Exercice 1

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible dont les éléments diagonaux sont non nuls. On note $\mathrm{A}_{i,j}$ la composante (i,j) de la matrice $\mathbb{A}$. On décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$, où $\mathbb{D}$ représente la diagonale de $\mathbb{A}$, $-\mathbb{E}$ la partie triangulaire inférieure stricte et $-\mathbb{F}$ la partie triangulaire supérieure stricte.
La méthode S.O.R. (successive over relaxation, utilisant la méthode de Gauss-Seidel) est donnée par

$$x_i^{[k+1]} = \frac{w}{\mathrm{A}_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{A}_{ij} x_j^{[k+1]} - \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{A}_{ij} x_j^{[k]} \right) + (1-w) x_i^{[k]}, \quad \forall i \in [\![1, n]\!]$$

Q. 1 *Déterminer la matrice d'itération $\mathbb{B}$ et le vecteur $\boldsymbol{c}$ tels que*

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{c}$$

en fonction de $\mathbb{D}$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, et $\boldsymbol{b}$. □

R. 1 Pour la **méthode S.O.R.** on a , $\forall i \in [\![1, n]\!]$,

$$x_i^{[k+1]} = \frac{w}{\mathrm{A}_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{A}_{ij} x_j^{[k+1]} - \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{A}_{ij} x_j^{[k]} \right) + (1-w) x_i^{[k]}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\frac{\mathrm{A}_{ii}}{w} x_i^{[k+1]} + \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{A}_{ij} x_j^{[k+1]} = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{A}_{ij} x_j^{[k]} + \frac{1-w}{w} \mathrm{A}_{ii} x_i^{[k]}$$

et matriciellement on obtient

$$\left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} \right) \boldsymbol{x}^{[k+1]} = \left(\frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{F} \right) \boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{b}.$$

Comme la matrice $\left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)$ est inversible (car triangulaire inférieure à éléments diagonaux non nuls), on a

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} \right)^{-1} \left(\frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{F} \right) \boldsymbol{x}^{[k]} + \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} \right)^{-1} \boldsymbol{b}$$

La matrice d'itération de S.O.R. est $\mathbb{B} = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1} \left(\frac{1-w}{w}\mathbb{D} + \mathbb{F}\right)$ et le vecteur $\boldsymbol{c} = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1} \boldsymbol{b}$.

Exercice 2

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible dont les éléments diagonaux sont non nuls. On note $\mathrm{A}_{i,j}$ la composante (i,j) de la matrice $\mathbb{A}$. On décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$, où $\mathbb{D}$ représente la diagonale de $\mathbb{A}$, $-\mathbb{E}$ la partie triangulaire inférieure stricte et $-\mathbb{F}$ la partie triangulaire supérieure stricte.
La matrice d'itération de la méthode S.O.R., notée $\mathcal{L}_w$, est donnée par

$$\mathcal{L}_w = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} \right)^{-1} \left(\frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{F} \right). \tag{1}$$

On pose $\mathbb{L} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}$ et $\mathbb{U} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}$.

Q. 1 *Montrer que*

$$\mathcal{L}_w = (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} \left((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U} \right).$$

□

R. 1 Comme $\mathbb{E} = \mathbb{D}\mathbb{L}$ et $\mathbb{F} = \mathbb{D}\mathbb{U}$ on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_w &= \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{D}\mathbb{L} \right)^{-1} \left(\frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{D}\mathbb{U} \right) \\
&= \left(\frac{1}{w} \mathbb{D}[\mathbb{I} - w\mathbb{L}] \right)^{-1} \left(\frac{1}{w} \mathbb{D}[(1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}] \right) \\
&= (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} \left(\frac{1}{w} \mathbb{D} \right)^{-1} \left(\frac{1}{w} \mathbb{D} \right) \left((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U} \right) \\
&= (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} \left((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U} \right).
\end{aligned}$$

