Partiel du 18 novembre 2023

durée : 3h00.

Sans documents et sans appareils électroniques

Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 (10 points)

Définition On dit que $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une **factorisation** $\mathbb{TV}$ si il existe $\mathbb{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **triangulaire inférieure inversible** et $\mathbb{V} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **triangulaire supérieure à diagonale unité** telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{TV}.$$

On note $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$, $\mathbb{T} = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$ et $\mathbb{V} = (v_{i,j})_{i,j=1}^n$ les composantes de ces matrices.
On rappelle que la sous-matrice principale d'ordre k de $\mathbb{A}$, $k \in [\![1, n]\!]$, est la matrice $\Delta_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ telle que

$$(\Delta_k)_{i,j} = a_{i,j}, \ \forall (i,j) \in [\![1, k]\!].$$

Q. 1 *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{TV}$.*

- ***a**. Démontrer que toutes les sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ sont inversibles.*
- ***b**. Démontrer que la factorisation $\mathbb{TV}$ est unique.*
- ***c**. Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$ donné. Expliquer comment résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ à l'aide de la factorisation $\mathbb{TV}$.*

Q. 2 *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{TV}$. Expliquer, **de manière détaillée**, une méthodologie pour calculer les coefficients des matrices $\mathbb{T}$ et $\mathbb{V}$. On explicitera les formules à utiliser.*

Q. 3 (Algo.) *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{TV}$.*

- ***a**. Ecrire la fonction* ResTriSup *retournant $\boldsymbol{x}$, solution de $\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ où $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice triangulaire supérieure inversible et et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$.*
- ***b**. Ecrire la fonction algorithmique* FactTV *retournant les matrices $\mathbb{T}$ et $\mathbb{V}$.*
- ***c**. On suppose la fonction* ResTriInf *retournant $\boldsymbol{x}$, solution de $\mathbb{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ avec $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure inversible, déjà écrite. Ecrire la fonction algorithmique* ResTV *retournant $\boldsymbol{x}$, solution de $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en utilisant sa factorisation $\mathbb{TV}$.*

Q. 4 *Nous allons démontrer par récurrence sur l'ordre $n \geqslant 2$ des matrices que si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice dont toutes les sous-matrices principales sont inversibles, alors elle admet une factorisation $\mathbb{TV}$.*

- ***a**. Ecrire proprement la proposition $(\mathcal{P}_n)$ à démontrer par récurrence.*
- ***b**. **Initialisation :** montrer que $(\mathcal{P}_2)$ est vraie.*
- ***c**. **Hérédité :** en supposant que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie montrer que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vérifiée. (Indication: on pourra utiliser une décomposition blocs de $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ avec 2×2 blocs, le premier bloc diagonal étant dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.)*
- ***d**. Conclure*

Exercice 2 (10 points)

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $\Phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, et $\alpha \in]a,b[$ tels que $\Phi(\alpha) = \alpha$. On suppose qu'il existe $\mu > 0$, $I_\mu \stackrel{\text{def}}{=} [\alpha-\mu, \alpha+\mu] \subset [a,b]$ tel que $\Phi \in \mathcal{C}^1(I_\mu;\mathbb{R})$ et $|\Phi'(\alpha)| < 1$.

Q. 1 ***a***. *Démontrer qu'il existe $\delta > 0$, $I_\delta \stackrel{\text{def}}{=} [\alpha-\delta, \alpha+\delta] \subset I_\mu$ tel que $\forall x \in I_\delta$, $|\Phi'(x)| < 1$.*

b. *Démontrer que Φ est contractante sur I_δ.*

Q. 2 ***a***. *Démontrer que α est l'unique point fixe de Φ dans I_δ,*

b. *Démontrer que $\Phi(I_\delta) \subset I_\delta$.*

Soient $x_0 \in I_\delta$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \Phi(x_n)$.

