Chapitre B

Annexes

B.1 Analyse : rappels

B.1.1 En vrac

Théorème B.1: Théorème de Bolzano ou des valeurs intermédiaires

Soit $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Si $f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas de même signe (i.e. $f(a)f(b) < 0$) alors il existe au moins $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Théorème B.2: Théorème des accroissements finis

Soient a et b deux réels, $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Proposition B.3: Formule de Taylor-Lagrange

Soit $n \in N^*$ et $f \in \mathcal{C}^n([a, b])$ dont la dérivée n-ième est dérivable. Alors pour tout x, y dans $[a, b]$, $x \neq y$, il existe $\xi \in]\min(x, y), \max(x, y)[$ tel que

$$f(x) = f(y) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-y)^k}{k!} f^{(k)}(y) + \frac{(x-y)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{B.1}$$

Corollaire B.4: Théorème de la bijection

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$ et à valeurs réelles,

alors elle constitue une bijection entre $[a, b]$ et l'intervalle fermé dont les bornes sont $f(a)$ et $f(b)$.

Preuve. Notons $J = f^{-1}([a, b])$ cet intervalle fermé, c'est-à-dire l'ensemble des réels compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

- La monotonie de la fonction implique que l'image de l'intervalle $[a, b]$ est contenue dans J :
  - si f est croissante, pour tout $x \in [a, b]$ on a $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$
  - si f est décroissante, pour tout $x \in [a, b]$ on a $f(b) \leqslant f(x) \leqslant f(a)$.
- Le fait que cette monotonie soit stricte assure que deux réels distincts ne peuvent avoir la même image, autrement dit la fonction est injective sur $[a, b]$.
- Enfin, le théorème des valeurs intermédiaires (qui s'appuie sur l'hypothèse de continuité) garantit que tout élément de J admet au moins un antécédent par f , c'est-à-dire que la fonction est surjective dans J.

□

Proposition B.5

Soit f est une fonction bijective continue d'un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ sur un intervalle ouvert $J \subset \mathbb{R}$. Si f est dérivable en $\alpha \in I$ et que $f'(\alpha) \neq 0$ alors sa réciproque f^{-1} est dérivable en $\beta = f(\alpha) \in J$ et

$$(f^{-1})'(\beta) = \frac{1}{f'(\alpha)} \quad \text{ou encore} \quad (f^{-1})'(\beta) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\beta))}$$

Preuve. On pose $g = f^{-1}$ et on écrit son taux d'accroissement :

$$\frac{g(y) - g(\beta)}{y - \beta} = \frac{x - \alpha}{f(x) - f(\alpha)}$$

avec $y = f(x)$. Cette fraction est l'inverse de $\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ qui tend vers $f'(\alpha) \neq 0$ quand x tend vers α. □

B.1.2 Espace métrique

Definition B.6: Distance sur un ensemble

On appelle **distance** sur un ensemble E, une application d de E^2 dans $\mathbb{R}^+$ telle que pour tout $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in E^3$ on a

- symétrie : $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$,
- séparation : $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$,
- inégalité triangulaire : $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leqslant d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$

Voici quelques exemples de distances:

- $\mathrm{d}(x, y) = |x - y|$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$
- $\mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ dans $\mathbb{R}^n$, où $\|.\|$ est l'une quelconque des normes habituelles.

Definition B.7: Espace métrique

On appelle (E, d) un **espace métrique** si E est un ensemble et d une distance sur E.

Definition B.8: Suite convergente

Soient (E, d) un **espace métrique** et $(\boldsymbol{u}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que la suite $(\boldsymbol{u}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\boldsymbol{\alpha} \in E$ si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ \forall k > N, \quad \mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k]}, \boldsymbol{\alpha}) < \epsilon. \tag{B.2}$$

Definition B.9: Ordre de convergence

Soient (E, d) un **espace métrique** et $(\boldsymbol{u}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers $\boldsymbol{\alpha} \in E$. On dit que cette suite **converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ avec un ordre** $p \geqslant 1$ si

$$\exists k_0 \in \mathbb{N},\ \exists C > 0 \ \text{ tels que } \ \mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k+1]}, \boldsymbol{\alpha}) \leqslant C\, \mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k]}, \boldsymbol{\alpha})^p,\ \forall k \geqslant k_0. \tag{B.3}$$

où $C < 1$ si $p = 1$.

Definition B.10: Suite de Cauchy

Soit (E, d) un **espace métrique**. Une suite $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est dites **de Cauchy** si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N},\ \text{tel que } \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p,q \geqslant M, \quad \mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{[p]}, \boldsymbol{x}^{[q]}) < \epsilon.$$

ce qui correspond à

$$\lim_{m\to+\infty} \sup_{p,q\geqslant m} \mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{[p]}, \boldsymbol{x}^{[q]}) = 0.$$

Une autre manière de l'écrire est

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N},\ \text{tel que } \forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant M,\ \forall l \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{[k+l]}, \boldsymbol{x}^{[k]}) < \epsilon.$$

ce qui correspond à

$$\lim_{m\to+\infty} \sup_{k\geqslant m, l\geqslant 0} \mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{[k+l]}, \boldsymbol{x}^{[k]}) = 0.$$

Definition B.11: Espace métrique complet

Un espace metrique est dit **complet** si toute suite de Cauchy converge.

