

Analyse Numérique I

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 1ère année / L3 MIM

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2024/09/23

Plan du cours

Chapitre 1: Erreurs : arrondis, bug and Co.
Chapitre 2: Langage algorithmique
Chapitre 3: Rappels algèbre linéaire
Chapitre 4: Résolution de systèmes non-linéaires
Chapitre 5: Résolution de systèmes linéaires
Chapitre 6: Polynômes d'interpolation
Chapitre 7: Intégration numérique

2024/09/23 1 / 31

2024/09/23 2 / 31

Résultats connus

Proposition 1.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes

- 1 A est inversible,
- 2 $\text{rank}(A) = n$,
- 3 $x \in \mathbb{K}^n$, $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$, (i.e. $\ker A = \{0\}$)
- 4 $\det(A) \neq 0$,
- 5 toutes les valeurs propres de A sont non nulles,
- 6 il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I$,
- 7 il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $BA = I$.

2024/09/23 3 / 31

Exercice

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, montrer que

$$(AB)^t = B^t A^t, \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$(AB)^* = B^* A^*, \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \quad (2)$$

Exercice

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles. Montrer que AB inversible et

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t, \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad (3)$$

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*, \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \quad (4)$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \quad (5)$$

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad (6)$$

2024/09/23 4 / 31

♥ Definition 2.1

Une matrice **carrée** A est :

- ◇ **symétrique** si A est réelle et $A = A^t$,
- ◇ **hermitienne** si $A = A^*$,
- ◇ **normale** si $AA^* = A^*A$,
- ◇ **orthogonale** si A est réelle et $AA^t = A^tA = I$,
- ◇ **unitaire** si $AA^* = A^*A = I$,

♥ Definition

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n$ est :

- ◇ **diagonale** si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$,
- ◇ **triangulaire supérieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$,
- ◇ **triangulaire inférieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$,
- ◇ **triangulaire** si elle est triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure
- ◇ **à diagonale dominante** si

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \tag{7}$$

- ◇ **à diagonale strictement dominante** si

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket. \tag{8}$$

📖 Proposition

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses éléments diagonaux

📖 Exercice!

📖 Proposition

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaires inférieures (resp. triangulaires supérieures). Alors la matrice AB est aussi triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure).
De plus on a

$$(AB)_{i,i} = A_{i,i}B_{i,i}, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

📖 Exercice!

📖 Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure).

- A est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls (i.e. $A_{i,i} \neq 0, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$).
- Si A est inversible alors son inverse est triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure) et

$$(A^{-1})_{i,i} = \frac{1}{(A)_{i,i}}$$

Matrices blocs

Definition

On appelle **matrice bloc** une matrice $A \in \mathcal{M}_{N,M}$ écrite sous la forme

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{1,1} & \cdots & A_{1,q} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{p,1} & \cdots & A_{p,q} \end{array} \right)$$

où $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, A_{i,j}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n_i, m_j}$. On a $N = \sum_{i=1}^p n_i$ et $M = \sum_{j=1}^q m_j$.

On dit que A est une matrice **bloc-carrée** si $p = q$ et si tous les blocs diagonaux sont des matrices carrées.

Exercice

Proposer une écriture matrice bloc-carrée de chacune des matrices suivantes:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 8 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Proposition: Multiplication de matrices blocs

Soient $A \in \mathcal{M}_{N,M}$ et $B \in \mathcal{M}_{M,S}$. Le produit $P = AB \in \mathcal{M}_{N,S}$ peut s'écrire sous forme bloc si les matrices A et B sont *compatibles par blocs* : il faut que le nombre de blocs colonne de A soit égale au nombre de blocs ligne de B avec correspondance des dimensions, i.e.:

$$A = \begin{pmatrix} n_1 & \cdots & n_p \\ \hline A_{1,1} & \cdots & A_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{p,1} & \cdots & A_{p,q} \\ \hline n_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} m_1 & \cdots & m_q \\ \hline B_{1,1} & \cdots & B_{1,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline B_{q,1} & \cdots & B_{q,r} \\ \hline m_q \end{pmatrix}$$

avec $A_{i,k} \in \mathcal{M}_{n_i, m_k}$ et $B_{k,j} \in \mathcal{M}_{m_k, s_j}$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket, k \in \llbracket 1, q \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$. La matrice produit P s'écrit alors sous la forme bloc