Q. 2 *En déduire que*

$$\rho(\mathcal{L}_w) \geqslant |w - 1|. \tag{2}$$

□

R. 2 La matrice $\mathbb{L}$ est triangulaire inférieure à diagonale nulle car elle est le produit d'une matrice diagonale (et donc triangulaire inférieure) $\mathbb{D}^{-1}$ et d'une matrice triangulaire inférieure $\mathbb{E}$ à diagonale nulle. De même la matrice $\mathbb{U}$ est triangulaire supérieure à diagonale nulle.
On sait que le déterminant d'une matrice est égale aux produits de ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités. En notant n la dimension de la matrice $\mathcal{L}_w$, et en notant $\lambda_i(\mathcal{L}_w)$ ses n valeurs propres, on a donc

$$\det(\mathcal{L}_w) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathcal{L}_w).$$

Le rayon spectral de $\mathcal{L}_w$, noté $\rho(\mathcal{L}_w)$, correspond au plus grand des modules des valeurs propres. On a alors

$$\rho(\mathcal{L}_w) = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |\lambda_i(\mathcal{L}_w)| \geqslant |\det(\mathcal{L}_w)|^{1/n}$$

De plus on a

$$\det(\mathcal{L}_w) = \det\left((\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} \left((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U} \right) \right) = \det\left((\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} \right) \det\left(((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}) \right)$$

La matrice $\mathbb{I} - w\mathbb{L}$ est triangulaire inférieure à diagonale unité donc son inverse aussi. On en déduit $\det\left((\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} \right) = 1$. La matrice $(1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}$ est triangulaire supérieure avec tous ses éléments diagonaux valant $1 - w$ et donc $\det\left(((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}) \right) = (1-w)^n$. On a alors $|\det(\mathcal{L}_w)| = |1-w|^n$ et

$$\rho(\mathcal{L}_w) \geqslant |\det(\mathcal{L}_w)|^{1/n} = |1 - w|.$$

Exercice 3

Soit $\mathbb{A}$ une matrice inversible décomposée sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$ avec $\mathbb{M}$ inversible. On pose

$$\mathbb{B} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{c} = \mathbb{M}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Montrer que la suite définie par

$$\boldsymbol{x}^{[0]} \in \mathbb{K}^n \quad \text{et} \quad \boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{c}$$

converge vers $\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ quelque soit $\boldsymbol{x}^{[0]}$ si et seulement si $\rho(\mathbb{B}) < 1$.

Exercice 4

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive décomposée (par points) sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$ où $\mathbb{D} = \operatorname{diag}(\mathbb{A})$, $\mathbb{E}$ est triangulaire inférieure et d'éléments nuls sur la diagonale et $\mathbb{F}$ est triangulaire supérieure et d'éléments nuls sur la diagonale.

On étudie une méthode itérative de résolution su système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Soit $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{C}^n$, on définit la suite $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{D}-\mathbb{E})\boldsymbol{x}_{k+1/2} &= \mathbb{F}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{b} && (3)\\
(\mathbb{D}-\mathbb{F})\boldsymbol{x}_{k+1} &= \mathbb{E}\boldsymbol{x}_{k+1/2} + \boldsymbol{b} && (4)
\end{aligned}
$$

Q. 1 *Ecrire le vecteur $\boldsymbol{x}_{k+1}$ sous la forme*

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{c} \tag{5}$$

en explicitant le matrice $\mathbb{B}$ et le vecteur $\boldsymbol{c}$. □

R. 1 La matrice $\mathbb{D}$ est inversible. En effet, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $d_{i,i} = a_{i,i} = \langle \mathbb{A}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i\rangle > 0$ car $\mathbb{A}$ définie positive et $\boldsymbol{e}_i$, i-ème vecteur de la base canonique est non nul.
On en déduit que les matrices $\mathbb{D}-\mathbb{E}$ (triangulaire inférieure de diagonale la diagonale de $\mathbb{D}$) et $\mathbb{D}-\mathbb{F}$ (triangulaire supérieure de diagonale la diagonale de $\mathbb{D}$) sont inversibles.
De (3), on obtient en multipliant à gauche par $(\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1}$

$$\boldsymbol{x}_{k+1/2} = (\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{x}_k + (\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1}\boldsymbol{b}.$$

