Exercice 1

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j$, on note $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identitée dont on a permuté les lignes i et j.

Q. 1 *Représenter cette matrice et la définir proprement.* ▫

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.On note $\boldsymbol{A}_{r,:}$ le r-ème vecteur ligne de $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{A}_{:,s}$ le s-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$.

Q. 2 *a. Déterminer les lignes de la matrice $\mathbb{D} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}\mathbb{A}$ en fonction des vecteurs lignes de $\mathbb{A}$.*

b. Déterminer les colonnes de la matrice $\mathbb{E} = \mathbb{A}\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ en fonction des vecteurs colonnes de $\mathbb{A}$. ▫

Q. 3 *a. Calculer le déterminant de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.*

b. Déterminer l'inverse de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$. ▫

Correction

R. 1 On note, dans toute la correction, $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$.
On peut définir cette matrice par ligne,

$$\left\{\begin{array}{lrcll} \forall r \in [\![1,n]\!]\backslash\{i,j\}, & P_{r,s} & = & \delta_{r,s}, & \forall s \in [\![1,n]\!], \\ & P_{i,s} & = & \delta_{j,s}, & \forall s \in [\![1,n]\!], \\ & P_{j,s} & = & \delta_{i,s}, & \forall s \in [\![1,n]\!]. \end{array}\right.$$

ou par colonne

$$\left\{\begin{array}{lrcll} \forall s \in [\![1,n]\!]\backslash\{i,j\}, & P_{r,s} & = & \delta_{r,s}, & \forall r \in [\![1,n]\!], \\ & P_{r,i} & = & \delta_{r,j}, & \forall r \in [\![1,n]\!], \\ & P_{r,j} & = & \delta_{r,i}, & \forall r \in [\![1,n]\!]. \end{array}\right.$$

Attention 1. *Ne pas utiliser les indices i et j qui sont déjà fixés dans la définition de la matrice $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$.*

On peut noter que la matrice $\mathbb{P}$ est symétrique. Pour la représentation, on suppose $i < j$. On effectue une représentation bloc 5×5 avec des blocs diagonaux carrés sachant que tous les blocs non décrits sont nuls:

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \overleftrightarrow{\;i-1\;} & i & \overleftrightarrow{\;j-i-1\;} & j & \overleftrightarrow{\;n-j\;} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c:c:c:c:c} \mathbb{I} & & & & \\ \hdashline & 0 & & 1 & \\ \hdashline & & \mathbb{I} & & \\ \hdashline & 1 & & 0 & \\ \hdashline & & & & \mathbb{I} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow i-1 \\ i \\ \updownarrow j-i-1 \\ j \\ \updownarrow n-j \end{array}$$

R. 2 a. On note $\mathbb{D} = \mathbb{P}\mathbb{A}$. Par définition du produit matriciel on a

$$D_{r,s} = \sum_{k=1}^{n} P_{r,k}A_{k,s}.$$

On obtient, $\forall s \in [\![1,n]\!]$,

$$\left\{\begin{array}{lcl} D_{r,s} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{r,k}A_{k,s} = A_{r,s}, \quad \forall r \in [\![1,n]\!]\backslash\{i,j\}, \\ D_{i,s} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{j,k}A_{k,s} = A_{j,s}, \\ D_{j,s} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}A_{k,s} = A_{i,s}. \end{array}\right.$$

ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{lcll} \boldsymbol{D}_{r,:} & = & \boldsymbol{A}_{r,:}, & \forall r \in [\![1,n]\!]\backslash\{i,j\}, \\ \boldsymbol{D}_{i,:} & = & \boldsymbol{A}_{j,:}, & \\ \boldsymbol{D}_{j,:} & = & \boldsymbol{A}_{i,:}. & \end{array}\right.$$

Note 1. *La notation $\boldsymbol{D}_{i,:}$ correspond au vecteur ligne $(D_{i,1}, \ldots, D_{i,n})$ et $\boldsymbol{D}_{:,j}$ correspond au vecteur colonne* $\begin{pmatrix} D_{1,j} \\ \vdots \\ D_{n,j} \end{pmatrix}$

b. On note $\mathbb{E} = \mathbb{A}\mathbb{P}$. Par définition du produit matriciel et par symétrie de $\mathbb{P}$ on a

$$E_{r,s} = \sum_{k=1}^{n} A_{r,k}P_{k,s} = \sum_{k=1}^{n} A_{r,k}P_{s,k}.$$

Attention 2. *Ne pas utiliser les indices i et j qui sont déjà fixés dans la définition de la matrice $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$.*

On obtient en raisonnant par colonne, $\forall r \in [\![1,n]\!]$,

$$\left\{\begin{array}{lcl} E_{r,s} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_{r,k}\delta_{s,k} = A_{r,s}, \quad \forall s \in [\![1,n]\!]\backslash\{i,j\}, \\ E_{r,i} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_{r,k}\delta_{j,k} = A_{r,j}, \\ E_{r,j} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_{r,k}\delta_{i,k} = A_{r,i}. \end{array}\right.$$

ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{lcll} \boldsymbol{E}_{:,s} & = & \boldsymbol{A}_{:,s}, & \forall s \in [\![1,n]\!]\backslash\{i,j\}, \\ \boldsymbol{E}_{:,i} & = & \boldsymbol{A}_{:,j}, & \\ \boldsymbol{E}_{:,j} & = & \boldsymbol{A}_{:,i}. & \end{array}\right.$$

R. 3 a. $\det(\mathbb{P}) = -1$, si $i \neq j$ et $\det(\mathbb{P}) = 1$ sinon.

b. Immédiat par calcul direct on a $\mathbb{P}\mathbb{P} = \mathbb{I}$ et donc la matrice $\mathbb{P}$ est inversible et $\mathbb{P}^{-1} = \mathbb{P}$.

◇

Exercice 2

Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ avec $v_1 \neq 0$. On note $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice triangulaire inférieure à diagonale unité définie par

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} = \left(\begin{array}{c:cccc} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \hdashline -v_2/v_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -v_n/v_1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (1)$$

Q. 1 *a. Calculer le déterminant de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$.*

b. Déterminer l'inverse de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$. ▫

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $A_{1,1} \neq 0$. On note $\boldsymbol{A}_{:,j}$ le j-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{A}_{i,:}$ son i-ème vecteur ligne. On pose $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_{:,1}$.

Q. 2 *a. Calculer $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}\mathbb{A}$ en fonction des vecteurs lignes de $\mathbb{A}$.*

b. Montrer que la première colonne de $\tilde{\mathbb{A}}$ est le vecteur $(A_{1,1}, 0, \ldots, 0)^{\mathsf{t}}$ i.e.

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = A_{1,1}\boldsymbol{e}_1 \tag{2}$$

où $\boldsymbol{e}_1$ est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

□

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{C})$ la matrice triangulaire inférieure à diagonale unité définie par

$$\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} \end{array}\right) \tag{3}$$

Q. 3 *a. Calculer le déterminant de $\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]}$.*

b. Déterminer l'inverse de $\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]}$ en fonction de l'inverse de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$.

