * Y(i+1) + PolyB(i, X, t) * Z(i+1)
  Fin Pour
Fin Fonction
```

Les différentes fonctions utilisées pour la fonction HERMITE (directement ou indirectement) sont les suivantes :

POLYA : calcul du polynôme A_i en t, (données i, X, t)

POLYB : calcul du polynôme B_i en t, (données i, X, t)

POLYL : calcul du polynôme L_i en t, (données i, X, t)

POLYLP : calcul de $L_i'(x_i)$, (données i, X)

Algorithme 3 Fonction POLYA permettant de calculer le polynôme A_i en $t \in \mathbb{R}$ donné par $A_i(t) = (1 - 2L_i'(x_i)(t-x_i))L_i^2(t)$

```
Fonction y ← PolyA ( i, X, t )
  y ← (1 − 2 * PolyLp(i, X) * (t − X(i+1))) * (PolyL(i, X, t))^2
Fin Fonction
```

Algorithme 4 Fonction POLYB permettant de calculer le polynôme B_i en $t \in \mathbb{R}$ donné par $B_i(t) = (t-x_i)L_i^2(t)$

```
Fonction y ← PolyB ( i, X, t )
  y ← (t − X(i+1)) * (PolyL(i, X, t))^2
Fin Fonction
```

Algorithme 5 Fonction PolyL permettant de calculer le polynôme L_i en $t \in \mathbb{R}$ donné par $L_i(t) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{t - x_j}{x_i - x_j}$

Fonction $y \leftarrow$ PolyL $(i, \boldsymbol{X}, t)$
  $y \leftarrow 1$
  Pour $j \leftarrow 0$ **à** n, $(j \sim= i)$ **faire**
    $y \leftarrow y * (t - X(j+1))/(X(i+1) - X(j+1))$
  Fin Pour
Fin Fonction

Algorithme 6 Fonction PolyLp permettant de calculer $L_i'(x_i) = \sum_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_k}$

Fonction $y \leftarrow$ PolyLp $(i, \boldsymbol{X})$
  $y \leftarrow 0$
  Pour $k \leftarrow 0$ **à** n, $(k \sim= i)$ **faire**
    $y \leftarrow y + 1/(X(i+1) - X(k+1))$
  Fin Pour
Fin Fonction

Bien évidemment une telle écriture est loin d'être optimale mais elle a l'avantage d'être facile à programmer et facile à lire car elle "colle" aux formules mathématiques.
On laisse le soin au lecteur d'écrire des fonctions plus performantes... ◇