En remplaçant cette expression de $\boldsymbol{x}_{k+1/2}$ dans (4), on a

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{D}-\mathbb{F})\boldsymbol{x}_{k+1} &= \mathbb{E}\left((\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{x}_k + (\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1}\boldsymbol{b}\right) + \boldsymbol{b}\\
&= \mathbb{E}(\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{x}_k + \left(\mathbb{E}(\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1} + \mathbb{I}\right)\boldsymbol{b}
\end{aligned}
$$

En multipliant à gauche cette équation par $(\mathbb{D}-\mathbb{F})^{-1}$, on abouti a

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = (\mathbb{D}-\mathbb{F})^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{x}_k(\mathbb{D}-\mathbb{F})^{-1}\left(\mathbb{E}(\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1} + \mathbb{I}\right)\boldsymbol{b}$$

En posant

$$
\begin{aligned}
\mathbb{B} &= (\mathbb{D}-\mathbb{F})^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}\\
\boldsymbol{c} &= (\mathbb{D}-\mathbb{F})^{-1}\left(\mathbb{E}(\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1} + \mathbb{I}\right)\boldsymbol{b}
\end{aligned}
$$

on obtient (5).

Q. 2 a. *Montrer que*

$$\mathbb{D}^{-1} = (\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1}. \tag{6}$$

b. *Soit $(\lambda, \boldsymbol{p})$ un élément propre de la matrice $\mathbb{B}$. Montrer que*

$$\lambda\mathbb{A}\boldsymbol{p} + (\lambda-1)\mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p} = 0. \tag{7}$$

□

R. 2 a. L'expression à démontrer est bien définie car $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}-\mathbb{E}$ inversibles. De plus on a

$$\mathbb{I} = (\mathbb{D}-\mathbb{E})(\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1}$$

En multipliant à gauche cette équation par $\mathbb{D}^{-1}$ on obtient

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}^{-1} &= \mathbb{D}^{-1}(\mathbb{D}-\mathbb{E})(\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1}\\
&= (\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1}.
\end{aligned}
$$

b. Soit $(\lambda, \boldsymbol{p})$ un élément propre de la matrice $\mathbb{B}$. on a alors

$$
\begin{aligned}
\mathbb{B}\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{p} &\Leftrightarrow (\mathbb{D}-\mathbb{F})^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{p}\\
&\Leftrightarrow \mathbb{E}(\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p} = \lambda(\mathbb{D}-\mathbb{F})\boldsymbol{p}\\
&\Leftrightarrow \mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p} = \lambda\mathbb{D}^{-1}(\mathbb{D}-\mathbb{F})\boldsymbol{p}
\end{aligned}
$$

De (6), on a

$$\mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1} = (\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1}$$

et donc

$$
\begin{aligned}
\mathbb{B}\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{p} &\Leftrightarrow \left((\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1}\right)\mathbb{F}\boldsymbol{p} = \lambda\mathbb{D}^{-1}(\mathbb{D}-\mathbb{F})\boldsymbol{p}\\
&\Leftrightarrow (\mathbb{D}-\mathbb{E})\left((\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1}\right)\mathbb{F}\boldsymbol{p} = \lambda(\mathbb{D}-\mathbb{E})\mathbb{D}^{-1}(\mathbb{D}-\mathbb{F})\boldsymbol{p}\\
&\Leftrightarrow \left(\mathbb{I} - \mathbb{I} + \mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\right)\mathbb{F}\boldsymbol{p} = \lambda(\mathbb{I} - \mathbb{E}\mathbb{D}^{-1})(\mathbb{D}-\mathbb{F})\boldsymbol{p}\\
&\Leftrightarrow \mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p} = \lambda(\mathbb{D}-\mathbb{E}-\mathbb{F}+\mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F})\boldsymbol{p}\\
&\Leftrightarrow \mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p} = \lambda(\mathbb{A}+\mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F})\boldsymbol{p}
\end{aligned}
$$

On en déduit alors

$$\lambda\mathbb{A}\boldsymbol{p} + (\lambda-1)\mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p} = 0.$$

Q. 3 *En déduire la convergence de cette méthode vers la solution $\underline{\boldsymbol{x}}$ de $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.* □