Proposition B.12

Si E est un espace vectoriel normé de norme $\|.\|$ alors E est un espace métrique pour la distance d issue de sa norme et définie par $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|,\ \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in E^2$.

Definition B.13: Espace de Banach

On appelle **espace de Banach** un espace vectoriel normé complet pour la distance issue de sa norme.

B.2 Algèbre linéaire

Toute cette partie peut être joyeusement omise par tout Homo sapiens *algebra linearis* compatible. Toutefois une lecture rapide permet de se raffraichir la mémoire.

Soit V un **espace vectoriel** de dimension finie n, sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, ou sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Notons plus généralement $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

B.2.1 Vecteurs

Une **base** de V est un ensemble $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ de n **vecteurs linéairement indépendants**. Le vecteur $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \boldsymbol{e}_i$ sera représenté par le **vecteur colonne**

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

et on désignera par $\boldsymbol{v}^{\mathsf{t}}$ et $\boldsymbol{v}^*$ les **vecteurs lignes** suivants

$$\boldsymbol{v}^{\mathsf{t}} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}^* = \begin{pmatrix} \overline{v_1} & \overline{v_2} & \cdots & \overline{v_n} \end{pmatrix}$$

où $\overline{\alpha}$ est le nombre **complexe conjugué** du nombre α.

Definition B.14

- Le vecteur ligne $\boldsymbol{v}^{\mathsf{t}}$ est le **vecteur transposé** du vecteur colonne $\boldsymbol{v}$.
- Le vecteur ligne $\boldsymbol{v}^*$ est le **vecteur adjoint** du vecteur colonne $\boldsymbol{v}$.

Definition B.15

L'application $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ définie pour tout $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ par

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{u}^{\mathsf{t}}.\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{\mathsf{t}}.\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i, \quad \text{si} \quad \mathbb{K} = \mathbb{R} \tag{B.4}$$

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{u}^*.\boldsymbol{v} = \overline{\boldsymbol{v}^*.\boldsymbol{u}} = \overline{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle} = \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i} v_i, \quad \text{si} \quad \mathbb{K} = \mathbb{C} \tag{B.5}$$

est appelée **produit scalaire** euclidien si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, hermitien[a] si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Pour rappeler la dimension de l'espace, on écrit

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_n\,.$$

[a] La convention choisie pour le produit scalaire hermitien étant ici : linéarité à droite et semi-linéarité à gauche. Il est aussi possible de définir le produit scalaire hermitien par le complexe conjugué de (B.5) :

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{v}^*.\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i}.$$

Dans ce cas le produit scalaire est une forme sesquilinéaire à droite.

Definition B.16

Soit V est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

- Deux **vecteurs $\boldsymbol{u}$** et **$\boldsymbol{v}$** sont **orthogonaux** si $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$.
- Un **vecteur $\boldsymbol{v}$** est **orthogonal à une partie** U de V si

$$\forall \boldsymbol{u} \in U,\ \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0.$$

On note $\boldsymbol{v} \perp U$.

- Un ensemble de vecteurs $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ de l'espace V est dit **orthonormal** si

$$\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = \delta_{ij}, \; \forall (i,j) \in [\![1,k]\!]^2$$

où δ_{ij} est le **symbole de Kronecker** : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$

Definition B.17

Le vecteur nul de $\mathbb{K}^n$ est représenté par $\mathbf{0}_n$ ou $\mathbf{0}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité.

Definition B.18

Soit $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n$ non nul. On définit l'**opérateur de projection** sur $\boldsymbol{u}$ par

$$\operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}) = \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle}{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle} \boldsymbol{u} = \frac{1}{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle} \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^* \boldsymbol{v}, \; \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n. \tag{B.6}$$

La matrice $\mathbb{P}_{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*$ s'appelle la matrice de la projection orthogonale suivant le vecteur $\boldsymbol{u}$.

Proposition B.19: Procédé de Gram-Schmidt

Soit $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base de $\mathbb{K}^n$. On construit successivement les vecteurs $\boldsymbol{u}_i$

$$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{v}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}_k}(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{v}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_i \rangle}{\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_k \rangle} \boldsymbol{u}_k, \; \forall i \in [\![1,n]\!].$$

Ils forment une **base orthogonale** de $\mathbb{K}^n$ et $\operatorname{Vect}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_i) = \operatorname{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i)$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$ (voir Exercice B.3.5, page 215).
Pour construire une **base orthonormale** $\{\boldsymbol{z}_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$, il suffit de normaliser les vecteurs de la base orthogonale:

$$\boldsymbol{z}_i = \frac{\boldsymbol{u}_i}{\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_i \rangle^{1/2}}, \quad \forall i \in [\![1,n]\!].$$

B.2.2 Matrices

Généralités

Une matrice à m lignes et n colonnes est appelée *matrice de type* (m,n), et on note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, ou simplement $\mathcal{M}_{m,n}$, l'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ formé par les matrices de type (m,n) à éléments dans $\mathbb{K}$.

Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ d'éléments $\mathrm{A}_{ij} \in \mathbb{K}$ est notée

$$\mathbb{A} = (\mathrm{A}_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m, \; 1 \leqslant j \leqslant n},$$

le premier indice i correspond aux lignes et le second j aux colonnes. On désigne par $(\mathbb{A})_{ij}$ l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne. On peut aussi le noter $\mathrm{A}_{i,j}$.

Definition B.20

La matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est représentée par $\mathbb{O}_{m,n}$ ou $\mathbb{O}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité. Si $m = n$ on peut aussi noter $\mathbb{O}_n$ cette matrice.

B. Annexes B.2.2 Matrices
B.2. Algèbre linéaire

Definition B.21

- Soit une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, on note $\mathbb{A}^* \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ la **matrice adjointe** de la matrice $\mathbb{A}$, définie de façon unique par

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_m = \langle \boldsymbol{u}, \mathbb{A}^* \boldsymbol{v} \rangle_n, \; \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n, \; \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^m$$

qui entraine $(\mathbb{A}^*)_{ij} = \overline{\mathrm{A}_{ji}}$.

- Soit une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, on note $\mathbb{A}^{\mathsf{t}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ la **matrice transposée** de la matrice $\mathbb{A}$, définie de façon unique par

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_m = \langle \boldsymbol{u}, \mathbb{A}^{\mathsf{t}} \boldsymbol{v} \rangle_n, \; \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n, \; \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$$

qui entraine $(\mathbb{A}^{\mathsf{t}})_{ij} = \mathrm{A}_{ji}$.

Definition B.22

Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, leur **produit** $\mathbb{A}\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est défini par

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{A}_{ik}\mathrm{B}_{kj}, \forall i \in [\![1,m]\!], \; \forall j \in [\![1,n]\!]. \tag{B.7}$$

Exercice B.2.1: résultats à savoir

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, montrer que

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^{\mathsf{t}} = \mathbb{B}^{\mathsf{t}}\mathbb{A}^{\mathsf{t}}, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \tag{B.8}$$

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^* = \mathbb{B}^*\mathbb{A}^*, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \tag{B.9}$$

Les matrices considérées jusqu'à la fin de ce paragraphe sont carrées.

Definition B.23

Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ alors les éléments $\mathrm{A}_{ii} = (\mathbb{A})_{ii}$ sont appelés **éléments diagonaux** et les éléments $\mathrm{A}_{ij} = (\mathbb{A})_{ij}, i \neq j$ sont appelés **éléments hors-diagonaux**.

Definition B.24

On appelle **matrice identitée** de $\mathcal{M}_n$ la matrice dont les éléments diagonaux sont tous égals à 1 et les éléments hors-diagonaux nulles. On la note $\mathbb{I}$ ou encore $\mathbb{I}_n$ et on a

$$(\mathbb{I})_{i,j} = \delta_{ij}, \; \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2.$$

Definition B.25

Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** ou **régulière** s'il existe une matrice $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I} \tag{B.10}$$

Dans le cas contraire, on dit que la matrice $\mathbb{A}$ est **singulière** ou **non inversible**.

On peut noter que la matrice $\mathbb{B}$ est unique. En effet, soient $\mathbb{B}_1$ et $\mathbb{B}_2$ vérifiant (B.10). On a alors $\mathbb{A}\mathbb{B}_2 = \mathbb{I}$ et donc $\mathbb{B}_1(\mathbb{A}\mathbb{B}_2) = \mathbb{B}_1$. On a aussi $\mathbb{B}_1\mathbb{A} = \mathbb{I}$ et donc $(\mathbb{B}_1\mathbb{A})\mathbb{B}_2 = \mathbb{B}_2$. Le produit des matrices étant associatif on a $\mathbb{B}_1(\mathbb{A}\mathbb{B}_2) = (\mathbb{B}_1\mathbb{A})\mathbb{B}_2$ et donc $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2$.

Definition B.26

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ une matrice inversible. On note $\mathbb{A}^{-1} \in \mathcal{M}_n$ l'unique matrice vérifiant

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I}. \tag{B.11}$$

Cette matrice est appelée **matrice inverse** de $\mathbb{A}$.

Definition B.27

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

- ◇ On note $\ker(\mathbb{A}) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \; ; \; \mathbb{A}\boldsymbol{v} = 0\}$ le **noyau** de $\mathbb{A}$.
- ◇ On note $\operatorname{im}(\mathbb{A}) = \{\mathbb{A}\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^m \; ; \; \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\}$ l'**image** de $\mathbb{A}$.
- ◇ On note $\operatorname{rank}(\mathbb{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \dim(\operatorname{im}(\mathbb{A}))$ le **rang** de $\mathbb{A}$.

Théorème B.28: (théorème du rang)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On a

$$\operatorname{rank}(\mathbb{A}) + \dim(\ker(\mathbb{A})) = n$$

Proposition B.29

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1. $\mathbb{A}$ est inversible,
2. $\operatorname{rank}(\mathbb{A}) = n$,
3. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$, $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} = 0$, (i.e. $\ker \mathbb{A} = \{0\}$)
4. $\det(\mathbb{A}) \neq 0$,
5. toutes les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont non nulles,
6. il existe $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I}$,
7. il existe $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}$.

