Résultats principaux, cours d'*Analyse Numérique I*
Chapitre 5: *Integration*

Definition 4.1

Soient $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ la **formule de quadrature élémentaire** donnée par :

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \tag{4.1}$$

avec $\forall j \in [\![0,n]\!]$ $w_j \in \mathbb{R}$ et $x_j \in [a,b]$ distincts deux à deux. L'erreur associée à cette formule de quadrature, notée $\mathcal{E}_{a,b}(f)$, est définie par

$$\mathcal{E}_{a,b}(f) = \int_a^b f(x)dx - \mathcal{Q}_n(f,a,b), \quad \forall f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}) \tag{4.2}$$

Definition 4.2

On dit qu'une formule d'intégration (ou formule de quadrature) est d'ordre p ou a pour **degré d'exactitude** p si elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à p.

4.1 Méthodes de quadrature élémentaires

4.1.2 Quelques résultats théoriques

Proposition 4.3

Soit $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ definie en (4.1), une formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points.
L'application $f \longmapsto \mathcal{Q}_n(f,a,b)$ définie de $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$, muni de la norme infini, à valeurs dans $\mathbb{R}$ est linéaire continue.

Proposition 4.4

Soit $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ definie en (4.1), une formule de quadrature élémentaire à $(n+1)$ points $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ (distincts deux à deux dans $[a,b]$).
Alors, $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ est de degré d'exactitude k si et seulement si

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r, a, b) = \int_a^b x^r dx, \quad \forall r \in [\![0,k]\!].$$

Proposition 4.5

Soit $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ definie en (4.1), une formule de quadrature élémentaire à $(n+1)$ points $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ (distincts deux à deux dans $[a,b]$).
On note $x = \varphi(t) = \alpha + \beta t$, $\beta \in \mathbb{R}^*$, le changement de variable affine, $t_i = \varphi^{-1}(x_i)$, $\forall i \in [\![0,n]\!]$, et

$$\mathcal{Q}_n(g,\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(b)) = \left(\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a)\right)\sum_{i=0}^{n} w_i g(t_i). \tag{4.3}$$

Alors $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ est de degré d'exactitude k si et seulement si $\mathcal{Q}_n(g,\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(b))$ est de degré d'exactitude k.

Proposition 4.6

La formule de quadrature élémentaire (4.1) à $(n+1)$ points est de degré d'exactitude k (au moins) si et seulement si

$$(b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i x_i^r = \frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}, \quad \forall r \in [\![0,k]\!]. \tag{4.4}$$

Corollaire 4.7

La formule de quadrature élémentaire (4.1) à $n+1$ points est de degré d'exactitude 0 au moins si et seulement si

$$\sum_{i=0}^{n} w_i = 1.$$

Proposition 4.8

Soient $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ des points deux à deux distincts de l'intervalle $[a,b]$ donnés. Il existe alors une unique formule de quadrature élémentaire (4.1) à $(n+1)$ points de degré d'exactitude n au moins.

Proposition 4.9

Soit $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ definie en (4.1), une formule de quadrature élémentaire à $(n+1)$ points (distincts deux à deux et ordonnés). On dit qu'elle est **symétrique** si

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad w_i = w_{n-i}. \tag{4.5}$$

Dans ce cas si cette formule est exacte pour les polynômes de degré $2m$ alors elle est nécessairement exacte pour les polynômes de degré $2m+1$.

Proposition 4.10

Soit $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ definie en (4.1), une formule de quadrature élémentaire à $(n+1)$ points $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ (distincts deux à deux).
La formule de quadrature est de degré d'exactitude n au moins si et seulement si pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, les poids w_i sont donnés par

$$w_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{b-a}\int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}dx = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j}dx, \quad \forall i \in [\![0,n]\!] \tag{4.6}$$

avec $t_i = (x_i - a)/(b-a)$.
Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$ alors on a

$$|\mathcal{E}_{a,b}(f)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty \int_a^b |\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)|dx \tag{4.7}$$

Lemme 4.11

Soient $(x_i)_{i=0}^n$ des points distincts 2 à 2 de l'intervalle $[a, b]$ vérifiant

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Soient $(w_i)_{i=0}^n$ définis par

$$w_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx, \quad \forall i \in [\![0, n]\!]$$

On a alors

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad w_i = w_{n-i}$$

et la formule de quadrature élémentaire associée est de degré d'exactitude au moins n si n est impair et au moins $n+1$ sinon.