R. 3 La matrice $\mathbb{A}$ est inversible car elle est définie positive et donc $\underline{\boldsymbol{x}}$ est bien définie. De l'équation (3), on déduit

$$(\mathbb{D}-\mathbb{E})\boldsymbol{x}_{k+1/2} = \mathbb{F}\boldsymbol{x}_k + \mathbb{A}\underline{\boldsymbol{x}} = \mathbb{F}\boldsymbol{x}_k + (\mathbb{D}-\mathbb{E}-\mathbb{F})\underline{\boldsymbol{x}}$$

et donc

$$(\mathbb{D}-\mathbb{E})(\boldsymbol{x}_{k+1/2} - \underline{\boldsymbol{x}}) = \mathbb{F}(\boldsymbol{x}_k - \underline{\boldsymbol{x}}) \tag{8}$$

De la même manière à partir de l'équation (4), on déduit

$$(\mathbb{D}-\mathbb{F})(\boldsymbol{x}_{k+1} - \underline{\boldsymbol{x}}) = \mathbb{E}(\boldsymbol{x}_{k+1/2} - \underline{\boldsymbol{x}}) \tag{9}$$

En utilisant (8), l'équation (10) devient

$$(\mathbb{D}-\mathbb{F})(\boldsymbol{x}_{k+1} - \underline{\boldsymbol{x}}) = \mathbb{E}(\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}(\boldsymbol{x}_k - \underline{\boldsymbol{x}})$$

c'est à dire

$$\boldsymbol{x}_{k+1} - \underline{\boldsymbol{x}} = \mathbb{B}(\boldsymbol{x}_k - \underline{\boldsymbol{x}}).$$

En posant $\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{x}_k - \underline{\boldsymbol{x}}$ on a alors

$$\boldsymbol{e}_k = \mathbb{B}^k\boldsymbol{e}_0, \quad \forall k \geqslant 0.$$

Or la suite $\boldsymbol{x}_k$ converge vers $\underline{\boldsymbol{x}}$ si et seulement si la suite $\boldsymbol{e}_k$ converge vers $\mathbf{0}$. Pour celà, d'après le Théorème 3.33, page 106, il est nécessaire et suffisant d'avoir $\rho(\mathbb{B}) < 1$.
Soit $(\lambda, \boldsymbol{p})$ un élément propre de $\mathbb{B}$. Montrons que $|\lambda| < 1$.
On déduit de l'équation (7)

$$
\begin{aligned}
0 &= \left\langle \boldsymbol{p}, \lambda\mathbb{A}\boldsymbol{p} + (\lambda-1)\mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}\right\rangle\\
&= \lambda\left\langle \boldsymbol{p}, \mathbb{A}\boldsymbol{p}\right\rangle + (\lambda-1)\left\langle \boldsymbol{p}, \mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}\right\rangle && (10)
\end{aligned}
$$

Comme la matrice $\mathbb{A}$ est définie positive on a $\langle \mathbb{A}\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}\rangle > 0$ car $\boldsymbol{p} \neq \mathbf{0}$ (vecteur propre) et donc

$$\langle \boldsymbol{p}, \mathbb{A}\boldsymbol{p}\rangle = \overline{\langle \mathbb{A}\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}\rangle} = \langle \mathbb{A}\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}\rangle > 0.$$

De plus on a

$$\left\langle \boldsymbol{p}, \mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}\right\rangle = \left\langle \mathbb{E}^*\boldsymbol{p}, \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}\right\rangle.$$

La matrice $\mathbb{A}$ étant hermitienne, on a $\mathbb{E}^* = \mathbb{F}$. La matrice $\mathbb{A}$ étant définie positive, la matrice diagonale $\mathbb{D}$ est définie positive car $d_{i,i} > 0$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, et donc $\mathbb{D}^{-1}$ aussi. Comme $\mathbb{F}\boldsymbol{p}$ n'est pas nécessairement non nul, on a

$$\left\langle \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}, \mathbb{F}\boldsymbol{p}\right\rangle \in \mathbb{R}^+.$$