□

Soit $\mathbb{C}$ la matrice bloc définie par

$$\mathbb{C} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{C}_{1,1} & \mathbb{C}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{A} \end{array}\right)$$

où $\mathbb{C}_{1,1} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}_{1,2} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

Q. 4 *Déterminer la matrice produit $\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{A}_1]}\mathbb{C}$ en fonction des matrices $\mathbb{C}_{1,1}$, $\mathbb{C}_{1,2}$ et $\tilde{\mathbb{A}}$.* □

Correction

R. 1 a. La matrice $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$ est triangulaire : son déterminant est donc le produit de ses éléments diagonaux (Proposition B.53 page 211) On a alors $\det(\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}) = 1$.

b. Pour calculer son inverse qui existe puisque $\det(\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}) \neq 0$, on écrit $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$ sous forme bloc :

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline \boldsymbol{e} & & \mathbb{I}_{n-1} & \end{array}\right)$$

avec $\boldsymbol{e} = (-v_2/v_1, \ldots, -v_n/v_1)^{\mathsf{t}} \in \mathbb{C}^{n-1}$ On note $\mathbb{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son inverse qui s'écrit avec la même structure bloc

$$\mathbb{X} = \left(\begin{array}{c|c} a & \boldsymbol{b}^* \\ \hline \boldsymbol{c} & \mathbb{D} \end{array}\right)$$

avec $a \in \mathbb{C}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^{n-1}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$.
La matrice $\mathbb{X}$ est donc solution de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\mathbb{X} = \mathbb{I}$. Grace à l'écriture bloc des matrices on en déduit rapidement la matrice $\mathbb{X}$. En effet, en utilisant les produits blocs des matrices, on obtient

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\mathbb{X} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \boldsymbol{0}_{n-1}^{\mathsf{t}} \\ \hline \boldsymbol{e} & \mathbb{I}_{n-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} a & \boldsymbol{b}^* \\ \hline \boldsymbol{c} & \mathbb{D} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 \times a & 1 \times \boldsymbol{b}^* + \boldsymbol{0}_{n-1}^{\mathsf{t}} \times \mathbb{D} \\ \hline \boldsymbol{e} \times a + \mathbb{I}_{n-1} \times \boldsymbol{c} & \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{b}^* + \mathbb{I}_{n-1} \times \mathbb{D} \end{array}\right)$$
$$= \left(\begin{array}{c|c} a & \boldsymbol{b}^* \\ \hline a\boldsymbol{e} + \boldsymbol{c} & \boldsymbol{e}\boldsymbol{b}^* + \mathbb{D} \end{array}\right)$$

Comme $\mathbb{X}$ est l'inverse de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$, on a $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\mathbb{X} = \mathbb{I}$ et donc en écriture bloc

$$\left(\begin{array}{c|c} a & \boldsymbol{b}^* \\ \hline a\boldsymbol{e} + \boldsymbol{c} & \boldsymbol{e}\boldsymbol{b}^* + \mathbb{D} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \boldsymbol{0}_{n-1}^{\mathsf{t}} \\ \hline \boldsymbol{0}_{n-1} & \mathbb{I}_{n-1} \end{array}\right).$$

Ceci revient à résoudre les 4 équations

$$a = 1, \quad \boldsymbol{b}^* = \boldsymbol{0}_{n-1}^{\mathsf{t}}, \quad a\boldsymbol{e} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}_{n-1} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{e}\boldsymbol{b}^* + \mathbb{D} = \mathbb{I}_{n-1}$$

qui donnent immédiatement $a = 1$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}_{n-1}$, $\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{e}$ et $\mathbb{D} = \mathbb{I}_{n-1}$. On obtient le résultat suivant

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline -\boldsymbol{e} & & \mathbb{I}_{n-1} & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline \boldsymbol{e} & & \mathbb{I}_{n-1} & \end{array}\right) = \mathbb{I}_n.$$

Note 2. *Il aurait été plus rapide d'utiliser la Proposition B.54, page 211.*

R. 2 a. Pour simplifier les notations, on note $\mathbb{E} = \mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}$. Par définition du produit de deux matrices on a

$$\tilde{A}_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} E_{i,k}A_{k,j}, \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2.$$

Quand $i = 1$, on a par construction $E_{1,k} = \delta_{1,k}$ et donc

$$\tilde{A}_{1,j} = A_{1,j}, \ \forall j \in [\![1,n]\!] \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{A}}_{1,:} = \boldsymbol{A}_{1,:}. \tag{4}$$

Pour $i \geqslant 2$, on a $E_{i,1} = -\frac{v_i}{v_1}$ et $E_{i,k} = \delta_{i,k}$, $\forall k \in [\![2,n]\!]$. On obtient alors pour tout $j \in [\![1,n]\!]$

$$\tilde{A}_{i,j} = E_{i,1}A_{1,j} + \sum_{k=2}^{n} E_{i,k}A_{k,j} = -\frac{v_i}{v_1}A_{1,j} + \sum_{k=2}^{n} \delta_{i,k}A_{k,j} = -\frac{v_i}{v_1}A_{1,j} + A_{i,j}$$

ce qui donne pour tout $i \in [\![2,n]\!]$

$$\tilde{A}_{i,j} = A_{i,j} - \frac{v_i}{v_1}A_{1,j}, \ \forall j \in [\![1,n]\!] \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{A}}_{i,:} = -\frac{v_i}{v_1}\boldsymbol{A}_{1,:} + \boldsymbol{A}_{i,:} \tag{5}$$

En conclusion, la matrice $\tilde{\mathbb{A}}$ s'écrit

$$\tilde{\mathbb{A}} = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{A}_{1,:} \\ \hline \boldsymbol{A}_{2,:} - (v_2/v_1)\boldsymbol{A}_{1,:} \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{A}_{n,:} - (v_n/v_1)\boldsymbol{A}_{1,:} \end{array}\right)$$

b. De (4), on tire $\tilde{A}_{1,1} = A_{1,1}$. A partir de (5) on obtient pour tout $i \in [\![2,n]\!]$, $\tilde{A}_{i,1} = A_{i,1} - \frac{v_i}{v_1}A_{1,1}$. Par construction $v_j = A_{j,1}$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, ce qui donne $\tilde{A}_{i,1} = 0$.
La première colonne de $\tilde{\mathbb{A}}$ est $(1, 0, \ldots, 0)^{\mathsf{t}}$.

R. 3 a. La matrice $\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]}$ est triangulaire inférieure. Son déterminant est donc le produit de ses éléments diagonaux. Comme cette matrice est à diagonale unité (i.e. tous ses éléments diagonaux valent 1), on obtient $\det \mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]} = 1$.

Une autre manière de le démontrer. On peut voir que la matrice $\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]}$ est bloc-diagonale. D'après la Proposition B.54, page 211, son déterminant est le produit des déterminant des blocs diagonaux : $\det \mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]} = \det \mathbb{I}_m \times \det \mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} = 1$.

b. On note $\mathbb{X}$ l'inverse de la matrice $\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]}$. Cette matrice s'écrit avec la même structure bloc

$$\mathbb{X} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{1,1} & \mathbb{X}_{1,2} \\ \hline \mathbb{X}_{2,1} & \mathbb{X}_{2,2} \end{array}\right) \text{ avec } \mathbb{X}_{1,1} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C}) \text{ et } \mathbb{X}_{2,2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

On a donc $\mathbb{X}\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]} = \mathbb{I}_{m+n}$ c'est à dire en écriture bloc

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{1,1} & \mathbb{X}_{1,2} \\ \hline \mathbb{X}_{2,1} & \mathbb{X}_{2,2} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) =$$

On doit donc résoudre les 4 équations suivantes :

$$\mathbb{X}_{1,1}\mathbb{I}_m = \mathbb{I}_m, \quad \mathbb{X}_{1,2}\mathbb{I}_n = \mathbb{O}, \quad \mathbb{X}_{2,1}\mathbb{I}_m = \mathbb{O} \quad \text{et} \quad \mathbb{X}_{2,2}\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} = \mathbb{I}_n.$$

Comme la matrice $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$ est inversible, on obtient

$$\mathbb{X} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \left(\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\right)^{-1} \end{array}\right)$$

Note 3. *Plus rapidement, comme la matrice $\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]}$ est bloc-diagonale, on en déduit (Proposition B.54, page 211) directement le résultat.*

R. 4 Le produit $\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]}\mathbb{C}$ peut s'effectuer par bloc car les blocs sont de dimensions compatibles et on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{[m,\boldsymbol{v}]}\mathbb{C} &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{E} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{C}_{1,1} & \mathbb{C}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{A} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m\mathbb{C}_{1,1} + \mathbb{O}_{m,n}\mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_m\mathbb{C}_{1,2} + \mathbb{O}_{m,n}\mathbb{A} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m}\mathbb{C}_{1,1} + \mathbb{E}\mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{O}_{n,m}\mathbb{C}_{1,2} + \mathbb{E}\mathbb{A} \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{C}_{1,1} & \mathbb{C}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{E}\mathbb{A} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{C}_{1,1} & \mathbb{C}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \tilde{\mathbb{A}} \end{array}\right)
\end{aligned}$$

◇

Exercice 3

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible.