$$P = \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_r \\ \hline P_{1,1} & \cdots & P_{1,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline P_{p,1} & \cdots & P_{p,r} \\ \hline n_p \end{pmatrix}$$

avec $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket, P_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i, s_j}$ et

$$P_{i,j} = \sum_{k=1}^q A_{i,k} B_{k,j}.$$

Exercice

On considère les matrices blocs suivantes

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} C & I \\ \hline I & O \end{array} \right) \quad \text{et} \quad B = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline C & C \end{array} \right)$$

avec par identification

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.1 Calculer les matrices AB et BA en utilisant l'écriture bloc.

Q.2 Exprimer les matrices $A(A+B)$ et $(2B-A)(B+A)$ en fonction des matrices C et I .

Exercice

Soient

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad B = \left(\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{array} \right)$$

Utiliser la multiplication par blocs pour calculer AB .

♥ Définition

On dit qu'une matrice bloc-carrée $\mathbb{A}$ est **triangulaire inférieure** (resp. **supérieure**) **par blocs** si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices $\mathbb{A}_{i,j} = 0$ pour $i < j$ (resp. $i > j$). Elle s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \mathbb{A}_{n,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,n} \end{pmatrix} \quad (\text{resp. } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{A}_{n,n} \end{pmatrix}).$$

♥ Définition

On dit qu'une matrice bloc-carrée $\mathbb{A}$ est **diagonale par blocs** ou **bloc-diagonale** si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices $\mathbb{A}_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$. Elle s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{A}_{n,n} \end{pmatrix}$$

📖 Proposition

Soit $\mathbb{A}$ une matrice bloc-carrée décomposée en $n \times n$ blocs, $n \geq 2$. Si $\mathbb{A}$ est **bloc-diagonale** ou **triangulaire par blocs** alors son déterminant est le produit des déterminant des blocs diagonaux :

$$\det \mathbb{A} = \prod_{i=1}^n \det \mathbb{A}_{i,i} \quad (9)$$

🔍 Exercice!

📖 Proposition

Soit $\mathbb{A}$ une matrice bloc-carré **inversible** décomposée en $n \times n$ blocs.

- Si $\mathbb{A}$ est **bloc-diagonale** alors son inverse (décomposée en $n \times n$ blocs) est aussi **bloc-diagonale**.
- Si $\mathbb{A}$ est **triangulaire inférieure par blocs** (resp. **supérieure**) alors son inverse (décomposée en $n \times n$ blocs) est aussi **triangulaire inférieure par blocs** (resp. **supérieure**).

Dans ces deux cas les blocs diagonaux de la matrice inverse sont les inverses des blocs diagonaux de $\mathbb{A}$. On a donc

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{A}_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{A}_{n,n}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \mathbb{A}_{n,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \bullet & \cdots & \bullet & \mathbb{A}_{n,n}^{-1} \end{pmatrix}$$

🔍 Exercice à faire!

Autres résultats

📖 Exercice:

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ une matrice et $(\lambda, \mathbf{u})$ un élément propre de $\mathbb{A}$ avec $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$.

Q.1 En s'aidant de la base canonique $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, construire une base orthonormée $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ telle que $\mathbf{x}_1 = \mathbf{u}$.

Notons $\mathbb{P}$ la matrice de changement de base canonique $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ dans la base $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix}$$

Soit $\mathbb{B}$ la matrice définie par $\mathbb{B} = \mathbb{P}^* \mathbb{A} \mathbb{P}$.

Q.2

- Exprimer les coefficients de la matrice $\mathbb{B}$ en fonction de la matrice $\mathbb{A}$ et des vecteurs $\mathbf{x}_i$, $i \in [1, n]$.

$$\mathbb{B} = \mathbb{P}^* \mathbb{A} \mathbb{P}.$$

- En déduire que la première colonne de $\mathbb{B}$ est $(\lambda, 0, \dots, 0)^T$.

Q.3 Montrer par récurrence sur l'ordre de la matrice que la matrice $\mathbb{A}$ s'écrit

$$\mathbb{A} = \mathbb{U} \mathbb{T} \mathbb{U}^*$$

où $\mathbb{U}$ est une matrice unitaire et $\mathbb{T}$ une matrice triangulaire supérieure.