On en déduit

$$\langle \mathbb{F}\boldsymbol{p}, \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}\rangle = \overline{\langle \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}, \mathbb{F}\boldsymbol{p}\rangle} = \langle \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}, \mathbb{F}\boldsymbol{p}\rangle \geqslant 0.$$

De l'équation (10), on obtient

$$\lambda(\langle \boldsymbol{p}, \mathbb{A}\boldsymbol{p}\rangle + \langle \mathbb{F}\boldsymbol{p}, \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}\rangle) = \langle \mathbb{F}\boldsymbol{p}, \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}\rangle$$

or

$$\langle \boldsymbol{p}, \mathbb{A}\boldsymbol{p}\rangle + \langle \mathbb{F}\boldsymbol{p}, \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}\rangle \neq 0$$

ce qui donne

$$\lambda = \frac{\langle \mathbb{F}\boldsymbol{p}, \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}\rangle}{\langle \boldsymbol{p}, \mathbb{A}\boldsymbol{p}\rangle + \langle \mathbb{F}\boldsymbol{p}, \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}\rangle}.$$

On a alors $\lambda \in [0, 1[$.

Q. 4 *Etendre ces résultats au cas d'une décomposition $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$ par blocs.* □

R. 4 Comme la matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive, chaque bloc diadonal l'est aussi. Donc la matrice diagonale bloc $\mathbb{D}$ est aussi hermitienne définie positive ainsi que son inverse . Les résultats précédents sont donc toujours valable.

Exercice 5

On note $\mathbb{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice tridiagonale

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Q. 1 *Soit $\mu \in \mathbb{C}^*$. On note $\mathbb{Q}(\mu) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice diagonale de diagonale $(\mu, \mu^2, \dots, \mu^n)$.*

a. Expliciter la matrice $\mathbb{T}(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}(\mu)\mathbb{T}\mathbb{Q}^{-1}(\mu)$ en fonction des coefficients tridiagonaux de la matrice $\mathbb{T}$ et de μ.

b. Déterminer $\det(\mathbb{T}(\mu))$ en fonction de $\det(\mathbb{T})$.

□

R. 1 a. On peut noter que la matrice $\mathbb{Q}(\mu)$ est inversible car elle est diagonale et $\mu \in \mathbb{C}^*$. Son inverse est la matrice diagonale de diagonale $(\mu^{-1}, \mu^{-2}, \dots, \mu^{-n})$.

1ère démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}(\mu) &= \begin{pmatrix} \mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu^n \end{pmatrix} \mathbb{T} \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu^2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\mu^n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mu a_1 & \mu c_1 & 0 & \dots & 0 \\ \mu^2 b_2 & \mu^2 a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mu^{n-1} c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \mu^n b_n & \mu^n a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu^2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\mu^n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 & \mu^{-1} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ \mu b_2 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mu^{-1} c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \mu b_n & a_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2ème démonstration. Pour simplifier l'écriture, on pose $\mathbb{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}(\mu)$. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a

$$\left(\mathbb{T}(\mu)\right)_{i,j} = \left(\mathbb{Q}\mathbb{T}\mathbb{Q}^{-1}\right)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathbb{Q}\mathbb{T}\right)_{i,k} \left(\mathbb{Q}^{-1}\right)_{k,j}$$

Or $\mathbb{Q}^{-1}$ est diagonale, donc $\left(\mathbb{Q}^{-1}\right)_{k,j} = 0$, si $k \neq j$. Ceci donne

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{T}(\mu)\right)_{i,j} &= \left(\mathbb{Q}\mathbb{T}\right)_{i,j} \left(\mathbb{Q}^{-1}\right)_{j,j} = \mu^{-j} \left(\mathbb{Q}\mathbb{T}\right)_{i,j} \\
&= \mu^{-j} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{Q}_{i,k} \mathbb{T}_{k,j}.
\end{aligned}$$

De même, $\mathbb{Q}$ est diagonale, donc $\mathbb{Q}_{i,k} = 0$, si $k \neq i$. Ceci donne

$$\left(\mathbb{T}(\mu)\right)_{i,j} = \mu^{-j} \mathbb{Q}_{i,i} \mathbb{T}_{i,j} = \mu^{i-j} \mathbb{T}_{i,j}.$$