Exercice B.2.2: *résultats à savoir*

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles. Montrer que $\mathbb{A}\mathbb{B}$ inversible et

$$(\mathbb{A}^t)^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^t, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \tag{B.12}$$
$$(\mathbb{A}^*)^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^*, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \tag{B.13}$$
$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1} \tag{B.14}$$
$$(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A} \tag{B.15}$$

Definition B.30

Une matrice **carrée** $\mathbb{A}$ est :

- ◇ **symétrique** si $\mathbb{A}$ est réelle et $\mathbb{A} = \mathbb{A}^t$,
- ◇ **hermitienne** si $\mathbb{A} = \mathbb{A}^*$,

- ◇ **normale** si $\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A}$,
- ◇ **orthogonale** si $\mathbb{A}$ est réelle et $\mathbb{A}\mathbb{A}^t = \mathbb{A}^t\mathbb{A} = \mathbb{I}$,
- ◇ **unitaire** si $\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A} = \mathbb{I}$,

Proposition B.31

- une matrice symétrique ou hermitienne est nécessairement normale.
- une matrice orthogonale (resp. unitaire) est nécessairement normale et inversible d'inverse $\mathbb{A}^t$ (resp. $\mathbb{A}^*$).

Definition B.32

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice **hermitienne**.

- ◇ Elle est **définie positive** si
$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle > 0, \; \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\} \tag{B.16}$$
- ◇ Elle est **semi définie positive** si
$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \geqslant 0, \; \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\} \tag{B.17}$$

Exercice B.2.3

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1 *Que peut-on dire de la matrice $\mathbb{A}\mathbb{A}^*$? Et si la matrice $\mathbb{A}$ est inversible?*

Q. 2 *Proposer une technique permettant de générer une matrice hermitienne semi-définie positive à partir d'une matrice aléatoire quelconque.*

Q. 3 *Proposer une technique permettant de générer une matrice hermitienne définie positive à partir d'une matrice triangulaire inférieure inversible aléatoire.*

Definition B.33

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$. La trace d'une matrice carrée $\mathbb{A} = (a_{ij})$ est définie par

$$\operatorname{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Definition B.34

Soit $\mathcal{T}_n$ le **groupe des permutations** de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. A tout élément $\sigma \in \mathcal{T}_n$, on associe la **matrice de permutation** de $\mathbb{P}_\sigma \in \mathcal{M}_n$ est définie par

$$(\mathbb{P}_\sigma)_{i,j} = \delta_{i\sigma(j)}.$$

Exercice B.2.4: *résultats à savoir*

Montrer qu'une matrice de permutation est orthogonale.

Definition B.35

Soient $\mathbb{A} = (\mathrm{A}_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_n$ et $\mathcal{T}_n$ le **groupe des permutations** de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.. Le **déterminant** d'une matrice $\mathbb{A}$ est défini par

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{T}_n} \varepsilon_\sigma \prod_{j=1}^{n} \mathrm{A}_{\sigma(j)j}$$

où ε_σ désigne la signature de la permutation σ.

Proposition B.36: Méthode de Laplace ou des coffacteurs

Soit $\mathbb{A} = (\mathrm{A}_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_n$. On note $\mathbb{A}^{[i,j]} \in \mathcal{M}_{n-1}$ la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de $\mathbb{A}$. On a alors le **développement par rapport à la ligne** $i \in [\![1, n]\!]$

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \mathrm{A}_{i,j} \det\left(\mathbb{A}^{[i,j]}\right), \tag{B.18}$$

et le **développement par rapport à la colonne** $j \in [\![1, n]\!]$

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \mathrm{A}_{i,j} \det\left(\mathbb{A}^{[i,j]}\right). \tag{B.19}$$

Le terme $(-1)^{i+j} \det\left(\mathbb{A}^{[i,j]}\right)$ est appellé le **cofacteur** du terme $\mathrm{A}_{i,j}$.

Definition B.37

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est **valeur propre** de $\mathbb{A}$ s'il existe $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ **non nul** tel que

$$\mathbb{A}\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u}. \tag{B.20}$$

Le vecteur $\boldsymbol{u}$ est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.
Le couple $(\lambda, \boldsymbol{u})$ est appelé **élément propre** de $\mathbb{A}$.

Definition B.38

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $\mathbb{A}$. Le sous-espace

$$E_\lambda = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n : \mathbb{A}\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u}\} = \ker(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}) \tag{B.21}$$

est appelé **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ. La dimension de E_λ est appelée **multiplicité géométrique** de la valeur propre λ.

Definition B.39

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme de degré n défini par

$$\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}) \tag{B.22}$$

est appellé **polynôme caractéristique** de la matrice $\mathbb{A}$.

B. Annexes B.2.2 Matrices
B.2. Algèbre linéaire

Proposition B.40

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Les racines complexes du polynôme caractéristique $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}$ sont les valeurs propres de la matrice $\mathbb{A}$.
- Si la racine λ de $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}$ est de multiplicité k, on dit que la valeur propre λ est de **multiplicité algébrique** k.
- La matrice $\mathbb{A}$ possède n valeurs propres distinctes ou non.