Q.4 En supposant $\mathbb{A}$ inversible et la décomposition $\mathbb{A} = \mathbb{U} \mathbb{T} \mathbb{U}^*$ connue, expliquer comment résoudre "simplement" le système linéaire $\mathbb{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Théorème 5: Décomposition de Schur



Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe une matrice unitaire U et une matrice triangulaire supérieure T telles que

$$A = UTU^* \quad (10)$$

☞ Décomposition de Schur avec matrice triangulaire inférieure?

Théorème 6: Réduction de matrices



- 1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe une matrice **unitaire** U telle que $U^{-1}AU$ soit **triangulaire**.
- 2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice **normale**. Il existe une matrice **unitaire** U telle que $U^{-1}AU$ soit **diagonale**.
- 3 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice **symétrique**. Il existe une matrice **orthogonale** P telle que $P^{-1}AP$ soit **diagonale**.

Proposition 6.1

- une matrice symétrique ou hermitienne est nécessairement normale.
- une matrice orthogonale (resp. unitaire) est nécessairement normale et inversible d'inverse A^t (resp. A^*).

Autres résultats

2024/09/23 17 / 31

Autres résultats

2024/09/23 18 / 31

Definition 6.2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice **hermitienne**.

- Elle est **définie positive** si

$$\langle Au, u \rangle > 0, \quad \forall u \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \quad (11)$$

- Elle est **semi définie positive** si

$$\langle Au, u \rangle \geq 0, \quad \forall u \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \quad (12)$$

Exercice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q.1 Que peut-on dire de la matrice AA^* ? Et si la matrice A est inversible?

Q.2 Proposer une technique permettant de générer une matrice hermitienne semi-définie positive à partir d'une matrice aléatoire quelconque.

Q.3 Proposer une technique permettant de générer une matrice hermitienne définie positive à partir d'une matrice triangulaire inférieure inversible aléatoire.

Autres résultats

2024/09/23 19 / 31

Normes vectorielles

Definition

L'application $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ définie pour tout $(u, v) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ par

$$\langle u, v \rangle = u^t \cdot v = v^t \cdot u = \sum_{i=1}^n u_i v_i, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \quad (13)$$

$$\langle u, v \rangle = u^* \cdot v = \overline{v^* \cdot u} = \overline{\langle v, u \rangle} = \sum_{i=1}^n \overline{u_i} v_i, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \quad (14)$$

est appelée **produit scalaire** euclidien si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, hermitien^a si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Pour rappeler la dimension de l'espace, on écrit

$$\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle_n.$$

^aLa convention choisie pour le produit scalaire hermitien étant ici : linéarité à droite et semi-linéarité à gauche. Il est aussi possible de définir le produit scalaire hermitien par le complexe conjugué de (14) :

$$\langle u, v \rangle = v^* \cdot u = \sum_{i=1}^n u_i \overline{v_i}.$$

Dans ce cas le produit scalaire est une forme sesquilinéaire à droite.

Normes vectorielles

2024/09/23 20 / 31

♥ Definition

Une **norme** sur un espace vectoriel V est une application $\|\bullet\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes

- ◇ $\|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = 0$,
- ◇ $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbf{v} \in V$,
- ◇ $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$, $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V^2$ (inégalité triangulaire).

Une norme sur V est également appelée **norme vectorielle**. On appelle **espace vectoriel normé** un espace vectoriel muni d'une norme.

📖 Proposition

Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$. Pour tout nombre réel $p \geq 1$, l'application $\|\bullet\|_p$ définie par

$$\|\mathbf{v}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}$$

est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Normes usitées :

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|, \quad \|\mathbf{v}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^2 \right)^{1/2}, \quad \|\mathbf{v}\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |v_i|.$$

📖 Lemme 7.1: Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n \quad |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2. \quad (15)$$

Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**. On a égalité si et seulement si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont colinéaires.

🧑 Exercice:

Soient $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$.

Q.1 Trouver $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\langle \alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 0$.

Q.2 En calculant $\|\alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2$, montrer que $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2$. (16)

Q.3 Soit $\mathbf{x} \neq 0$. Montrer alors que l'inégalité (16) est une égalité si et seulement si $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$.

📖 Lemme 7.2: Inégalité de Hölder

Pour $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q} = \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q. \quad (17)$$

Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Hölder**.