La matrice $\mathbb{T}$ étant tridiagonale, $\mathbb{T}(\mu)$ l'est aussi et on a

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbb{T}(\mu)\right)_{i,i} = \mathbb{T}_{i,i} = a_i, && \forall i \in [\![1, n]\!] && \text{(diagonale)} \\
&\left(\mathbb{T}(\mu)\right)_{i,i+1} = \mu^{-1} \mathbb{T}_{i,i+1} = \mu^{-1} c_i, && \forall i \in [\![1, n-1]\!] && \text{(sur-diagonale)} \\
&\left(\mathbb{T}(\mu)\right)_{i-1,i} = \mu \mathbb{T}_{i-1,i} = \mu^{-1} b_i, && \forall i \in [\![2, n]\!] && \text{(sous-diagonale)}
\end{aligned}$$

b. On a

$$\det(\mathbb{T}(\mu)) = \det\left(\mathbb{Q}(\mu)\mathbb{T}\mathbb{Q}^{-1}(\mu)\right) = \det(\mathbb{Q}(\mu))\det(\mathbb{T})\det(\mathbb{Q}^{-1}(\mu)) = \det(\mathbb{T}),$$

car $\det(\mathbb{Q}(\mu))\det(\mathbb{Q}^{-1}(\mu)) = 1$.

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible dont les éléments diagonaux sont non nuls. On note $\mathrm{A}_{i,j}$ la composante (i, j) de la matrice $\mathbb{A}$. On décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$, où $\mathbb{D}$ représente la diagonale de $\mathbb{A}$, $-\mathbb{E}$ la partie triangulaire inférieure stricte et $-\mathbb{F}$ la partie triangulaire supérieure stricte.
On note respectivement $\mathbb{J} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{D}^{-1}(\mathbb{E} + \mathbb{F})$ et $\mathcal{L}_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}$ les matrices d'itérations des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.
Soit $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. On souhaite résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ par la méthode de Gauss-Seidel ou par la méthode de Jacobi.
On suppose dans la suite que la matrice inversible $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \nu_1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \nu_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{12}$$

et que ses éléments diagonaux sont non nuls.

Q. 2 *a. Montrer que les valeurs propres de $\mathbb{J}$ sont les racines du polynôme*

$$q_{\mathbb{J}}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\lambda\mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}).$$

b. En utilisant la question 1, montrer que $q_{\mathbb{J}}(\lambda) = \det(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F})$.

c. En déduire que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $\mathbb{J}$ alors $-\lambda$ l'est aussi.

□

R. 2 a. Les valeurs propres de $\mathbb{J}$ sont les racines de son polynôme caractéristique

$$P_{\mathbb{J}}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{J}).$$

Or on a

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{J}}(\lambda) &= \det\left(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{D}^{-1}(\mathbb{E} + \mathbb{F})\right) \\ &= \det\left(\mathbb{D}^{-1}(\lambda\mathbb{D} - (\mathbb{E} + \mathbb{F}))\right) \\ &= \det(\mathbb{D}^{-1}) \det\left(\lambda\mathbb{D} - (\mathbb{E} + \mathbb{F})\right) \\ &= \det(\mathbb{D}^{-1}) q_{\mathbb{J}}(\lambda). \end{aligned}$$

Comme $\det(\mathbb{D}^{-1}) \neq 0$, les valeurs propres de $\mathbb{J}$ sont aussi les racines de $q_{\mathbb{J}}(\lambda)$.

b. En reprenant les notations de la question 1, et en notant $\mathbb{T}$ la matrice

$$\mathbb{T} = \lambda\mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 & \nu_1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_2 & \lambda\alpha_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \nu_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \beta_n & \lambda\alpha_n \end{pmatrix}$$

la matrice $\mathbb{T}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}(\lambda)\mathbb{T}\mathbb{Q}^{-1}(\lambda)$ correspond alors à

$$\mathbb{T}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 & \frac{1}{\lambda}\nu_1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda\beta_2 & \lambda\alpha_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{\lambda}\nu_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda\beta_n & \lambda\alpha_n \end{pmatrix} = \lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F}.$$