Q. 1 *Montrer qu'il existe une matrice $\mathbb{G} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det(\mathbb{G})| = 1$ et $\mathbb{G}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = \alpha\boldsymbol{e}_1$ avec $\alpha \neq 0$ et $\boldsymbol{e}_1$ premier vecteur de la base canonique de C^n.* □

Q. 2 *a. Montrer par récurrence sur l'ordre des matrices que pour toute matrice $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, il existe une matrice $\mathbb{S}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det \mathbb{S}_n| = 1$ et $\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n$ avec $\mathbb{U}_n$ matrice triangulaire supérieure inversible.*

b. Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$. En supposant connue la décompostion précédente $\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n$, expliquer comment résoudre le système $\mathbb{A}_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

□

Q. 3 *Que peut-on dire si $\mathbb{A}$ est non inversible?* □

Correction

R. 1 D'après le Lemme 3.3, si $A_{1,1} \neq 0$ le résultat est immédiat. Dans l'énoncé rien ne vient corroborer cette hypothèse. Toutefois, comme la matrice $\mathbb{A}$ est inversible, il existe au moins un $p \in [\![1, n]\!]$ tel que $A_{p,1} \neq 0$. On peut même choisir le premier indice p tel que $|A_{p,1}| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |A_{i,1}| > 0$ (pivot de l'algorithme de Gauss-Jordan). On note $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[1,p]}$ la matrice de permutation des lignes 1 et p (voir exercice 3.1.4, page 64). De plus on a

$$|\det \mathbb{P}| = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}^{-1} = \mathbb{P}.$$

Par construction $(\mathbb{P}\mathbb{A})_{1,1} = A_{p,1} \neq 0$, et on peut alors appliquer le Lemme 3.3 à la matrice $(\mathbb{P}\mathbb{A})$ pour obtenir l'existence d'une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\det \mathbb{E} = 1$ et telle que

$$\mathbb{E}(\mathbb{P}\mathbb{A})\boldsymbol{e}_1 = A_{p,1}\boldsymbol{e}_1.$$

En posant $\mathbb{G} = \mathbb{E}\mathbb{P}$ et $\alpha = A_{p,1}$, on obtient bien $\mathbb{G}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = \alpha\boldsymbol{e}_1$. De plus, on a

$$|\det \mathbb{G}| = |\det(\mathbb{E}\mathbb{P})| = |\det \mathbb{E} \times \det \mathbb{P}| = 1.$$

Remarque 1. *La matrice $\mathbb{G}$ étant inversible, on a*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \mathbb{G}\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \mathbb{G}\boldsymbol{b}$$

ce qui correspond à la première permutation/élimination de l'algorithme de Gauss-Jordan.

R. 2 a. On veut démontrer par récurrence la propriété $(\mathcal{P}_n)$,

$$(\mathcal{P}_n) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \text{ inversible } \exists \mathbb{S}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \ |\det \mathbb{S}_n| = 1, \text{ tel que} \\ \text{la matrice } \mathbb{U}_n = \mathbb{S}_n\mathbb{A} \text{ soit une triangulaire supérieure inversible} \end{array} \right.$$

Initialisation : Pour $n = 2$. Soit $\mathbb{A}_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ inversible. En utilisant la question précédente il existe $\mathbb{G}_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $|\det \mathbb{G}_2| = 1$ et $\mathbb{G}_2\mathbb{A}_2\boldsymbol{e}_1 = \alpha\boldsymbol{e}_1$ avec $\alpha \neq 0$ et $\boldsymbol{e}_1$ premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^2$. On note $\mathbb{U}_2 = \mathbb{G}_2\mathbb{A}_2$. Cette matrice s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{U}_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \bullet \\ 0 & \bullet \end{pmatrix}$$

et elle est triangulaire supérieure. Les matrices $\mathbb{G}_2$ et $\mathbb{A}_2$ étant inversible, leur produit $\mathbb{U}_2$ l'est aussi. La proposition $(\mathcal{P}_2)$ est donc vérifiée avec $\mathbb{S}_2 = \mathbb{G}_2$.

Hérédité : Soit $n \geqslant 3$. On suppose que $(\mathcal{P}_{n-1})$ est vraie. Montrons que $(\mathcal{P}_n)$ est vérifiée.
Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible. En utilisant la question précédente il existe $\mathbb{G}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det \mathbb{G}_n| = 1$ et $\mathbb{G}_n\mathbb{A}_n\boldsymbol{e}_1 = \alpha_n\boldsymbol{e}_1$ avec $\alpha_n \neq 0$ et $\boldsymbol{e}_1$ premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On note $\mathbb{V}_n = \mathbb{G}_n\mathbb{A}_n$. Cette matrice s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{V}_n = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_n & \bullet & \dots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \dots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \dots & \bullet \end{array}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c|c} \alpha_n & \boldsymbol{c}_{n-1}^* \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{B}_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right)$$

où $\boldsymbol{c}_{n-1} \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $\mathbb{B}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. Comme $\mathbb{G}_n$ et $\mathbb{A}_n$ sont inversibles, $\mathbb{V}_n$ l'est aussi. On en déduit donc que $\mathbb{B}_{n-1}$ est inversible car $0 \neq \det \mathbb{V}_n = \alpha_n \times \det \mathbb{B}_{n-1}$ et $\alpha_n \neq 0$.
On peut donc utiliser la propriété $(\mathcal{P}_{n-1})$ (hyp. de récurrence) sur la matrice $\mathbb{B}_{n-1}$: il existe donc $\mathbb{S}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$, avec $|\det \mathbb{S}_{n-1}| = 1$, tel que la matrice $\mathbb{U}_{n-1} = \mathbb{S}_{n-1}\mathbb{B}_{n-1}$ soit une triangulaire supérieure inversible.
Soit $\mathbb{Q}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\mathbb{Q}_n = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{S}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}_n\mathbb{G}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{Q}_n\mathbb{V}_n &= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{S}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \alpha_n & \boldsymbol{c}_{n-1}^* \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{B}_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \alpha_n & \boldsymbol{c}_{n-1}^* \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{S}_{n-1}\mathbb{B}_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_n & \boldsymbol{c}_{n-1}^* \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{U}_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{U}_n
\end{aligned}$$

La matrice $\mathbb{U}_n$ est triangulaire supérieure inversible car $\mathbb{U}_{n-1}$ l'est aussi et $\alpha_n \neq 0$.
On pose $\mathbb{S}_n = \mathbb{Q}_n\mathbb{G}_n$. On a donc

$$\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n.$$

De plus, comme on a $\det \mathbb{S}_n = \det \mathbb{Q}_n \times \det \mathbb{G}_n$, et $\det \mathbb{Q}_n = \det \mathbb{S}_{n-1}$, on obtient, en utilisant $|\det \mathbb{G}_n| = 1$ et l'hypothèse de récurrence $|\det \mathbb{S}_{n-1}| = 1$, que

$$|\det \mathbb{S}_n| = 1.$$

Ceci prouve la véracité de la proposition $(\mathcal{P}_n)$.

b. Comme $\mathbb{S}_n$ est inversible, on a en multipliant à gauche le système par $\mathbb{S}_n$

$$\mathbb{A}_n \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \mathbb{S}_n\mathbb{A}_n\boldsymbol{x} = \mathbb{S}_n\boldsymbol{b} \iff \mathbb{U}_n\boldsymbol{x} = \mathbb{S}_n\boldsymbol{b}$$

Pour déterminer le vecteur $\boldsymbol{x}$, on peut alors résoudre le dernier système par l'algorithme de remontée.

R. 3 Si $\mathbb{A}$ est non inversible, alors dans la première question nous ne sommes pas assurés d'avoir $\alpha \neq 0$. Cependant l'existence de la matrice $\mathbb{G}$ reste avérée.
Pour la deuxième question, le seul changement vient du fait que la matrice $\mathbb{U}_n$ n'est plus inversible.