Proposition 4.12: Degré maximal d'exactitude

Soit $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ défini par (4.1) une formule de quadrature élémentaire de degré d'exactitude au moins n. Elle est alors de degré d'exactitude $n+m$, $m \in \mathbb{N}^*$, au moins si et seulement si

$$\int_a^b \pi_n(x) \mathrm{Q}(x) dx = 0, \ \forall \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{m-1}[X] \tag{4.8}$$

où π_n est le polynôme de degré $n+1$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i). \tag{4.9}$$

Le degré maximal d'exactitude d'une formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points est $2n+1$. De plus, on a

$$(4.8) \Longleftrightarrow \int_a^b \pi_n(x) x^k dx = 0, \ \forall k \in [\![0, m-1]\!]. \tag{4.10}$$

4.1.3 Formules élémentaires de Newton-Cotes

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad x_i = a + ih \text{ avec } h = (b-a)/n.$$

On a alors

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Proposition 4.13

Soient $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ et $(x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$: $x_i = a + ih$ avec $h = (b-a)/n$.
Les formules de quadrature élémentaires de Newton-Cotes s'écrivent sous la forme

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

où les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont donnés par (4.6).
Elles sont symétriques et leur degré d'exactitude (d.e. dans le tableau suivant) est égal à n si n est impair et à $n+1$ sinon.

n	**d.e.**	w_i (poids)									**nom**
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$								trapèze
2	3	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$							Simpson
3	3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$						Newton
4	5	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$					Villarceau
5	5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$				?
6	7	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$			Weddle
7	7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{49}{640}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{49}{640}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$		?
8	9	$\frac{989}{28350}$	$\frac{2944}{14175}$	$-\frac{464}{14175}$	$\frac{5248}{14175}$	$-\frac{454}{2835}$	$\frac{5248}{14175}$	$-\frac{464}{14175}$	$\frac{2944}{14175}$	$\frac{989}{28350}$	?

Table 4.1: Méthodes de Newton-Cotes

4.1.4 Formules élémentaires de Gauss-Legendre

Les polynômes de Legendre peuvent être définis par la formule de récurrence de Bonnet

$$(n+1)\mathrm{P}_{n+1}(t) = (2n+1)t\mathrm{P}_n(t) - n\mathrm{P}_{n-1}(t), \ \forall n \geqslant 1 \tag{4.11}$$

avec $\mathrm{P}_0(t) = 1$ et $\mathrm{P}_1(t) = t$.
On a les propriétés suivantes:

prop.1 le polynôme de Legendre P_n est de degré n,

prop.2 la famille $\{\mathrm{P}_k\}_{k=0}^n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$,

prop.3 pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\int_{-1}^1 \mathrm{P}_m(t)\mathrm{P}_n(t) dt = \frac{2}{2n+1} \delta_{m,n}, \tag{4.12}$$

ce qui correspond à l'orthogonalité des polynômes de Legendre pour le produit scalaire

$$\langle \mathrm{P}_m, \mathrm{P}_n \rangle = \int_{-1}^1 \mathrm{P}_m(t)\mathrm{P}_n(t) dt.$$

prop.4 Pour $n \geqslant 1$, P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et ses n racines sont simples dans $]-1, 1[$, c'est à dire

$$\mathrm{P}_n(t) = C \prod_{i=0}^{n-1} (t - t_i), \ C \in \mathbb{R}^*$$

où les t_i sont 2 à 2 distincts (et ordonnés). Les $(n+1)$ racines simples de P_{n+1} sont alors chacunes dans l'un des $(n+1)$ intervalles $]-1, t_0[$, $]t_0, t_1[$, $\ldots$, $]t_{n-2}, t_{n-1}[$, $]t_{n-1}, 1[$.

