Ing. MACS 1/L3 MIM **Analyse Numérique I**
Sup'Galilée **Année 2020-2021**

Partiel du 6 novembre 2020 (présentiel)

durée : 2h00.

Sans documents et sans appareils électroniques

Le barême est donné à titre indicatif

Exercice 1 (5.5 points)

Dans cet exercice les notations suivantes seront utilisées. Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ alors

- $\mathbb{A}_{:,j}$ correspond au j-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$ et s'écrit algorithmiquement `A(:,j)`. Si on écrit `v←A(:,j)` alors l'accès aux éléments de `v` s'effectue avec la commande `v(i)`. De plus, au niveau algorithmique, si `w` est un vecteur colonne ou ligne de dimension m, alors `A(:,j)←w` est autorisé et correspond mathématiquement à $\mathbb{A}_{:,j} = \boldsymbol{w}$ ou $\mathbb{A}_{:,j} = \boldsymbol{w}^t$ c'est à dire $\mathbb{A}_{i,j} = \boldsymbol{w}_i$, $\forall i \in [\![1, m]\!]$.
- $\mathbb{A}_{i,:}$ correspond au i-ème vecteur ligne de $\mathbb{A}$ et s'écrit algorithmiquement `A(i,:)` et si on écrit `u←A(i,:)` alors l'accès aux éléments de `u` s'effectue avec la commande `u(j)`. De plus, au niveau algorithmique, si `w` est un vecteur ligne ou colonne de dimension n, alors `A(i,:)←w` est autorisé et correspond mathématiquement à $\mathbb{A}_{i,:} = \boldsymbol{w}$ ou $\mathbb{A}_{i,:} = \boldsymbol{w}^t$ c'est à dire $\mathbb{A}_{i,j} = \boldsymbol{w}_j$, $\forall j \in [\![1, n]\!]$.

Q. 1 ***(Algo.)*** *Soient* $\boldsymbol{u}$ *et* $\boldsymbol{v}$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^n$. *Ecrire la fonction* `ProSca` *permettant de retourner le produit scalaire de ces deux vecteurs.*

Q. 2 *Soient* $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^p$ *et* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

a. *Rappeler précisement les hypothèses et les formules permettant le calcul de* $\boldsymbol{v} = \mathbb{A}\boldsymbol{u}$.

b. *Ecrire* $\boldsymbol{v}_i$ *comme un produit scalaire en utilisant les notations* $\mathbb{A}_{:,k}$ *ou* $\mathbb{A}_{k,:}$.

c. ***(Algo.)*** *Ecrire la fonction* `ProMatVec` *permettant de retourner* $\mathbb{A}\boldsymbol{u}$ *en utilisant la fonction* `ProSca`.

Q. 3 *Soient* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *et* $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

a. *Rappeler précisement les hypothèses et les formules permettant le calcul de* $\mathbb{G} = \mathbb{A}\mathbb{B}$.

b. *Ecrire* $\mathbb{G}_{:,j}$ *(j-ème vecteur colonne de* $\mathbb{G}$*) comme un produit matrice vecteur*

c. ***(Algo.)*** *Ecrire la fonction* `ProMatMat` *permettant de retourner* $\mathbb{G}$ *en utilisant la fonction* `ProMatVec`.

Exercice 2 (6.75 points)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ qui possède un zéro simple x^*, c'est à dire tel que

$$f(x^*) = 0, \quad f'(x^*) \neq 0.$$

On cherche à approcher x^* par l'algorithme suivant:

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} = \Phi(x_n), \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

avec

$$\Phi(x) = x - \frac{f^2(x)}{f(x + f(x)) - f(x)}.$$

On admet que x_n est bien défini pour tout $n \geqslant 0$. L'objectif de cet exercice est de prouver que si $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x^*$, alors la convergence est au moins d'ordre 2.
On note $e_n \stackrel{\text{def}}{=} x_n - x^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Q. 1 *Par un développement de Taylor montrer qu'il existe* $\xi_1^n \in]\min(x_n, x_n + f(x_n)), \max(x_n, x_n + f(x_n))[$ *tel que*

$$e_{n+1} = e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi_1^n) f(x_n)}. \tag{1}$$

