Ing. MACS 1/L3 MIM | **Analyse Numérique I**
Sup'Galilée | **Année 2022-2023**

Partiel du 13 janvier 2023

durée : 3h00.

Sans documents et sans appareils électroniques

Le barème est donné à titre indicatif

Dans ce sujet :

- Les entrées/sorties des fonctions que vous écrirez devront être décrites.

Exercice 1 (10 points)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible dont les éléments diagonaux sont non nuls. On note $\mathrm{A}_{i,j}$ la composante (i,j) de la matrice $\mathbb{A}$. On décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$, où $\mathbb{D}$ représente la diagonale de $\mathbb{A}$, $-\mathbb{E}$ la partie triangulaire inférieure stricte et $-\mathbb{F}$ la partie triangulaire supérieure stricte.
On note respectivement $\mathbb{J} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{D}^{-1}(\mathbb{E}+\mathbb{F})$ et $\mathcal{L}_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}$ les matrices d'itérations des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.
Soit $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. On souhaite résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

Q. 1 ***a.*** *Pour résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ la méthode de Jacobi est donnée par*

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{d}. \tag{1}$$

Expliciter la matrice $\mathbb{B}$ et le vecteur $\boldsymbol{d}$ en fonction de $\mathbb{D}$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ et $\boldsymbol{y}$.

b. *Exprimer la composante $\boldsymbol{x}_i^{[k+1]}$ en fonction des composantes de $\boldsymbol{x}^{[k]}$, des coefficients de la matrice $\mathbb{A}$ et des composantes de $\boldsymbol{y}$.*

c. *A quelle(s) condition(s) supplémentaire(s) la méthode de Jacobi converge-t'elle ?*

d. *Démontrer (sans citer le théorème du cours) que si la méthode de Jacobi converge alors elle converge vers la solution du système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.*

Q. 2 *Pour la matrice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, établir (en justifiant) la convergence ou non des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel. Tous les calculs devront être détaillés.*

On note $\mathbb{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice tridiagonale

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Q. 3 *Soit $\mu \in \mathbb{C}^*$. On note $\mathbb{Q}(\mu) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice diagonale de diagonale $(\mu, \mu^2, \dots, \mu^n)$.*

a. *Expliciter la matrice $\mathbb{T}(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}(\mu)\mathbb{T}\mathbb{Q}^{-1}(\mu)$ en fonction des coefficients tridiagonaux de la matrice $\mathbb{T}$ et de μ.*

b. *Déterminer* $\det(\mathbb{T}(\mu))$ *en fonction de* $\det(\mathbb{T})$.

On suppose dans la suite que la matrice inversible $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \nu_1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta & \alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \nu_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \tag{3}$$

et que ses éléments diagonaux sont non nuls.

Q. 4 ***a.*** *Montrer que les valeurs propres de $\mathbb{J}$ sont les racines du polynôme*

$$q_{\mathbb{J}}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\lambda\mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}).$$

b. *En utilisant la question 3, montrer que $q_{\mathbb{J}}(\lambda) = \det(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F})$.*

c. *En déduire que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $\mathbb{J}$ alors $-\lambda$ l'est aussi.*

Q. 5 ***a.*** *Montrer que les valeurs propres de $\mathcal{L}_1$ sont les racines du polynôme*

$$q_{\mathcal{L}_1}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \mathbb{F}).$$

b. *En déduire que*

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^*, \quad q_{\mathcal{L}_1}(\lambda^2) = \lambda^n q_{\mathbb{J}}(\lambda). \tag{4}$$

Q. 6 ***a.*** *Comparer les valeurs propres de $\mathbb{J}$ à celles de $\mathcal{L}_1$.*

b. *Une des deux méthodes est-elle à privilégier dans ce cas ?*

On souhaite utiliser la méthode Gauss-Seidel pour résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ où $\mathbb{A}$ est donnée par (3) et $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Cette méthode est donnée de manière générique par

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad x_i^{[k+1]} = \frac{1}{\mathrm{A}_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{A}_{ij} x_j^{[k+1]} - \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{A}_{ij} x_j^{[k]} \right). \tag{5}$$

Q. 7 ***a.*** *Simplifier l'écriture de la formule de Gauss-Seidel* (5) *en tenant compte des particularités de la matrice $\mathbb{A}$ (i.e. minimisation du nombre d'opérations élémentaires dans le calcul de $x_i^{[k+1]}$).*

b. *Ecrire une **fonction** algorithmique permettant de résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, où $\mathbb{A}$ est donnée par* (3)*, par le schéma itératif de Gauss-Seidel simplifié sachant que l'on ne veut pas stocker la matrice $\mathbb{A}$. Cette fonction devra (entre autres) prendre en paramètres les coefficients α, ν_i, β de la matrice $\mathbb{A}$.*