◇

Exercice 4

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les sous-matrices principales d'ordre i, notées Δ_i, $i \in [\![1, n]\!]$ (voir Definition B.48, page 209) sont inversibles.
Montrer qu'il existe des matrices $\mathbb{E}^{[k]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $k \in [\![1, n-1]\!]$, triangulaires inférieures à diagonale unité telles que la matrice $\mathbb{U}$ définie par

$$\mathbb{U} = \mathbb{E}^{[n-1]} \cdots \mathbb{E}^{[1]}\mathbb{A}$$

soit triangulaire supérieure avec $U_{i,i} = \det \Delta_i/(U_{1,1} \times \cdots \times U_{i-1,i-1})$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.

Correction
On note $\mathbb{A}^{[0]} = \mathbb{A}$. On va démontrer par récurrence finie sur $k \in [\![1, n-1]\!]$, qu'il existe une matrice $\mathbb{E}^{[k]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité, telle que la matrice $\mathbb{A}^{[k]}$ définie itérativement par

$$\mathbb{A}^{[k]} = \mathbb{E}^{[k]}\mathbb{A}^{[k-1]}$$

s'écrit sous la forme bloc

$$\mathbb{A}^{[k]} = \left(\begin{array}{cccc|ccc}
\alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\
0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \bullet & \vdots & & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & \alpha_k & \bullet & \cdots & \bullet \\
\hline
0 & \ldots & \ldots & 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \ldots & \ldots & 0 & \bullet & \cdots & \bullet
\end{array}\right) \qquad (6)$$

avec $\alpha_1 = A_{1,1}$ et $\forall i \in [\![2, k]\!]$, $\alpha_i = \det \Delta_i/(\alpha_1 \times \cdots \times \alpha_{i-1})$.

Initialisation $(k = 1)$**:** On a $A_{1,1} \neq 0$ car $\Delta_1 = A_{1,1}$ et $\det \Delta_1 \neq 0$. D'après le Lemme 3.3, il existe une matrice $\mathbb{E}^{[1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité, telle que $\mathbb{E}^{[1]}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = A_{1,1}\boldsymbol{e}_1$ où $\boldsymbol{e}_1$ est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On a alors

$$\mathbb{A}^{[1]} = \mathbb{E}^{[1]}\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|ccc}
\alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet \\
\hline
0 & \bullet & \cdots & \bullet \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \bullet & \cdots & \bullet
\end{array}\right)$$

avec $\alpha_1 = A_{1,1} = \det \Delta_1$.

Hérédité $(k < n-1)$**:** Supposons construite la matrice $\mathbb{A}^{[k]}$. Il existe donc k matrices, $\mathbb{E}^{[1]}, \ldots, \mathbb{E}^{[k]}$, triangulaires inférieures à diagonale unité telles que

$$\mathbb{A}^{[k]} = \mathbb{E}^{[k]} \cdots \mathbb{E}^{[1]}\mathbb{A}.$$

- On va montrer que $\alpha_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} A^{[k]}_{k+1,k+1} \neq 0$. Pour celà, on réécrit la matrice $\mathbb{A}^{[k]}$ sous forme bloc, avec comme premier bloc diagonale le bloc de dimension $k+1$:

$$\mathbb{A}^{[k]} = \left(\begin{array}{ccccc|ccc}
\alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\
0 & \ddots & \ddots & \vdots & \bullet & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \bullet & \bullet & \vdots & & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & \alpha_k & \bullet & \vdots & \ldots & \vdots \\
0 & \ldots & \ldots & 0 & \alpha_{k+1} & \bullet & \cdots & \bullet \\
\hline
0 & \cdots & \cdots & 0 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\
\vdots & & & \vdots & \bullet & \vdots & & \vdots \\
0 & \ldots & \ldots & 0 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet
\end{array}\right)$$

La matrice $\mathbb{G}^{[k]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}^{[k]} \cdots \mathbb{E}^{[1]}$ est triangulaire inférieure à diagonale unité car produit de matrices triangulaires inférieures à diagonale unité (voir Exercice **??**, page **??**). Le produit de $\mathbb{G}^{[k]}\mathbb{A}$ s'écrit alors sous forme bloc

$$\mathbb{G}^{[k]}\mathbb{A} = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\bullet & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & \vdots \\
\bullet & \ldots & \bullet & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\hline
\bullet & \ldots & \ldots & \bullet & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
\bullet & \ldots & \ldots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & 1
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
 & \Delta_{k+1} & & \bullet & \cdots & \bullet \\
 & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & \bullet & \cdots & \bullet \\
\hline
\bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet
\end{array}\right)$$

Comme $\mathbb{A}^{[k]} = \mathbb{G}^{[k]}\mathbb{A}$, en utilisant les règles de multiplication par blocs des matrices on obtient

$$\begin{pmatrix}
\alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet \\
0 & \ddots & \ddots & \vdots & \bullet \\
\vdots & \ddots & \ddots & \bullet & \bullet \\
0 & \ldots & 0 & \alpha_k & \bullet \\
0 & \ldots & \ldots & 0 & \alpha_{k+1}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 \\
\bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
\bullet & \ldots & \bullet & 1
\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta_{k+1} \end{pmatrix}$$

En prenant le déterminant de cette dernière équation, et en utilisant le fait que le determinant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux, on obtient

$$\prod_{i=1}^{k+1} \alpha_i = \det \Delta_{k+1}.$$

Par hypothèse Δ_{k+1} inversible , ce qui entraine $\det \Delta_{k+1} \neq 0$ et donc $\alpha_i \neq 0$, $\forall i \in [\![1, k+1]\!]$. On a donc

$$\alpha_{k+1} = \frac{\det \Delta_{k+1}}{\prod_{i=1}^{k} \alpha_i} \neq 0.$$

- Montrons l'existence d'une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité permettant d'éliminer les termes sous diagonaux de la colonne $k+1$ de $\mathbb{A}^{[k]}$.

Revenons à l'écriture bloc de premier bloc diagonal de dimension k. On a

$$\mathbb{A}^{[k]} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_k & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_{k+1} & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \end{array}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U}^{[k]} & \mathbb{F}^{[k]} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{V}^{[k]} \end{array}\right)$$

Nous sommes exactement dans le cas de figure étudié dans l'exercice 3.1.3, page 61. En effet, avec les notations de cet exercice et si l'on pose $\boldsymbol{v} = \mathbb{V}^{[k]}_{:,1} = (A^{[k]}_{k+1,k+1}, \ldots, A^{[k]}_{n,k+1})^{\mathsf{t}} \in \mathbb{C}^{n-(k+1)}$ (en bleu dans l'expression de $\mathbb{A}^{[k]}$ précédente) on a alors $v_1 = A^{[k]}_{k+1,k+1} = \alpha_{k+1} \neq 0$ et l'on peut définir la matrice $\mathbb{E}^{[k+1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité, par

$$\mathbb{E}^{[k+1]} = \mathbb{E}^{[k,\boldsymbol{v}]} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_k & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} \end{array}\right)$$

avec $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité (définie dans l'exercice 3.1.3) telle que

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\mathbb{V}^{[k]} = \begin{pmatrix} \alpha_{k+1} & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^{[k+1]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}^{[k+1]}\mathbb{A}^{[k]} &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_k & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U}^{[k]} & \mathbb{F}^{[k]} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{V}^{[k]} \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U}^{[k]} & \mathbb{F}^{[k]} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\mathbb{V}^{[k]} \end{array}\right) \end{aligned}$$

et donc $\mathbb{A}^{[k+1]}$ s'écrit bien sous la forme (6) au rang $k+1$.

Final $(k = n-1)$**:** On a donc

$$\mathbb{U} = \mathbb{A}^{[n-1]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{E}^{[1]} \times \mathbb{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{n-1} & \bullet \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & \bullet \end{array}\right) \tag{7}$$

où pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ les matrices $\mathbb{E}^{[k]}$ sont triangulaires inférieures à diagonale unité.