🧑 Exercice:

Q.1 Soit la fonction $f(t) = (1 - \lambda) + \lambda t - t^\lambda$ avec $0 < \lambda < 1$. Montrer que pour tous $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ on a

$$\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leq \lambda \alpha + (1 - \lambda) \beta. \quad (18)$$

Soient $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{C}^n$. Soient $p > 1$ et $q > 1$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Q.2 On pose $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_p}$ et $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|_q}$. En utilisant l'inégalité (18), montrer que l'on a l'inégalité

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |u_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n |v_i|^q = 1. \quad (19)$$

Q.3 En déduire l'inégalité de Hölder suivante

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q. \quad (20)$$

Quel est le lien entre l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Cauchy-Schwarz?

♥ Definition 7.3

Deux **normes** $\|\bullet\|$ et $\|\bullet\|'$, définies sur un même espace vectoriel V , sont **équivalentes** s'il existe deux constantes C et C' telles que

$$\|\mathbf{x}\|' \leq C \|\mathbf{x}\| \quad \text{et} \quad \|\mathbf{x}\| \leq C' \|\mathbf{x}\|' \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in V. \quad (21)$$

📖 Proposition

Sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Normes matricielles

♥ Definition 8.1

Une **norme matricielle** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une application $\|\bullet\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant

- 1 $\|\mathbb{A}\| = 0 \iff \mathbb{A} = 0$,
- 2 $\|\alpha \mathbb{A}\| = |\alpha| \|\mathbb{A}\|, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
- 3 $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\| + \|\mathbb{B}\|, \forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ (inégalité triangulaire)
- 4 $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\| \|\mathbb{B}\|, \forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

Peut-on étendre cette définition sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$?

📖 Proposition: exercice 🐼

Etant donné une norme vectorielle $\|\bullet\|$ sur $\mathbb{K}^n$, l'application $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|\mathbb{A}\|_s \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad (22)$$

est une norme matricielle, appelée **norme matricielle subordonnée** (à la norme vectorielle donnée). Elle vérifie

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \|\mathbf{v}\| \leq 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \|\mathbf{v}\|=1}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \}. \quad (23)$$

De plus, pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ on a

$$\|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{v}\| \quad (24)$$

et il existe au moins un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que

$$\|\mathbb{A}\mathbf{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{u}\|. \quad (25)$$

Soit $\mathbb{I}$ la matrice identité d'ordre n , on a

$$\|\mathbb{I}\|_s = 1. \quad (26)$$

📖 Théorème 9: $\|\bullet\|_1$: 🐼, $\|\bullet\|_\infty$: 🐼, $\|\bullet\|_2$: 🐼

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\|\mathbb{A}\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_1}{\|\mathbf{v}\|_1} = \max_{j \in [1, n]} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (27)$$

$$\|\mathbb{A}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_2}{\|\mathbf{v}\|_2} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A})} \quad (28)$$

$$\|\mathbb{A}\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_\infty}{\|\mathbf{v}\|_\infty} = \max_{i \in [1, n]} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (29)$$

La norme $\|\bullet\|_2$ est invariante par transformation unitaire :

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I} \implies \|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}^* \mathbb{A} \mathbb{U}\|_2. \quad (30)$$

 Corollaire 9.1

- 1 Si une matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne, on a $\|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A})$.
- 2 Si une matrice $\mathbb{A}$ est unitaire, on a $\|\mathbb{A}\|_2 = 1$.

 Definition 10.1

Soit V un espace vectoriel muni d'une norme $\|\bullet\|$, on dit qu'une suite $(\mathbf{v}_k)$ d'éléments de V **converge vers un élément** $\mathbf{v} \in V$, si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}\| = 0$$

et on écrit

$$\mathbf{v} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{v}_k.$$

 Théorème 11: admis

Soit $\mathbb{B}$ une matrice carrée. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}^k = 0$,
- 2 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}^k \mathbf{v} = 0$ pour tout vecteur $\mathbf{v}$,
- 3 $\rho(\mathbb{B}) < 1$,
- 4 $\|\mathbb{B}\| < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée $\|\bullet\|$.

 Théorème 12: admis

Soit $\mathbb{B}$ une matrice carrée, et $\|\bullet\|$ une norme matricielle quelconque. Alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbb{B}^k\|^{1/k} = \rho(\mathbb{B}).$$