Q. 2 *a. Par un développement de Taylor montrer qu'il existe* $\xi_2^n \in]\min(x_n, x^*), \max(x_n, x^*)[$ *tel que*

$$f(x_n) = f'(x_n)e_n - \frac{1}{2}f''(\xi_2^n)e_n^2. \tag{2}$$

b. En déduire que

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{e_n f(x_n)f''(\xi_1^n) + f''(\xi_2^n)e_n^2}{f'(x_n) + \frac{1}{2}f''(\xi_1^n)f(x_n)}. \tag{3}$$

Q. 3 *a. Par un développement de Taylor montrer qu'il existe* $\xi_3^n \in]\min(x_n, x^*), \max(x_n, x^*)[$ *tel que*

$$f(x_n) = f'(\xi_3^n)e_n. \tag{4}$$

b. En déduire que

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}e_n^2\frac{f''(\xi_1^n)f'(\xi_3^n) + f''(\xi_2^n)}{f'(x_n) + \frac{1}{2}f''(\xi_1^n)f(x_n)}. \tag{5}$$

Q. 4 *a. En déduire que si* $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x^*$, *alors*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \alpha \in \mathbb{R} \tag{6}$$

avec une constante α *que l'on explicitera.*

b. Que peut-on en conclure?

Q. 5 *Expliquer pourquoi cet algorithme peut-être considéré comme une variante de l'algorithme de Newton.*

Exercice 3 (10.25 points)

Q. 1 *a. Rappeler précisement la définition d'une matrice hermitienne définie positive.*

b. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *une matrice hermitienne et* $(\lambda, \boldsymbol{u})$ *un élément propre de* $\mathbb{A}$. *Montrer que* $\lambda \in \mathbb{R}$.

c. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *une matrice hermitienne définie positive et* $(\lambda, \boldsymbol{u})$ *un élément propre de* $\mathbb{A}$. *Montrer que* $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$.

d. En déduire qu'une matrice hermitienne définie positive est inversible.

Soient $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$ et $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{k+1}(\mathbb{C})$ une matrice **hermitienne définie positive** que l'on décompose sous la forme bloc

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{B} & \boldsymbol{f} \\ \hline \boldsymbol{e}^* & \alpha \end{array}\right)$$

où

- $\mathbb{B}$ est la matrice de $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{B}_{i,j} = \mathrm{A}_{i,j}$, $\forall (i,j) \in [\![1,k]\!]^2$,
- $\boldsymbol{f}$ est le vecteur de $\mathbb{C}^k$ tel que $f_i = \mathrm{A}_{i,k+1}$, $\forall i \in [\![1,k]\!]$,
- $\boldsymbol{e}$ est le vecteur de $\mathbb{C}^k$ tel que $e_i = \overline{\mathrm{A}_{k+1,i}}$, $\forall i \in [\![1,k]\!]$
- $\alpha \in \mathbb{C}$ est le scalaire $\alpha = \mathrm{A}_{k+1,k+1}$.

Q. 2 *a. Montrer que* $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.

b. Montrer que $\mathbb{B}$ *est inversible.*

c. Que peut-on dire des éléments diagonaux de $\mathbb{B}$?

Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$. Nous allons maintenant démontrer par récurrence sur l'ordre $n \geqslant 2$ des matrices que si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice **hermitienne définie positive** alors il existe $\mathbb{W} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure telle que $\mathrm{W}_{i,i} = \omega$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, et $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure inversible telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{W}\mathbb{U}. \tag{1}$$

Q. 3 *Démontrer l'unicité de la factorisation* $\mathbb{A} = \mathbb{W}\mathbb{U}$ *en supposant son existence.*

Q. 4 *a. Ecrire proprement la proposition* $(\mathcal{P}_n)$ *à démontrer par récurrence.*

b. ***Initialisation :*** *montrer que* $(\mathcal{P}_2)$ *est vraie.*

c. ***Hérédité :*** *en supposant que* $(\mathcal{P}_n)$ *est vraie montrer que* $(\mathcal{P}_{n+1})$ *est vérifiée (on pourra utiliser la décomposition bloc précédente). Conclure.*