D'après la question 1, on a $\det(\mathbb{T}(\lambda)) = \det(\mathbb{T})$ ce qui donne

$$\det\left(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F}\right) = \det\left(\lambda\mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}\right) = q_{\mathbb{J}}(\lambda).$$

c. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $\mathbb{J}$. On a donc $P_{\mathbb{J}}(\lambda) = 0$. Or on a

$$P_{\mathbb{J}}(\lambda) = \det(\mathbb{D}^{-1}) q_{\mathbb{J}}(\lambda) = \det(\mathbb{D}^{-1}) \det\left(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F}\right)$$

et donc

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{J}}(-\lambda) &= \det(\mathbb{D}^{-1}) \det\left(-\lambda\mathbb{D} + \lambda\mathbb{E} + \frac{1}{\lambda}\mathbb{F}\right) \\ &= (-1)^n \det(\mathbb{D}^{-1}) \det\left(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F}\right) \\ &= (-1)^n P_{\mathbb{J}}(\lambda) \\ &= 0 \end{aligned}$$

c'est à dire $-\lambda$ est aussi une valeur propre de $\mathbb{J}$.

Q. 3 *a. Montrer que les valeurs propres de $\mathcal{L}_1$ sont les racines du polynôme*

$$q_{\mathcal{L}_1}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \mathbb{F}).$$

b. En déduire que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^*, \quad q_{\mathcal{L}_1}(\lambda^2) = \lambda^n q_{\mathbb{J}}(\lambda). \tag{13}$$

□

R. 3 a. Les valeurs propres de $\mathcal{L}_1$ sont les racines de son polynôme caractéristique

$$P_{\mathcal{L}_1}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\lambda\mathbb{I} - \mathcal{L}_1).$$

Or on a

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{L}_1}(\lambda) &= \det\left(\lambda\mathbb{I} - (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}\right) \\ &= \det\left((\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}(\lambda(\mathbb{D} - \mathbb{E}) - \mathbb{F})\right) \\ &= \det((\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}) \det\left(\lambda(\mathbb{D} - \mathbb{E}) - \mathbb{F}\right) \\ &= \det((\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}) q_{\mathcal{L}_1}(\lambda). \end{aligned}$$

Comme $\det((\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}) = \det(\mathbb{D}^{-1}) \neq 0$, les valeurs propres de $\mathcal{L}_1$ sont aussi les racines de $q_{\mathcal{L}_1}(\lambda)$.

b. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On a

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{L}_1}(\lambda^2) &= \det\left(\lambda^2(\mathbb{D} - \mathbb{E}) - \mathbb{F}\right) \\ &= \det\left(\lambda(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F})\right) \\ &= \lambda^n \det\left(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F}\right). \end{aligned}$$

Et donc on obtient bien (13).

Q. 4 *a. Comparer les valeurs propres de $\mathbb{J}$ à celles de $\mathcal{L}_1$.*

b. Une des deux méthodes est-elle à privilégier dans ce cas?

□

R. 4 a. Si λ est une valeur propre de $\mathbb{J}$ alors λ^2 est une valeur propre de $\mathcal{L}_1$. Si $\mu \neq 0$ est une valeur propre de $\mathcal{L}_1$ alors ses racines carrées complexes $\sqrt{\mu}$ et $-\sqrt{\mu}$ sont valeurs propres de $\mathbb{J}$.

b. On a $\rho(\mathcal{L}_1) = \rho(\mathbb{J})^2$, et donc $\rho(\mathcal{L}_1) < 1 \Leftrightarrow \rho(\mathbb{J}) < 1$. Les deux méthodes convergent donc simultanément. Toutefois, lorsqu'il y a convergence, on a

$$\rho(\mathcal{L}_1) = \rho(\mathbb{J})^2 < \rho(\mathbb{J}) < 1$$

et donc, Il faut privilégier la méthode de Gauss-Seidel car une méthode itérative converge d'autant plus vite que le rayon spectral de sa matrice d'itération est petit.
