Ing. MACS 1/L3 MIM — **Analyse Numérique I**
Sup'Galilée — **Année 2021-2022**

Partiel du 19 novembre 2020

durée : 2h30.

Sans documents et sans appareils électroniques

Le barême est donné à titre indicatif

Exercice 1 (6.25 points)

Q. 1 *Soient* $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

a. *De manière précise, rappeler les hypothèses et les formules permettant le calcul de* $\boldsymbol{v} = \mathbb{M}\boldsymbol{u}$.

b. ***(Algo.)*** *Ecrire la fonction* `ProMatVec` *permettant de retourner* $\mathbb{M}\boldsymbol{u}$.

Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q. 2 *Donner la définition mathématique d'une matrice triangulaire supérieure.*

Q. 3 *Montrer que* $\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B}$ *est triangulaire supérieure et que* $C_{i,i} = A_{i,i}B_{i,i}$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.

Q. 4 *A quelles conditions, sur ses coefficients, la matrice* $\mathbb{A}$ *est-elle inversible?(aucune démonstration n'est demandée)*

Q. 5 *Que peut-on dire de l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure inversible? (aucune démonstration n'est demandée)*

Q. 6 *Soit* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. *On suppose que la matrice triangulaire supérieure* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est inversible.*

a. *Expliquer en détail la manière de résoudre le système triangulaire supérieur*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Il faudra bien evidemment expliciter le principe et les formules permettant de calculer l'ensemble des composantes de $\boldsymbol{x}$.

b. ***(Algo.)****Ecrire une* ***fonction*** *algorithmique permettant de résoudre le système précédent.*

Exercice 2 (7.5 points)

Q. 1 *a*. *Soit* $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *une matrice hermitienne, montrer que* $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, $\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{H}\boldsymbol{x} \rangle \in \mathbb{R}$.

b. *Soit* $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *une matrice hermitienne et* $(\lambda, \boldsymbol{u})$ *un élément propre de* $\mathbb{H}$. *Montrer que les valeurs propres de* $\mathbb{H}$ *sont réelles.*

c. *Rappeler précisement la définition d'une matrice hermitienne définie positive.*

d. *Soit* $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *une matrice hermitienne définie positive et* $(\lambda, \boldsymbol{u})$ *un élément propre de* $\mathbb{H}$. *Montrer que les valeurs propres de* $\mathbb{H}$ *sont dans* $\mathbb{R}^{+*}$.

e. *En déduire qu'une matrice hermitienne définie positive est inversible.*

Soient $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$ et $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{k+1}(\mathbb{C})$ une matrice **hermitienne définie positive** que l'on décompose sous la forme bloc

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & \boldsymbol{f}^* \\ \hline \boldsymbol{g} & \mathbb{B} \end{array}\right)$$

où

- $\mathbb{B}$ est la matrice de $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{B}_{i,j} = \mathrm{A}_{i+1,j+1}$, $\forall (i,j) \in [\![1,k]\!]^2$,
- $\boldsymbol{g}$ est le vecteur colonne de $\mathbb{C}^k$ tel que $g_i = \mathrm{A}_{i+1,1}$, $\forall i \in [\![1,k]\!]$,
- $\boldsymbol{f}$ est le vecteur colonne de $\mathbb{C}^k$ tel que $f_i = \overline{\mathrm{A}_{1,i+1}}$, $\forall i \in [\![1,k]\!]$
- $\alpha \in \mathbb{C}$ est le scalaire $\alpha = \mathrm{A}_{1,1}$.

Q. 2 ***a***. *Montrer que $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.*

b. *Montrer que que $\mathbb{B}$ est inversible.*

Nous allons maintenant démontrer par récurrence sur l'ordre $n \geqslant 2$ des matrices que si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice **hermitienne définie positive** alors il existe $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure inversible telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{L}. \tag{1}$$

Q. 3 ***a***. *Ecrire proprement la proposition $(\mathcal{P}_n)$ à démontrer par récurrence.*

b. ***Initialisation :*** *montrer que $(\mathcal{P}_2)$ est vraie.*

c. ***Hérédité :*** *en supposant que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie montrer que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vérifiée (on pourra utiliser la décomposition bloc précédente)*

d. *Conclure*

Q. 4 *Démontrer l'unicité de la factorisation $\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{L}$.*

EXERCICE 3 (6.25 POINTS)

Soit h la fonction définie sur $[0,1]$ par $h(x) = x - e^{-x}$.

Q. 1 *Montrer que l'équation $h(x) = 0$ possède une solution unique dans $[0,1]$, que l'on notera α.*

On cherche à calculer une approximation de α par une méthode de point fixe. On pose $g(x) = e^{-x}$.