Definition B.41

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\lambda_i(\mathbb{A})$, $i \in [\![1, n]\!]$, les n valeurs propres de $\mathbb{A}$. Le **spectre** de la matrice $\mathbb{A}$ est le sous-ensemble

$$\mathrm{Sp}(\mathbb{A}) = \bigcup_{i=1}^{n} \{\lambda_i(\mathbb{A})\} \tag{B.23}$$

du plan complexe.

Proposition B.42

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n$. On a les relations suivantes

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\mathbb{A}) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbb{A}), && \text{(B.24)}\\
\det(\mathbb{A}) &= \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbb{A}), && \text{(B.25)}\\
\mathrm{tr}(\mathbb{AB}) &= \mathrm{tr}(\mathbb{BA}), && \text{(B.26)}\\
\mathrm{tr}(\mathbb{A} + \mathbb{B}) &= \mathrm{tr}\, A + \mathrm{tr}\, B, && \text{(B.27)}\\
\det(\mathbb{AB}) &= \det(\mathbb{A}) \det(\mathbb{B}) = \det(\mathbb{BA}), && \text{(B.28)}\\
\det(\mathbb{A}^*) &= \overline{\det(\mathbb{A})}. && \text{(B.29)}
\end{aligned}$$

Definition B.43

Le **rayon spectral** d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ est le nombre $\geqslant 0$ défini par

$$\rho(\mathbb{A}) = \max\{|\lambda_i(\mathbb{A})| \,;\, i \in [\![1, n]\!]\}$$

Matrices particulières

Definition B.44

Une matrice carrée $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ est :

- **diagonale** si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$,
- **triangulaire supérieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$,
- **triangulaire inférieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$,
- **triangulaire** si elle est triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure

◇ **à diagonale dominante** si

$$|a_{ii}| \geqslant \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\,, \ \forall i \in [\![1,n]\!], \tag{B.30}$$

◇ **à diagonale strictement dominante** si

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\,, \ \forall i \in [\![1,n]\!]. \tag{B.31}$$

Proposition B.45

Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaires inférieures (resp. triangulaires supérieures). Alors la matrice $\mathbb{AB}$ est aussi triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure).
De plus on a

$$(\mathbb{AB})_{i,i} = A_{i,i}B_{i,i}, \ \forall i \in [\![1,n]\!].$$

Preuve. (voir Exercice B.3.2, page 214) □

Proposition B.46

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure).

1. $\mathbb{A}$ est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls (i.e. $A_{i,i} \neq 0$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$).
2. Si $\mathbb{A}$ est inversible alors son inverse est triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure) et

$$(\mathbb{A}^{-1})_{i,i} = \frac{1}{(\mathbb{A})_{i,i}}$$

Preuve. (voir Exercice B.3.10, page 220) □

Definition B.47

On appelle **matrice bande** une matrice $\mathbb{A}$ telle que $a_{ij} \neq 0$ pour $|j-i| \leqslant c$. c est la **demi largeur de bande**.
Lorsque $c = 1$, la matrice est dite **tridiagonale** . Lorsque $c = 2$, la matrice est dite **pentadiagonale** .

Definition B.48

On appelle **sous-matrice** d'une matrice donnée, la matrice obtenue en supprimant certaines lignes et certaines colonnes. En particulier, si on supprime les $(n-k)$ dernières lignes et colonnes d'une matrice carrée $\mathbb{A}$ d'ordre n, on obtient la **sous matrice principale** d'ordre k.

Definition B.49

On appelle **matrice bloc** une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{N,M}$ écrite sous la forme

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c:c} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \mathbb{A}_{1,q} \\ \hdashline \vdots & & \vdots \\ \hdashline \mathbb{A}_{p,1} & \cdots & \mathbb{A}_{p,q} \end{array}\right)$$

où $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\forall j \in [\![1,q]\!]$, $\mathbb{A}_{i,j}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n_i,m_j}$. On a $N = \sum_{i=1}^{p} n_i$ et $M = \sum_{j=1}^{q} m_j$.
On dit que $\mathbb{A}$ et une matrice **bloc-carrée** si $p = q$ et si tous les blocs diagonaux sont des matrices carrées.

Propriété B.50: Multiplication de matrices blocs

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{N,M}$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{M,S}$. Le produit $\mathbb{P} = \mathbb{AB} \in \mathcal{M}_{N,S}$ peut s'écrire sous forme bloc si les matrices $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont *compatibles par blocs* : il faut que le nombre de blocs colonne de $\mathbb{A}$ soit égale au nombre de blocs ligne de $\mathbb{B}$ avec correspondance des dimensions.

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c:c} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \mathbb{A}_{1,q} \\ \hdashline \vdots & & \vdots \\ \hdashline \mathbb{A}_{p,1} & \cdots & \mathbb{A}_{p,q} \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{B} = \left(\begin{array}{c:c:c} \mathbb{B}_{1,1} & \cdots & \mathbb{A}_{1,r} \\ \hdashline \vdots & & \vdots \\ \hdashline \mathbb{B}_{q,1} & \cdots & \mathbb{A}_{q,r} \end{array}\right)$$

avec $\mathbb{A}_{i,k} \in \mathcal{M}_{n_i,m_k}$ et $\mathbb{B}_{k,j} \in \mathcal{M}_{m_k,s_j}$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $k \in [\![1,q]\!]$ et $j \in [\![1,r]\!]$. La matrice produit $\mathbb{P}$ s'écrit alors sous la forme bloc

$$\mathbb{P} = \left(\begin{array}{c:c:c} \mathbb{P}_{1,1} & \cdots & \mathbb{P}_{1,r} \\ \hdashline \vdots & & \vdots \\ \hdashline \mathbb{P}_{p,1} & \cdots & \mathbb{P}_{p,r} \end{array}\right)$$

avec $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\forall j \in [\![1,r]\!]$ $\mathbb{P}_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i,s_j}$ et

$$\mathbb{P}_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} \mathbb{A}_{i,k}\mathbb{B}_{k,j}.$$