Pour achever l'exercice, il reste à démontrer que

$$U_{n,n} = \det \Delta_n / (U_{1,1} \times \cdots \times U_{n-1,n-1}).$$

En effet, en prenant le déterminant dans (7) on obtient

$$\det\left(\mathbb{E}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{E}^{[1]} \times \mathbb{A}\right) = \det \left(\begin{array}{cccc|c} U_{1,1} & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & U_{n-1,n-1} & \bullet \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & U_{n,n} \end{array}\right)$$

Comme le déterminant d'un produit de matrices est égale au produit des déterminants des matrices on a

$$\begin{aligned} \det\left(\mathbb{E}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{E}^{[1]} \times \mathbb{A}\right) &= \det \mathbb{E}^{[n-1]} \times \cdots \times \det \mathbb{E}^{[1]} \times \det \mathbb{A} \\ &= \det \mathbb{A} \end{aligned}$$

car les matrices $\mathbb{E}^{[k]}$ sont triangulaires inférieures à diagonale unité et donc $\det \mathbb{E}^{[k]} = 1$, $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$. De plus, le déterminant d'une matrice traingulaire supérieure est égale au produit de ses coefficients diagonaux et donc

$$\det \left(\begin{array}{cccc|c} U_{1,1} & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & U_{n-1,n-1} & \bullet \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & U_{n,n} \end{array}\right) = U_{n,n} \prod_{k=1}^{n-1} Uk,k.$$

On a alors

$$\det \mathbb{A} = \det \Delta_n = U_{n,n} \prod_{k=1}^{n-1} Uk,k \neq 0.$$

◇

Exercice 5

Démontrer le résultat suivant:

> **Corollaire.** *Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une factorisation $\mathbb{LDL}^*$ avec $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs **si et seulement si** la matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive.*

Correction

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{LDL}^*$ avec $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice diagonale à coeffcients diagonaux strictement positifs.
La matrice $\mathbb{A}$ est alors hermitienne car

$$\mathbb{A}^* = (\mathbb{LDL}^*)^* = \mathbb{L}^{**}\mathbb{D}^*\mathbb{L}^* = \mathbb{LDL}^*.$$

De plus $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ on a

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{LDL}^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{DL}^*\boldsymbol{x}, \mathbb{L}^*\boldsymbol{x} \rangle$$

On pose $\boldsymbol{y} = \mathbb{L}^*\boldsymbol{x} \neq 0$ car $\boldsymbol{x} \neq 0$ et $\mathbb{L}^*$ inversible. On obtient alors

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{D}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} D_{i,i}|y_i|^2 > 0$$

car $\mathbb{D}$ diagonale, $D_{i,i} > 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$ et $\boldsymbol{y} \neq 0$.
La matrice hermitienne $\mathbb{A}$ est donc bien définie positive.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive.
D'après le Corollaire 3.8, page 75, la matrice $\mathbb{A}$ admet une unique factorisation $\mathbb{LU}$ et donc d'après le Théorème 3.10, page 81, la matrice hermitienne $\mathbb{A}$ peut s'écrire sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{LDL}^*$ où $\mathbb{D}$ est diagonale à coefficients réels et $\mathbb{L}$ triangulaire inférieure à diagonale unité. Il reste à démontrer que $D_{i,i} > 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.
Comme $\mathbb{A}$ est définie positive, on a $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$, $\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle > 0$. Or on a

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{LDL}^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{DL}^*\boldsymbol{x}, \mathbb{L}^*\boldsymbol{x} \rangle$$

On note $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$, la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et on rappelle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\langle \mathbb{D}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i \rangle = D_{i,i}$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. En choisissant $\boldsymbol{x} = (\mathbb{L}^*)^{-1}\boldsymbol{e}_i \neq 0$, on obtient alors

$$\langle \mathbb{DL}^*\boldsymbol{x}, \mathbb{L}^*\boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{D}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i \rangle = D_{i,i} > 0.$$

◇

Exercice 6

Démontrer le résultat suivant:

Théorème (Factorisation de Cholesky)**.** *La matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une factorisation régulière de Cholesky* ***si et seulement si*** *la matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive. Dans ce cas, elle admet une unique factorisation positive.*

Correction

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation régulière de Cholesky $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$ avec $\mathbb{B}$ est une matrice triangulaire inférieure inversible.
La matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne car

$$\mathbb{A}^* = (\mathbb{B}\mathbb{B}^*)^* = (\mathbb{B}^*)^*\mathbb{B}^* = \mathbb{B}\mathbb{B}^* = \mathbb{A}.$$

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$, on a

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{B}\mathbb{B}^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{B}^*\boldsymbol{x}, \mathbb{B}^*\boldsymbol{x} \rangle = \|\mathbb{B}^*\boldsymbol{x}\|^2 > 0$$

car $\mathbb{B}^*\boldsymbol{x} \neq 0$ ($\mathbb{B}^*$ inversible et $\boldsymbol{x} \neq 0$). Donc la matrice $\mathbb{A}$ est bien hermitienne définie positive.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive.
D'après le Corollaire 3.10, page 81, il existe alors une matrice $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité et une matrice $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficient strictement positifs telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*.$$

On note $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale inversible vérifiant $\mathbb{H}^2 = \mathbb{D}$ (i.e. $H_{i,i} = \pm\sqrt{D_{i,i}} \neq 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$). On a alors

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{H}\mathbb{H}\mathbb{L}^* = (\mathbb{L}\mathbb{H})(\mathbb{L}\mathbb{H})^*$$

En posant $\mathbb{B} = \mathbb{L}\mathbb{H}$, la matrice $\mathbb{B}$ est bien triangulaire inférieure inversible car produit d'une matrice triangulaire inférieure inversible par une matrice diagonale inversible et on a $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$.

Montrons qu'une factorisation positive de Cholesky est unique.
Soient $\mathbb{B}_1$ et $\mathbb{B}_2$ deux factorisations positives de la matrice $\mathbb{A}$, on a donc

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}_1\mathbb{B}_1^* = \mathbb{B}_2\mathbb{B}_2^*.$$

En multipliant à gauche par $\mathbb{B}_2^{-1}$ et à droite par $(\mathbb{B}_1^*)^{-1}$ cette équation on obtient

$$\mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2^*(\mathbb{B}_1^*)^{-1} = \mathbb{B}_2^*(\mathbb{B}_1^{-1})^* = (\mathbb{B}_1^{-1}\mathbb{B}_2)^*$$

En notant $\mathbb{G} = \mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1$, on tire de l'équation précédente

$$\mathbb{G} = (\mathbb{G}^{-1})^*. \tag{8}$$

On déduit de la (voir Proposition B.46, page 209), que l'inverse d'une matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux réels strictement positifs est aussi une matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux réels strictement positifs. De la (voir Proposition B.45, page 209), on obtient que le produit de matrices triangulaires inférieures à coefficients diagonaux réels strictement positifs reste triangulaire inférieure à coefficients diagonaux réels strictement positifs, on en déduit que les matrices $\mathbb{G} = \mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1$ et $\mathbb{G}^{-1} = \mathbb{B}_1^{-1}\mathbb{B}_2$ sont triangulaires inférieures à coefficients diagonaux réels strictement positifs. Or l'équation (8) identifie la matrice triangulaire inférieure $\mathbb{G}$ à la matrice triangulaire supérieure $(\mathbb{G}^{-1})^*$: ce sont donc des matrices diagonales à coefficients diagonaux réels strictement positifs et on a alors $(\mathbb{G}^{-1})^* = \mathbb{G}^{-1}$. De l'équation (8), on obtient alors $\mathbb{G} = \mathbb{G}^{-1}$, c'est à dire $\mathbb{G} = \mathbb{I} = \mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1$ et donc $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2$. ◇

Exercice 7

Démontrer le résultat suivant:

Propriété. *Toute matrice élémentaire de Householder est hermitienne et unitaire.*

Correction
Pour simplifier, on note $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\boldsymbol{u})$. Cette matrice est hermitienne car

$$\mathbb{H}^* = (\mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*)^* = \mathbb{I} - 2(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*)^* = \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^* = \mathbb{H}.$$