Q. 3 ***a***. *Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in I_\delta$.*

b. *Démontrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers α.*

c. *Que peut-on dire de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ si il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_k = \alpha$? Justifier.*

d. *Rappeler précisement la définition de la convergence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ vers α à l'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ au moins.*

e. *Démontrer que la suite converge à l'ordre 1 au moins.*

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose de plus que $\Phi \in \mathcal{C}^{p+1}(I_\mu;\mathbb{R})$ et que

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ \Phi^{(i)}(\alpha) = 0 \tag{1}$$

Q. 4 ***a***. *Soit $g \in \mathcal{C}^{p+1}(I_\mu;\mathbb{R})$. Compléter précisement par la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre le plus élevé possible:*

$$\textit{si } x_n \quad \ldots,\ \exists \xi \in \ldots, \quad \textit{tel que} \quad g(x_n) = g(\alpha) + \ldots$$

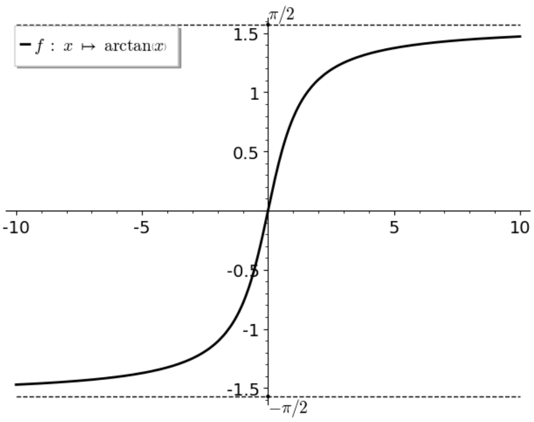
b. *En déduire que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers α à l'ordre $(p+1)$ au moins.*

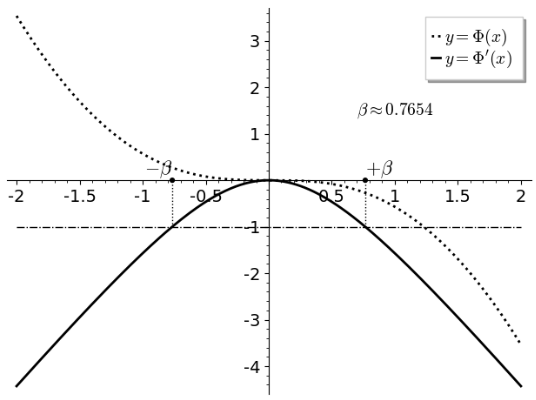
c. *Démontrer que, sous l'hypothèse supplémentaire $\Phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$, la convergence ne peut-être d'ordre $(p+q)$ avec $q \geqslant 2$.*

Application Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ donnée par $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \arctan(x)$. On a $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et f admet $\alpha = 0$ comme unique racine. On pose

$$\Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \text{(méthode de Newton)}$$

La fonction f est représentée sur la figure de gauche, les fonctions Φ et Φ' sur celle de droite.





Q. 5 ***a***. *Calculer $\Phi^{(i)}$ pour $i \in [\![1,3]\!]$.*

b. *Calculer $\Phi(\alpha)$ et $\Phi^{(i)}(\alpha)$ pour $i \in [\![1,3]\!]$.*

Soient β le réel tel que $\Phi'(\beta) = \Phi'(-\beta) = -1$ (voir figure de droite) et $\delta = \beta - 10^{-8}$. On note $I_\delta \stackrel{\text{def}}{=} [-\beta+\delta, \beta-\delta]$.

Q. 6 *La fonction Φ est-elle contractante sur I_δ? Justifiez sans démonstration à l'aide de la figure de droite.*

Soient $x_0 = -0.7$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \Phi(x_n)$.

Q. 7 ***a***. *La suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge-t'elle? Justifiez en utilisant les résultats des questions précédentes.*

b. *Si il y a convergence, donner son ordre de convergence exacte en justifiant.*