Definition B.51

On dit qu'une matrice bloc-carrée $\mathbb{A}$ est **triangulaire inférieure** (resp. **supérieure**) **par blocs** si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices $\mathbb{A}_{i,j} = 0$ pour $i < j$ (resp. $i > j$). . Elle s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{0} \\ \hdashline \mathbb{A}_{n,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,n} \end{array}\right) \quad (\text{resp. } \mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,1} \\ \hdashline \mathbb{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} & \mathbb{A}_{n,n} \end{array}\right)).$$

Definition B.52

On dit qu'une matrice bloc-carrée $\mathbb{A}$ est **diagonale par blocs** ou **bloc-diagonale** si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices $\mathbb{A}_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$. Elle s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \hdashline \mathbb{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{0} \\ \hdashline \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} & \mathbb{A}_{n,n} \end{array}\right)$$

Proposition B.53

Soit $\mathbb{A}$ une matrice bloc-carré décomposée en $n \times n$ blocs. Si $\mathbb{A}$ est **bloc-diagonale** ou **triangulaire par blocs** alors son déterminant est le produit des déterminant des blocs diagonaux :

$$\det \mathbb{A} = \prod_{i=1}^{n} \det \mathbb{A}_{i,i} \tag{B.32}$$

Proposition B.54

Soit $\mathbb{A}$ une matrice bloc-carré **inversible** décomposée en $n \times n$ blocs.

- Si $\mathbb{A}$ est **bloc-diagonale** alors son inverse (décomposée en $n \times n$ blocs) est aussi **bloc-diagonale**.
- Si $\mathbb{A}$ est **triangulaire inférieure par blocs** (resp. supérieure) alors son inverse (décomposée en $n \times n$ blocs) est aussi **triangulaire inférieure par blocs** (resp. supérieure).

Dans ces deux cas les blocs diagonaux de la matrice inverse sont les inverses des blocs diagonaux de $\mathbb{A}$. On a donc

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \hdashline \mathbb{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{0} \\ \hdashline \mathbb{0} & \cdots & \circ & \mathbb{A}_{n,n} \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{A}^{-1} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}^{-1}_{1,1} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \hdashline \mathbb{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{0} \\ \hdashline \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} & \mathbb{A}^{-1}_{n,n} \end{array}\right)$$

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{0} \\ \hdashline \mathbb{A}_{n,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,n} \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{A}^{-1} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}^{-1}_{1,1} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \hdashline \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{0} \\ \hdashline \bullet & \cdots & \bullet & \mathbb{A}^{-1}_{n,n} \end{array}\right)$$

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,1} \\ \hdashline \mathbb{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} & \mathbb{A}_{n,n} \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{A}^{-1} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}^{-1}_{1,1} & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hdashline \mathbb{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\ \hdashline \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} & \mathbb{A}^{-1}_{n,n} \end{array}\right)$$

B.2.3 Normes vectorielles et normes matricielles

Definition B.55

Une **norme** sur un espace vectoriel V est une application $\|\bullet\| : V \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes

- $\|\boldsymbol{v}\| = 0 \iff \boldsymbol{v} = 0$,
- $\|\alpha\boldsymbol{v}\| = |\alpha| \, \|\boldsymbol{v}\|, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \forall \boldsymbol{v} \in V$,
- $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|, \ \forall (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in V^2$ (inégalité triangulaire).

Une norme sur V est également appelée **norme vectorielle** . On appelle **espace vectoriel normé** un espace vectoriel muni d'une norme.

Les trois normes suivantes sont les plus couramment utilisées :

$$\|\boldsymbol{v}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$
$$\|\boldsymbol{v}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2\right)^{1/2}$$
$$\|\boldsymbol{v}\|_\infty = \max_i |v_i| .$$

Théorème B.56

Soit V un espace de dimension finie. Pour tout nombre réel $p \geqslant 1$, l'application $\|\bullet\|_p$ définie par

$$\|\boldsymbol{v}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right)^{1/p}$$

est une norme.

Proposition B.57

Pour $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$

$$\sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^q\right)^{1/q} = \|\boldsymbol{u}\|_p \, \|\boldsymbol{v}\|_q . \tag{B.33}$$

Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Hölder**.