Q. 2 ***a***. *Montrer que α est un point fixe de g.*

b. *Placer ce point sur la Figure 1.*

c. *En partant de $x_0 = 0.2$, illustrer les trois premières itérations de la méthode du point fixe, sur le graphe de la Figure 1.*

Q. 3 ***a***. *Le point $x = 0$ est-il un point fixe de g ?*

b. *Peut-on utiliser un théorème du cours de convergence de la méthode du point fixe sur $]0,1]$?*

c. *Montrer, en utilisant un théorème du cours et en l'écrivant de manière très précise, que g a un unique point fixe dans $[\frac{1}{10}, 1]$, le point α, et que l'algorithme du point fixe converge vers α, pour tout x_0 dans $[\frac{1}{10}, 1]$.*

d. *Le point fixe α est-il attractif? répulsif? Justifier.*

e. *Pour x_0 suffisamment proche de α, la convergence est-elle linéaire? quadratique? Justifier.*

On cherche maintenant à calculer une approximation de α par la méthode de Newton.

Q. 4 ***a***. *Soit $x_0 \in [\frac{1}{10}, 1]$ donné. Écrire la relation de récurrence liant deux itérés successifs de la méthode de Newton sous la forme $x^{(k+1)} = \Phi\left(x^{(k)}\right)$ avec une fonction Φ que l'on précisera.*

b. *Montrer que l'algorithme de Newton converge, pour x_0 suffisamment proche de α.*

c. *La convergence est-elle linéaire? quadratique? Justifier.*

Nom :	Prénom:

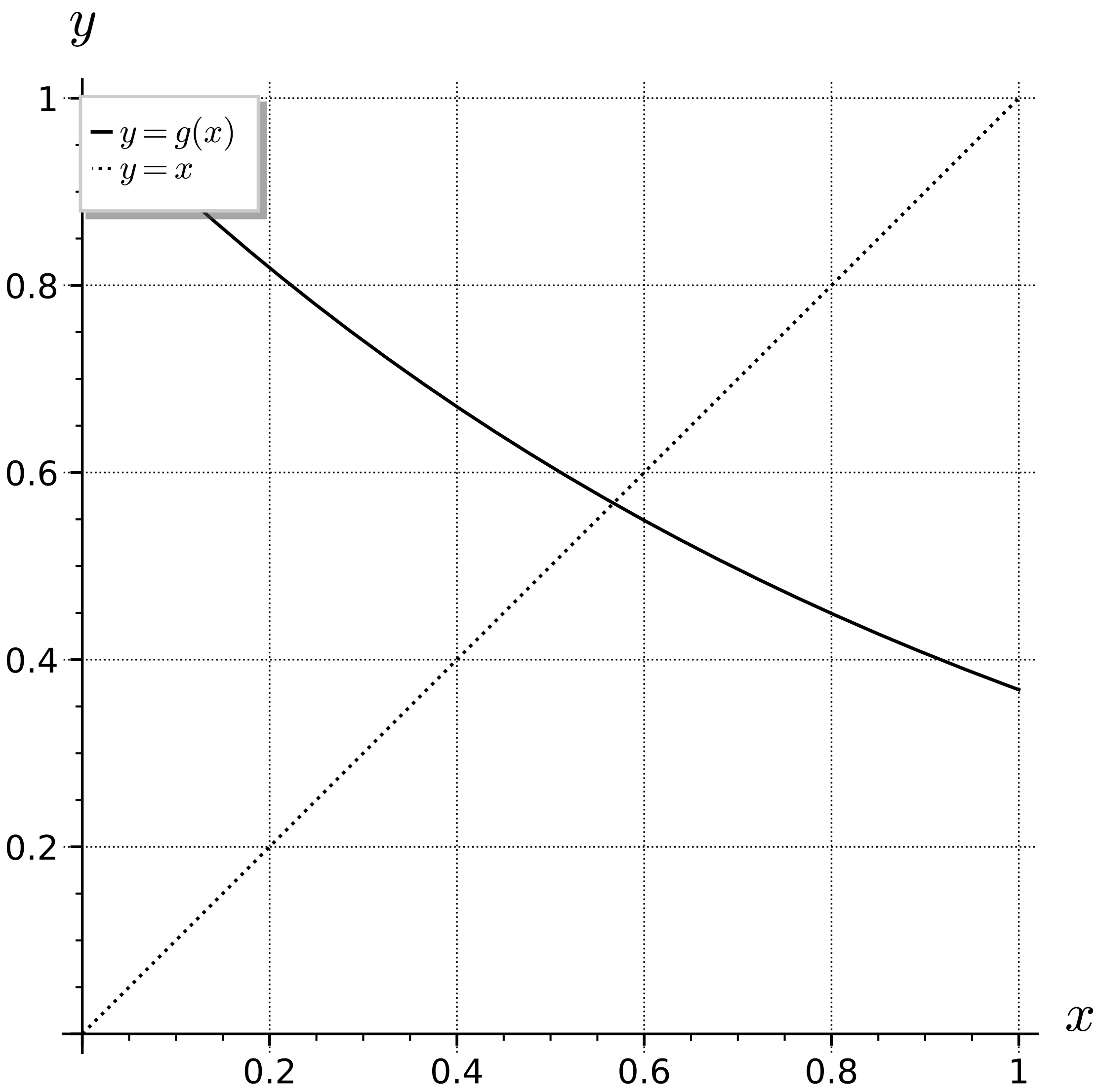

Figure 1: La fonction g (en trait plein)