Montrons qu'elle est unitaire (i.e. $\mathbb{H}^*\mathbb{H} = \mathbb{I}$). On a

$$\begin{aligned}\mathbb{H}^*\mathbb{H} = \mathbb{H}\mathbb{H} &= (\mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*)(\mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*)\\ &= \mathbb{I} - 4\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^* + 4\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*.\end{aligned}$$

Or on a $\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u} = \|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$ par hypothèse et donc

$$\mathbb{H}^*\mathbb{H} = \mathbb{I} - 4\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^* + 4\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}^* = \mathbb{I}.$$

◇

Exercice 8

Démontrer le résultat suivant:

Théorème. *Soient $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2$ et $\arg\alpha = -\arg\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ $[\pi]$. On a alors*

$$\mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}\|_2}\right)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}. \tag{9}$$

Correction
Pour simplifier, on note $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\boldsymbol{u})$. Cette matrice est hermitienne car

$$\mathbb{H}^* = \left(\mathbb{I} - 2\frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*}{\|u\|_2^2}\right)^* = \mathbb{I} - 2\frac{(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*)^*}{\|u\|_2^2} = \mathbb{I} - 2\frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*}{\|u\|_2^2} = \mathbb{H}.$$

Montrons qu'elle est unitaire (i.e. $\mathbb{H}^*\mathbb{H} = \mathbb{I}$). On a

$$\begin{aligned}\mathbb{H}^*\mathbb{H} = \mathbb{H}\mathbb{H} &= \left(\mathbb{I} - 2\frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*}{\|u\|_2^2}\right)\left(\mathbb{I} - 2\frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*}{\|u\|_2^2}\right)\\ &= \mathbb{I} - 4\frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*}{\|u\|_2^2} + 4\frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*}{\|u\|_2^2}.\end{aligned}$$

Or $\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u} = \|\boldsymbol{u}\|_2^2$, ce qui donne

$$\mathbb{H}^*\mathbb{H} = \mathbb{I} - 4\frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*}{\|u\|_2^2} + 4\frac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}^*}{\|u\|_2^2} = \mathbb{I}.$$

◇

Exercice 9

Démontrer le résultat suivant:

Propriété. *Soient $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ et $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n$, $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$. On note $\boldsymbol{x}_{\|} = \operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}\rangle\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{x}_{\perp} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\|}$. On a alors*

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x}_{\perp} + \boldsymbol{x}_{\|}) = \boldsymbol{x}_{\perp} - \boldsymbol{x}_{\|}. \tag{10}$$

et

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \quad si\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}\rangle = 0. \tag{11}$$

Correction
On note que par construction $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_\perp \rangle = 0$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x}_\perp + \boldsymbol{x}_\parallel) = (\mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*)(\boldsymbol{x}_\perp + \boldsymbol{x}_\parallel) &= \boldsymbol{x}_\perp + \boldsymbol{x}_\parallel - 2\boldsymbol{u}\underbrace{\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{x}_\perp}_{=0} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{x}_\parallel \\
&= \boldsymbol{x}_\perp + \boldsymbol{x}_\parallel - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}\rangle = \boldsymbol{x}_\perp + \boldsymbol{x}_\parallel - 2\boldsymbol{u}\underbrace{\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u}}_{=1}\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{x} \\
&= \boldsymbol{x}_\perp + \boldsymbol{x}_\parallel - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_\perp + \boldsymbol{x}_\parallel - 2\boldsymbol{x}_\parallel \\
&= \boldsymbol{x}_\perp - \boldsymbol{x}_\parallel.
\end{aligned}$$

Si $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle = 0$ alors $\boldsymbol{x}_\parallel = 0$ et $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_\perp$. ◇

Exercice 10

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$.

Q. 1 *Ecrire la fonction algorithmique* Householder *permettant de retourner une matrice de Householder $\mathbb{H}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$. Le choix du α est fait par le paramètre δ (0 ou 1) de telle sorte que $\arg\alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle) + \delta\pi$ avec $|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2$.*
Des fonctions comme dot$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *(produit scalaire de deux vecteurs),* norm$(\boldsymbol{a})$ *(norme 2 d'un vecteur),* arg(z) *(argument d'un nombre complexe),* matprod$(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ *(produit de deux matrices),* ctranspose$(\mathbb{A})$ *(adjoint d'une matrice), ... pourront être utilisées* □

Q. 2 *Proposer un programme permettant de tester cette fonction. On pourra utiliser la fonction* vecrand(n) *retournant un vecteur aléatoire de $\mathbb{C}^n$, les parties réelles et imaginaires de chacune de ses composantes étant dans $]0, 1[$ (loi uniforme).* □

Q. 3 *Proposer un programme permettant de vérifier que $\delta = 1$ est le "meilleur" choix.* □

Correction

R. 1 Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires de $\mathbb{C}^n$.

Les données du problème sont $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et δ. On veut calculer α et la matrice $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})$.

Algorithm 1 Calcul du α et de la matrice de Householder $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})$ telle que $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$.

Données : $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$: deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$ non nuls et non colinéaires.
δ : 0 ou 1, permet de déterminer α.
Résultat : $\mathbb{H}$: matrice de Householder dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
α : nombre complexe, de module $\|\boldsymbol{a}\|_2$ et d'argument $-\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle) + \delta\pi$.

```
Function [H, α] ← Householder ( a, b, δ )
  ab ← dot(a, b)                                ▷ dot produit scalaire dans ℂ.
  α ← norm(a) ∗ exp(i ∗ (δ ∗ π − arg(ab)))
  u ← a − α ∗ b
  u ← u/norm(u)
  H ← eye(n) − 2 ∗ matprod(u, ctranspose(u))
end Function
```

R. 2

```
n ← 100
a ← vecrand(n)
b ← vecrand(n)
b ← b/norm(b, 2)
[H, α] ← Householder(a, b, 0)
error ← norm(H ∗ a − α ∗ b, 2)
```


R. 3

```
n ← 100
a ← vecrand(n)
b ← a + 1e − 6 ∗ vecrand(n)
b ← b/norm(b, 2)
[H1, α1] ← Householder(a, b, 1)
[H0, α0] ← Householder(a, b, 0)
error0 ← norm(H0 ∗ a − α0 ∗ b, 2)/(1 + abs(α0))
error1 ← norm(H1 ∗ a − α1 ∗ b, 2)/(1 + abs(α1))
```

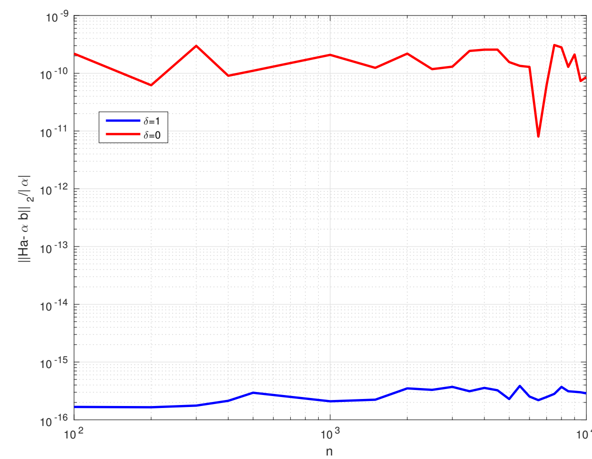

Figure 1: Choix de α dans Householder : erreur relative en norme L_2

◇

Exercice 11

Démontrer le résultat suivant:

Corollaire. *Soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^n$ avec $a_1 \neq 0$ et $\exists j \in [\![2, n]\!]$ tel que $a_j \neq 0$. Soient $\theta = \arg a_1$ et*

$$\boldsymbol{u}_\pm = \frac{\boldsymbol{a} \pm \|\boldsymbol{a}\|_2 e^{\imath\theta}\boldsymbol{e}_1}{\|\boldsymbol{a} \pm \|\boldsymbol{a}\|_2 e^{\imath\theta}\boldsymbol{e}_1\|}$$

Alors

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u}_\pm)\boldsymbol{a} = \mp \|\boldsymbol{a}\|_2 e^{\imath\theta}\boldsymbol{e}_1 \quad (12)$$

où $\boldsymbol{e}_1$ désigne le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Correction
On va utiliser le Théorème 3.16.
On pose $\alpha = \pm\|\boldsymbol{a}\|_2 e^{\imath\theta}$ et $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1$. Comme $\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle) = \arg\overline{a_1} = -\arg a_1 = -\theta$, on a $\arg\alpha = \theta\ [\pi] = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle)\ [\pi]$.