Definition B.58

Deux **normes** $\|\bullet\|$ et $\|\bullet\|'$, définies sur un même espace vectoriel V, sont **équivalentes** s'il exite deux constantes C et C' telles que

$$\|\boldsymbol{v}\|' \leqslant C \|\boldsymbol{v}\| \quad \text{et} \quad \|\boldsymbol{v}\| \leqslant C' \|\boldsymbol{v}\|' \quad \text{pour tout } \boldsymbol{v} \in V. \tag{B.34}$$

Proposition B.59

Sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Definition B.60

Une **norme matricielle** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une application $\|\bullet\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ vérifiant

1. $\|\mathbb{A}\| = 0 \iff \mathbb{A} = 0$,
2. $\|\alpha\mathbb{A}\| = |\alpha| \, \|\mathbb{A}\|, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
3. $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\| \leqslant \|\mathbb{A}\| + \|\mathbb{B}\| , \ \forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ (inégalité triangulaire)
4. $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\| \leqslant \|\mathbb{A}\| \, \|\mathbb{B}\| , \ \forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

Proposition B.61

Etant donné une norme vectorielle $\|\bullet\|$ sur $\mathbb{K}^n$, l'application $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \|\boldsymbol{v}\|\leqslant 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \|\boldsymbol{v}\|=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|, \tag{B.35}$$

est une norme matricielle, appelée **norme matricielle subordonnée** (à la norme vectorielle donnée).
De plus

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{v}\| \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \tag{B.36}$$

et la norme $\|\mathbb{A}\|$ peut se définir aussi par

$$\|\mathbb{A}\|_s = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha\|\boldsymbol{v}\|, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\}. \tag{B.37}$$

Il existe au moins un vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\boldsymbol{u} \neq 0 \ \text{ et } \ \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{u}\|. \tag{B.38}$$

Enfin une norme subordonnée vérifie toujours

$$\|\mathbb{I}\|_s = 1 \tag{B.39}$$

Théorème B.62

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a

$$\|\mathbb{A}\|_1 \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|_1}{\|\boldsymbol{v}\|_1} = \max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \tag{B.40}$$

$$\|\mathbb{A}\|_2 \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|_2}{\|\boldsymbol{v}\|_2} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A})} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}\mathbb{A}^*)} = \|\mathbb{A}^*\|_2 \tag{B.41}$$

$$\|\mathbb{A}\|_\infty \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|_\infty}{\|\boldsymbol{v}\|_\infty} = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \tag{B.42}$$

La norme $\|\bullet\|_2$ est invariante par transformation unitaire :

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I} \Longrightarrow \|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2. \tag{B.43}$$

Par ailleurs, si la matrice $\mathbb{A}$ est normale :

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A} \Longrightarrow \|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A}). \tag{B.44}$$

Proposition B.63

1. Si une matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne, ou symétrique (donc normale), on a $\|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A})$.
2. Si une matrice $\mathbb{A}$ est unitaire, ou orthogonale (donc normale), on a $\|\mathbb{A}\|_2 = 1$.

Théorème B.64

1. Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée quelconque et $\|\bullet\|$ une norme matricielle subordonnée ou non, quel-

conque. Alors

$$\rho(\mathbb{A}) \leqslant \|\mathbb{A}\|. \tag{B.45}$$

2. Etant donné une matrice $\mathbb{A}$ et un nombre $\varepsilon > 0$, il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que

$$\|\mathbb{A}\| \leqslant \rho(\mathbb{A}) + \varepsilon. \tag{B.46}$$

Théorème B.65

L'application $\|\bullet\|_E : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|\mathbb{A}\|_E = \left(\sum_{(i,j)=\in[\![1,n]\!]^2} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} = \sqrt{\operatorname{tr}(\mathbb{A}^*\mathbb{A})}, \tag{B.47}$$

pour toute matrice $\mathbb{A} = (a_{ij})$ d'ordre n, est une norme matricielle non subordonnée (pour $n \geqslant 2$), invariante par transformation unitaire et qui vérifie

$$\|\mathbb{A}\|_2 \leqslant \|\mathbb{A}\|_E \leqslant \sqrt{n}\,\|\mathbb{A}\|_2, \ \forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n. \tag{B.48}$$

De plus $\|\mathbb{I}\|_E = \sqrt{n}$.

Théorème B.66

1. Soit $\|\bullet\|$ une norme matricielle subordonnée, et $\mathbb{B}$ une matrice vérifiant
$$\|\mathbb{B}\| < 1.$$
Alors la matrice $(\mathbb{I} + \mathbb{B})$ est inversible, et
$$\left\|(\mathbb{I} + \mathbb{B})^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{1 - \|\mathbb{B}\|}.$$
2. Si une matrice de la forme $(\mathbb{I} + \mathbb{B})$ est singulière, alors nécessairement
$$\|\mathbb{B}\| \geqslant 1$$
pour toute norme matricielle, subordonnée ou non.

B.2.4 Réduction des matrices

Definition B.67

Soit $A : V \to V$ une application linéaire, représenté par une matrice carrée $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ relativement à une base $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$. Relativement à une autre base $\{\boldsymbol{f}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$, la même application est représentée par la matrice

$$\mathbb{B} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P} \tag{B.49}$$

où $\mathbb{P}$ est la matrice inversible dont le j-ème vecteur colonne est formé des composantes du vecteur $\boldsymbol{f}_j$ dans la base $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1\rangle & \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_2\rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_n\rangle \\ \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{f}_1\rangle & \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_2\rangle & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \langle \boldsymbol{e}_{n-1}, \boldsymbol{f}_n\rangle \\ \langle \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{f}_1\rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{f}_{n-1}\rangle & \langle \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{f}_n\rangle \end{pmatrix} \tag{B.50}$$

La matrice $\mathbb{P}$ est appelée **matrice de passage de la base** $\{e_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ **dans le base** $\{f_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$.

