

EXERCICE 12

Ecrire une fonction algorithmique **QuadSimpson** retournant une approximation de l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ utilisant la méthode de quadrature composée de Simpson en **minimisant** le nombre d'appels à la fonction f . On rappelle que la formule élémentaire de Simpson est donnée par

$$\mathcal{Q}_2(g, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b-a}{6} \left(g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right).$$

Correction En notant $m_j = \frac{\alpha_{j-1} + \alpha_j}{2}$ le point milieu de l'intervalle $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx \sum_{j=1}^k \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x) dx &\approx \sum_{j=1}^k \mathcal{Q}_2(f, \alpha_{j-1}, \alpha_j) = \frac{h}{6} \sum_{j=1}^k (f(\alpha_{j-1}) + 4f(m_j) + f(\alpha_j)) \\ &\approx \frac{h}{6} \left(4 \sum_{j=1}^k f(m_j) + f(\alpha_0) + 2 \sum_{j=1}^{k-1} f(\alpha_j) + f(\alpha_k) \right) \end{aligned} \quad (\text{P-1})$$

Algorithme 1 Fonction **QuadSimpson** retourne une approximation de l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ utilisant la méthode de quadrature composée de Simpson en **minimisant** le nombre d'appels à la fonction f .

Données : f : une fonction définie de $[\alpha, \beta]$ dans \mathbb{R} ,
 α, β : deux réels avec $\alpha < \beta$,
 k : $n \in \mathbb{N}^*$

Résultat : I : un réel

```
1: Fonction  $I \leftarrow \text{QuadSimpson}(f, \alpha, \beta, k)$ 
2:    $h \leftarrow (\beta - \alpha)/k$ 
3:    $\mathbf{x} \leftarrow \alpha : h : \beta$ 
4:    $\mathbf{m} \leftarrow \alpha + h/2 : h : \beta$ 

5:    $S \leftarrow 0$ 

6:   Pour  $j \leftarrow 1$  à  $k$  faire
7:      $S \leftarrow S + f(\mathbf{m}(j))$ 
8:   Fin Pour
9:    $I \leftarrow 4 * S$ 

10:   $S \leftarrow 0$ 

11:  Pour  $j \leftarrow 2$  à  $k$  faire
12:     $S \leftarrow S + f(\mathbf{x}(j))$ 
13:  Fin Pour
14:   $I \leftarrow (h/6) * (I + 2 * S + f(\mathbf{x}(1)) + f(\mathbf{x}(k + 1)))$ 
15: Fin Fonction
```

▷ Calcul de $\sum_{j=1}^k f(m_j)$

▷ Calcul de $\sum_{j=1}^{k-1} f(\alpha_j) = \sum_{j=2}^k f(\mathbf{x}_j)$