Les autres hypothèses du Théorème 3.16 sont vérifiées puisque le vecteur $\boldsymbol{a}$ n'est pas colinéaire à $\boldsymbol{e}_1$ et que $\|\boldsymbol{e}_1\|_2 = 1$. On a donc

$$\mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} \pm \|\boldsymbol{a}\|_2 e^{\imath\theta}\boldsymbol{e}_1}{\|\boldsymbol{a} \pm \|\boldsymbol{a}\|_2 e^{\imath\theta}\boldsymbol{e}_1\|}\right)\boldsymbol{a} = \mp \|\boldsymbol{a}\|_2 e^{\imath\theta}\boldsymbol{e}_1.$$

◇

Exercice 12

Soit $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{K})$ la matrice bloc

$$\mathbb{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{S} \end{array}\right)$$

où $\mathbb{B}_{1,1} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ et $\mathbb{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\boldsymbol{s} \in \mathbb{K}^n$ le premier vecteur colonne de $\mathbb{S}$ et on suppose que $\boldsymbol{s} \neq 0$ et $\boldsymbol{s}$ non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^n$ premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Q. 1 *a. Montrer qu'il existe une matrice de Householder $\underline{\mathbb{H}} = \mathbb{H}(\underline{\boldsymbol{u}}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que*

$$\underline{\mathbb{H}}\mathbb{S} = \left(\begin{array}{c|ccc} \pm\alpha & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right).$$

b. On note $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^{m+n}$, le vecteur défini par $u_i = 0$, $\forall i \in [\![1, m]\!]$ et $u_{m+i} = \underline{u}_i$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$. Montrer que

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O} & \underline{\mathbb{H}}\mathbb{S} \end{array}\right).$$

□

Soient $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $\mathbb{A}^{[k]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice bloc définie par

$$\mathbb{A}^{[k]} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{R}^{[k]} & \mathbb{F}^{[k]} \\ \hline \mathbb{O} & \underline{\mathbb{A}}^{[k]} \end{array}\right)$$

où $\mathbb{R}^{[k]}$ est une matrice triangulaire supérieure d'ordre k et $\underline{\mathbb{A}}^{[k]}$ une matrice d'ordre $n-k$.

Q. 2 *a. Sous certaines hypothèses, montrer qu'il existe une matrice de Householder $\mathbb{H}^{[k+1]}$ telle que $\mathbb{H}^{[k+1]}\mathbb{A}^{[k]} = \mathbb{A}^{[k+1]}$.*

b. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une matrice unitaire $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, produit d'au plus $n-1$ matrices de Housholder, et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R}$ telles que $\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}$.

c. Montrer que si $\mathbb{A}$ est réelle alors les coefficient diagonaux de $\mathbb{R}$ peuvent être choisis positifs ou nuls.

d. Montrer que si $\mathbb{A}$ est réelle inversible alors la factorisation $\mathbb{Q}\mathbb{R}$, avec $\mathbb{R}$ à coefficient diagonaux strictement positifs, est unique.

□

Correction

R. 1 a. D'après le Corollaire 3.21, page 93, avec $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{s}$, en posant $\alpha = \pm\|\boldsymbol{s}\|_2 e^{\imath \arg s_1}$ et

$$\underline{\boldsymbol{u}} = \frac{\boldsymbol{s} - \alpha\boldsymbol{e}_1^n}{\|\boldsymbol{s} - \alpha\boldsymbol{e}_1^n\|}$$

on obtient $\mathbb{H}(\underline{\boldsymbol{u}}) = \alpha\boldsymbol{e}_1^n$.
On pose $\underline{\mathbb{H}} = \mathbb{H}(\underline{\boldsymbol{u}})$. On a alors sous forme bloc

$$\underline{\mathbb{H}}\mathbb{S} = \underline{\mathbb{H}}\left(\begin{array}{c|ccc} & \bullet & \cdots & \bullet \\ \boldsymbol{s} & \vdots & & \vdots \\ & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} \pm\alpha & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right)$$

b. On a $\boldsymbol{u} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{0}_m \\ \hline \underline{\boldsymbol{u}} \end{array}\right)$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}(\boldsymbol{u}) = \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^* &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) - 2\left(\begin{array}{c} \mathbf{0}_m \\ \hline \underline{\boldsymbol{u}} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_m^* & \underline{\boldsymbol{u}}^* \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) - 2\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \underline{\boldsymbol{u}}\underline{\boldsymbol{u}}^* \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n - 2\underline{\boldsymbol{u}}\underline{\boldsymbol{u}}^* \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \underline{\mathbb{H}} \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \underline{\mathbb{H}} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{S} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O} & \underline{\mathbb{H}}\mathbb{S} \end{array}\right).$$

R. 2 a. On note $\underline{\boldsymbol{s}} \in \mathbb{K}^{n-k}$ le premier vecteur colonne de $\underline{\mathbb{A}}^{[k]}$. et $\boldsymbol{u} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{0}_k \\ \hline \underline{\boldsymbol{s}} \end{array}\right)$. D'après la question précédente si $\underline{\boldsymbol{s}} \neq 0$ et $\underline{\boldsymbol{s}}$ non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^{n-k}$ premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^{n-k}$ alors il existe une matrice de Householder $\mathbb{H}^{[k+1]} = \mathbb{H}(\boldsymbol{u})$ et $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tels que

$$\mathbb{A}^{[k+1]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[k+1]}\mathbb{A}^{[k]} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{R}^{[k]} & \mathbb{F}^{[k]} \\ \hline \mathbb{O} & \left(\begin{array}{c|ccc} \pm\alpha & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{R}^{[k+1]} & \mathbb{F}^{[k+1]} \\ \hline \mathbb{O} & \underline{\mathbb{A}}^{[k+1]} \end{array}\right)$$

On peut remarquer que si $\boldsymbol{s} = 0$ ou $\boldsymbol{s}$ colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^{n-k}$ alors $\mathbb{A}^{[k]}$ est déjà sous la forme $\mathbb{A}^{[k+1]}$ et donc $\mathbb{H}^{[k+1]} = \mathbb{I}$.

b. il suffit d'appliquer itérativement le résultat précédent $n-1$ fois en posant $\mathbb{A}^{[0]} = \mathbb{A}$ et $\mathbb{A}^{[k+1]} = \mathbb{H}^{[k+1]}\mathbb{A}^{[k]}$ où $\mathbb{H}^{[k+1]}$ est soit une matrice de Householder soit la matrice identité. Par construction la matrice $\mathbb{A}^{[n-1]}$ est triangulaire supérieure et l'on a

$$\mathbb{A}^{[n-1]} = \mathbb{H}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[1]}\mathbb{A}$$

On pose $\mathbb{H} = \mathbb{H}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[1]}$ et $\mathbb{R} = \mathbb{A}^{[n-1]}$. La matrice $\mathbb{H}$ est unitaire car produit de matrices unitaires. On note $\mathbb{Q} = \mathbb{H}^*$ On a

$$\mathbb{Q} = \mathbb{H}^{[1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[n-1]}$$

car les matrices de Householder et matrice identité sont unitaires et hermitiennes.

c. Si $\mathbb{A}$ est réelle alors par construction $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont réelles. Les coefficients diagonaux peuvent alors être choisi positif lors de la construction de chaque matrice de Householder.

d. Pour montrer l'unicité d'une telle factorisation, on note $\mathbb{Q}_1$, $\mathbb{Q}_2$, deux matrices orthogonales et $\mathbb{R}_1$, $\mathbb{R}_2$, deux matrices triangulaires à coefficients diagonaux positifs telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}_1\mathbb{R}_1 = \mathbb{Q}_2\mathbb{R}_2.$$