Proposition 4.14

Soit $(t_i)_{i=0}^n$ les $(n+1)$ racines distinctes du polynôme de Legendre de degré $(n+1)$. On note $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_i$, $\forall i \in [\![0, n]\!]$ et w_i les poids donnés par (4.6). La formule de quadrature élémentaire

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

est appelée la formule de quadrature de Gauss-Legendre. C'est l'unique formule de quadrature élémentaire à $(n+1)$ points ayant pour degré d'exactitude $2n+1$.

n	**exactitude**	w_i (poids)	t_i (points)
0	1	1	0
1	3	$1/2, 1/2$	$-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}$
2	5	$5/18, 8/18, 5/18$	$-\sqrt{3/5}, 0, \sqrt{3/5}$

Table 4.2: Méthodes de Gauss-Legendre sur $[-1, 1]$

Théorème 4.15

Soient $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a,b];\mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ la formule de quadrature de Gauss-Legendre définie dans la Proposition 4.14. Alors on a

$$|\int_a^b f(x)dx - \mathcal{Q}_n(f,a,b)| \leqslant \frac{\left\|f^{(2n+2)}\right\|_\infty}{(2n+2)!}\int_a^b \pi_n(x)^2 dx \tag{4.13}$$

où $\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$, les x_i étant les points de la formule de quadrature.

4.2 Méthodes de quadrature composées

Definition 4.9

Soit $(\alpha_i)_{i\in[\![0,k]\!]}$ une subdivison de l'intervalle $[\alpha, \beta]$:

$$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k = \beta.$$

On a alors

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \sum_{i=1}^k \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(x)dx. \tag{4.14}$$

Soit $\mathcal{Q}_n(g,a,b)$ la formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points d'ordre p donnée par

$$\mathcal{Q}_n(g,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^n w_j g(x_j) \approx \int_a^b g(x)dx.$$

La **méthode de quadrature composée associée à** $\mathcal{Q}_n$, notée $\mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}$, est donnée par

$$\mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}(f,\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^k \mathcal{Q}_n(f,\alpha_{i-1},\alpha_i) \approx \int_\alpha^\beta f(x)dx \tag{4.15}$$

Proposition 4.10

Soit $\mathcal{Q}_n$ une formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points. Si $\mathcal{Q}_n$ est d'ordre p alors la méthode de quadrature composée associée est aussi d'ordre p : elle est exacte pour tout polynôme de degré p.

Théorème 4.11: [1], page 43 (admis)

Soient $\mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}$ une méthode de quadrature composée associée à une méthode de quadrature élémentaire $\mathcal{Q}_n$ de degré d'exactitude $p \geqslant n$ et $f \in \mathcal{C}^{p+1}([\alpha,\beta];\mathbb{R})$. On a alors

$$|\int_\alpha^\beta f(x)dx - \mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}(f,\alpha,\beta)| \leqslant C_p(\beta-\alpha)h^{p+1}\left\|f^{(p+1)}\right\|_\infty \tag{4.16}$$

avec $h = \max_{j\in[\![1,k]\!]}(\alpha_j - \alpha_{j-1})$ et $C_p > 0$. Ceci s'écrit aussi sous la forme

$$|\int_\alpha^\beta f(x)dx - \mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}(f,\alpha,\beta)| = \mathcal{O}(h^{p+1}) \tag{4.17}$$

et son **ordre de convergence** est $p+1$.

4.3 Dominance (rappels?)

Definition 4.12

Soient X un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, et f et g deux fonctions définies sur X à valeurs réelles. On dit que f est *dominée par g au voisinage de $a \in \overline{X}$* s'il existe un voisinage U de a et un réel $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in U \cap X, \quad |f(x)| \leqslant C|g(x)|.$$

On note $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g(x))$, ou $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ (notation de Bachmann), ou, lorsqu'il n'y pas d'ambiguïté sur la valeur de a, $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$.

Proposition 4.13

Soient X un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur X à valeurs réelles, et $a \in \overline{X}$.

- Si a est fini, $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g(x))$ si et seulement si

$$\exists \eta > 0,\ \exists C > 0,\ \text{tel que } \forall x \in X,\ |x-a| < \eta \implies |f(x) \leqslant C|g(x)|.$$

- Si $a = +\infty$, $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g(x))$ si et seulement si

$$\exists M > 0,\ \exists C > 0,\ \text{tel que } \forall x \in X,\ x > M \implies |f(x) \leqslant C|g(x)|.$$

Bibliography

[1] M. Crouzeix and A.L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*. Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson, 1992.