Definition B.68

On dit que la matrice carrée $\mathbb{A}$ est diagonalisable s'il existe une matrice inversible $\mathbb{P}$ telle que la matrice $\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P}$ soit diagonale.

Remarque B.69 On notera que, dans le cas où $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ est diagonalisable, les éléments diagonaux de la matrice $\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P}$ sont les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de la matrice $\mathbb{A}$, et que le j-ème vecteur colonne $\boldsymbol{p}_j$ de la matrice $\mathbb{P}$ est formé des composantes, dans la même base que $\mathbb{A}$, d'un vecteur propre associé à la valeur propre λ_j. On a

$$\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Longleftrightarrow \mathbb{A}\boldsymbol{p}_j = \lambda_j \boldsymbol{p}_j, \ \forall j \in [\![1, n]\!]. \tag{B.51}$$

C'est à dire qu'une matrice est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de vecteurs propres.

Théorème B.70

1. Etant donnée une matrice **carrée** $\mathbb{A}$, il existe une matrice **unitaire** $\mathbb{U}$ telle que la matrice $\mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U}$ soit **triangulaire**.
2. Etant donnée une matrice **normale** $\mathbb{A}$, il existe une matrice **unitaire** $\mathbb{U}$ telle que la matrice $\mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U}$ soit **diagonale**.
3. Etant donnée une matrice **symétrique** $\mathbb{A}$, il existe une matrice **orthogonale** $\mathbb{O}$ telle que la matrice $\mathbb{O}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{O}$ soit **diagonale**.

B.2.5 Suites de vecteurs et de matrices

Definition B.71

Soit V un espace vectoriel muni d'une norme $\|\bullet\|$, on dit qu'une suite $(\boldsymbol{v}_k)$ d'éléments de V **converge vers un élément** $\boldsymbol{v} \in V$, si

$$\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}\| = 0$$

et on écrit

$$\boldsymbol{v} = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{v}_k.$$

Théorème B.72

Soit $\mathbb{B}$ une matrice carrée. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_{k\to\infty} \mathbb{B}^k = 0$,
2. $\lim_{k\to\infty} \mathbb{B}^k\boldsymbol{v} = 0$ pour tout vecteur $\boldsymbol{v}$,
3. $\rho(\mathbb{B}) < 1$,
4. $\|\mathbb{B}\| < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée $\|\bullet\|$.

Théorème B.73

Soit $\mathbb{B}$ une matrice carrée, et $\|\bullet\|$ une norme matricielle quelconque. Alors

$$\lim_{k\to\infty} \left\|\mathbb{B}^k\right\|^{1/k} = \rho(\mathbb{B}).$$

B.3 Receuil d'exercices

B.3.1 Algèbre linéaire

Sur les matrices

Exercice B.3.1

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ telles que

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle_m = \langle \boldsymbol{u}, \mathbb{B}\boldsymbol{v}\rangle_n, \ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m.$$

Exprimer les éléments de la matrice $\mathbb{B}$ en fonction de ceux de la matrice $\mathbb{A}$.

Exercice B.3.2

Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n$. Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux matrices triangulaires inférieures de $\mathcal{M}_n$.

Q. 1 1. *Que peut-on dire des matrices* $\mathbb{A}^*$ *et* $(\mathbb{A}^*)^*$*?*

2. *Montrer que* $\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B}$ *est triangulaire supérieure et que* $C_{i,i} = A_{i,i}B_{i,i}, \ \forall i \in [\![1, n]\!]$.
3. *Montrer que* $\mathbb{G} = \mathbb{E}\mathbb{F}$ *est triangulaire inférieure et que* $G_{i,i} = E_{i,i}F_{i,i}, \ \forall i \in [\![1, n]\!]$.
4. *Que peut-on dire des matrices* $\mathbb{A}\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{E}\mathbb{A}$*?*

Q. 2 1. *Calculer* $\det(\mathbb{A})$.

2. *Déterminer les valeurs propres de* $\mathbb{A}$.
3. *Que peut-on dire si les éléments diagonaux de* $\mathbb{A}$ *sont tous distincts?*

Q. 3 *Soit* $\mathbb{D}$ *la matrice définie par*

$$\mathbb{D}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *La matrice* $\mathbb{D}$ *est-elle inversible? Si oui calculer son inverse.*
2. *Pour chacune des valeurs propres, déterminer l'espace propre associé.*
3. *La matrice* $\mathbb{D}$ *est-elle diagonalisable? Justifier.*

Exercice B.3.3

Q. 1 *Soit* $\mathbb{T} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ *une matrice triangulaire supérieure. Montrer que si* $\mathbb{T}$ *est une matrice normale alors elle est diagonale.*

Q. 2 *Montrer que* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ *est une matrice normale si et seulement si il existe* $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ *unitaire et* $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ *diagonale telle que* $\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^*$.

Q. 3 *En déduire qu'une matrice normale est diagonalisable et que ses vecteurs propres sont orthog-*