Exercice 2 (10 points)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, des réels de $[a,b]$ distincts deux à deux, et $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$.
On note $y_i = f(x_i)$, $\forall i \in [\![0,n]\!]$.
On définit les polynômes b_i, $i \in [\![1,n+1]\!]$, par

$$b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1,n+1]\!],\ b_i(x) = (x - x_{i-1})b_{i-1}(x).$$

Q. 1 **a.** *Soit $i \in [\![0,n+1]\!]$. Démontrer que $b_i^{(i)}$, la dérivée i-ème de b_i, vaut $i!$.*

b. *Montrer que $\mathcal{B}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{b_0,\dots,b_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.*

Q. 2 *Ecrire une fonction algorithmique, nommée* **polyBase**, *retournant $b_i(x)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $i \in [\![0,n]\!]$.*

On note $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice définie pour tout $(i,j) \in [\![1,n+1]\!]$ par

$$Q_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{si } j < i, \\ \displaystyle\prod_{k=0}^{i-2}(x_{j-1} - x_k) & \text{si } 1 < i \leqslant j. \end{cases}$$

Q. 3 **a.** *Démontrer que $\mathbb{Q}$ est inversible.*

b. *Ecrire les coefficients de $\mathbb{Q}$ en fonction des polynômes b_i, $i \in [\![0,n]\!]$.*

c. *Ecrire une fonction algorithmique, nommée* **MatriceBase**, *retournant la matrice $\mathbb{Q}$.*

On va chercher le polynôme P_n s'écrivant dans la base $\mathcal{B}_n$ sous la forme

$$\mathrm{P}_n = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i b_i$$

avec, $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et vérifiant

$$\mathrm{P}_n(x_i) = y_i,\ \forall i \in [\![0,n]\!] \tag{1}$$

Q. 4 **a.** *Démontrer que si le polynôme P_n existe alors il est unique.*

b. *Démontrer que (1) s'écrit sous la forme d'un système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \tag{2}$$

avec $\boldsymbol{X} = (\lambda_0,\dots,\lambda_n)^t$ et l'où on explicitera la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{B}$.

c. *Quel est le lien entre $\mathbb{A}$ et $\mathbb{Q}$?*

On suppose que l'on dispose de la fonction algorithmique **x←Solve(A,b)** retournant la solution du système linéaire **Ax=b**.

Q. 5 **a.** *Ecrire une fonction algorithmique, nommée* **SolveBase**, *retournant $(\lambda_i)_{i=0}^n$.*

b. *Ecrire une fonction algorithmique, nommée* **poly**, *retournant $\mathrm{P}_n(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et utilisant la fonction* SolveBase.

On suppose $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$. Soit $x \in [a,b]$, $x \neq x_i$, $\forall i \in [\![0,n]\!]$. On note

$$F(t) = f(t) - \mathrm{P}_n(t) - \frac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{b_{n+1}(x)} b_{n+1}(t), \quad \forall t \in [a,b].$$

Q. 6 **a.** *La fonction F est-elle bien définie ? Dans quel espace vit-elle au mieux ? Justifier.*

b. *Déterminer* $(n+2)$ *zéros distincts de la fonction* F.

c. *Rappeler précisement le théorème de Rolle pour* $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

d. *En notant* $a \leqslant z_1 < z_2 < \ldots < z_{n+2} \leqslant b$ *les* $(n+2)$ *zéros de* F *et en utilisant le théorème de Rolle, montrer qu'il existe* $\xi_x \in]z_1, z_{n+2}[$ *tel que*

$$F^{(n+1)}(\xi_x) = 0.$$

e. *Expliciter le nombre de fois où le théorème de Rolle a été utilisé dans la question précédente.*

f. *En déduire* $f(x) - \mathrm{P}_n(x)$ *en fonction de* $f^{(n+1)}(\xi_x)$ *et de* $b_{n+1}(x)$.

Application :

Q. 7 ***a***. *Déterminer, en utilisant ce qui précède, un polynôme* $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[X]$ *tel que*

$$\mathrm{P}(-1) = 2,\ \mathrm{P}(0) = 1 \text{ et } \mathrm{P}(1) = 2.$$

b. *A-t'on unicité de ce polynôme ? Justifier.*

c. *Déterminer un polynôme* Q *de degré 3 tel que*

$$\mathrm{Q}(-1) = 2,\ \mathrm{Q}(0) = 1 \text{ et } \mathrm{Q}(1) = 2.$$

d. *A-t'on unicité de ce polynôme ? Justifier.*