Comme $\mathbb{A}$ est inversible les coefficients diagonaux de $\mathbb{R}_1$ et $\mathbb{R}_2$ sont strictement positifs. On a alors

$$\mathbb{I} = \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{Q}_1\mathbb{R}_1\mathbb{R}_2^{-1}\mathbb{Q}_2^{-1}$$

et donc

$$\mathbb{Q}_1^{-1}\mathbb{Q}_2 = \mathbb{R}_1\mathbb{R}_2^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{T}.$$

Comme $\mathbb{Q}_1$ est orthogonale on a $\mathbb{T} = \mathbb{Q}_1^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_2$ et

$$\mathbb{T}^{\mathsf{t}}\mathbb{T} = (\mathbb{Q}_1^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_2)^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_1^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_2 = \mathbb{Q}_2^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_1\mathbb{Q}_1^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_2 = \mathbb{I}.$$

La matrice $\mathbb{T}$ est donc orthogonal. De plus $\mathbb{T} = \mathbb{R}_1\mathbb{R}_2^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs puisque produit de triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. La matrice $\mathbb{I}$ étant symétrique définie positive, d'après le Théorème 3.15(factorisation positive de Cholesky) il existe une unique matrice $\mathbb{L}$ triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $\mathbb{L}\mathbb{L}^{\mathsf{t}} = \mathbb{I}$. Cette matrice $\mathbb{L}$ est évidemment la matrice identité. On en déduit que $\mathbb{T} = \mathbb{L}^{\mathsf{t}} = \mathbb{I}$ et donc $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q}_2$ et $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R}_2$.

◇

Exercice 13

Q. 1 *Ecrire une fonction* FactQR *permettant de calculer la factorisation* $\mathbb{Q}\mathbb{R}$ *d'une matrice* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On pourra utiliser la fonction Householder *(voir Exercice 3.1.9, page 90).* □

Q. 2 *Ecrire un programme permettant de tester cette fonction.* □

Correction

R. 1 L'objectif est de déterminer les matrices $\mathbb{Q}$, matrice unitaire, et $\mathbb{R}$ matrice triangulaire supérieure telle que $\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}$.

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Résultat : $\mathbb{Q}$: matrice unitaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$\mathbb{R}$: matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On rappelle la technique utilisée dans la correction de l'exercice 3.1.10 pour déterminer l'ensemble des matrices de Householder permettant de transformer la matrice $\mathbb{A}$ en une matrice triangulaire supérieure. On pose

$$\mathbb{A}^{[0]} = \mathbb{A}, \quad \mathbb{A}^{[k+1]} = \mathbb{H}^{[k+1]}\mathbb{A}^{[k]}, \ \forall k \in [\![0, n-2]\!]$$

où $\mathbb{H}^{[k+1]}$ est soit une matrice de Householder soit la matrice identité. Plus précisement, on note $\underline{\boldsymbol{s}} \in \mathbb{K}^{n-k}$ le vecteur composé des $n-k$ dernières composantes de la $k+1$-ème colonne de $\mathbb{A}^{[k]}$ et $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_k \\ \hdashline \underline{\boldsymbol{s}} \end{pmatrix}$.

- Si $\underline{s}_1 = 0$ ou $\underline{\boldsymbol{s}}$ colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^{n-k}$ premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^{n-k}$ alors

$$\mathbb{H}^{[k+1]} = \mathbb{I}.$$

  En notant $\boldsymbol{e}_{k+1}^n$ le $k+1$-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$, cette matrice peut-être calculée avec la fonction Householder par

$$[\mathbb{H}^{[k+1]}, \alpha] \leftarrow \text{Householder}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_{k+1}^n, 1)$$

- sinon $\mathbb{H}^{[k+1]} = \mathbb{I}$.

On a vu que dans ce cas $\mathbb{A}^{[n-1]}$ est triangulaire supérieure. On pose $\mathbb{H} = \mathbb{H}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[1]}$ qui est une matrice unitaire. On a alors $\mathbb{R} = \mathbb{A}^{[n-1]} = \mathbb{H}\mathbb{A}$ et $\mathbb{Q} = \mathbb{H}^*$.

Algorithme 2 $\mathcal{R}_0$

Calculer $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

Algorithme 2 $\mathcal{R}_1$

$\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{H}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[1]}$
$\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{H} * \mathbb{A}$
$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$

Algorithme 2 $\mathcal{R}_1$

$\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{H}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[1]}$
$\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{H} * \mathbb{A}$
$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$

Algorithme 2 $\mathcal{R}_2$

$\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{I}$
$\mathbb{A}^{[0]} \leftarrow \mathbb{A}$
for $k \leftarrow 0$ **to** $n-2$ **do**
  Calculer $\mathbb{H}^{[k+1]}$ à partir de $\mathbb{A}^{[k]}$
  $\mathbb{A}^{[k+1]} \leftarrow \mathbb{H}^{[k+1]} * \mathbb{A}^{[k]}$
  $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{H}^{[k+1]} * \mathbb{H}$
end for
$\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{H} * \mathbb{A}$ ▷ ou $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}^{[n-1]}$
$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$

Il est inutile de stocker les matrices $\mathbb{A}^{[k]}$ et $\mathbb{H}^{[k+1]}$:

Algorithme 2 $\mathcal{R}_2$

$\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{I}$, $\mathbb{A}^{[0]} \leftarrow \mathbb{A}$
for $k \leftarrow 0$ **to** $n-2$ **do**
  Calculer $\mathbb{H}^{[k+1]}$ à partir de $\mathbb{A}^{[k]}$
  $\mathbb{A}^{[k+1]} \leftarrow \mathbb{H}^{[k+1]} * \mathbb{A}^{[k]}$
  $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{H}^{[k+1]} * \mathbb{H}$
end for
$\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}^{[n-1]}$
$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$

Algorithme 2 $\mathcal{R}_3$

$\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{I}$, $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}$
for $k \leftarrow 0$ **to** $n-2$ **do**
  Calculer $\mathbb{S}(= \mathbb{H}^{[k+1]})$ à partir de $\mathbb{R}(= \mathbb{A}^{[k]})$
  $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{S} * \mathbb{R}$ ▷ compute $\mathbb{A}^{[k+1]}$
  $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{S} * \mathbb{H}$
end for
$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$

Algorithme 2 $\mathcal{R}_3$

$\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{I}$, $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}$
for $k \leftarrow 0$ **to** $n-2$ **do**
  Calculer $\mathbb{S}(= \mathbb{H}^{[k+1]})$ à partir de $\mathbb{R}$
  $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{S} * \mathbb{R}$
  $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{S} * \mathbb{H}$
end for
$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$

Algorithme 2 $\mathcal{R}_4$

$\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{I}$, $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}$
for $k \leftarrow 0$ **to** $n-2$ **do**
  $\boldsymbol{a} \leftarrow [\mathbf{0}_k; \mathbb{R}(k+1:n, k+1)]$
  $\boldsymbol{e}_{k+1}^n \in \mathbb{C}^n$, $e_{k+1}^n(i) = \delta_{k+1,i}$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.
  $[\mathbb{R}, \alpha] \leftarrow \text{Householder}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_{k+1}^n, 1)$
  $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{S} * \mathbb{R}$
  $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{S}\mathbb{H}$
end for
$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$

Algorithm 2 Fonction FACTQR

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Résultat : $\mathbb{Q}$: matrice unitaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$\mathbb{R}$: matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

```
Function [ℚ, ℝ] ← FACTQR ( 𝔸 )
    ℍ ← 𝕀
    ℝ ← 𝔸
    for k ← 0 to n − 2 do
        a ← 0_n
        for i ← k + 1 to n do
            a(i) ← ℝ(i, k + 1)
        end for
        e ← 0_n, e(k + 1) ← 1
        [𝕊, α] ← HOUSEHOLDER(a, e, 1)
        ℝ ← 𝕊 * ℝ
        ℍ ← 𝕊 * ℍ
    end for
    ℚ ← ℍ*
end Function
```

R. 2 A faire!

◇