Analyse Numérique I*

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 1ère année / L3 MIM

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2024/11/06

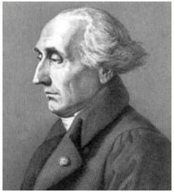
*Compilé le 2024/11/06 à 07:58:30

Chapitre V

Interpolation

Plan

Historique



(a) *Joseph-Louis Lagrange* 1736-1813, mathématicien italien puis français

(b) *Pafnouti Lvovitch Tchebychev* 1821-1894, mathématicien russe

(c) *Charles Hermite* 1822-1901, mathématicien français

(d) *Henri-Léon Lebesgue* 1875-1941, mathématicien français

Plan

Exercice 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(n+1)$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux. On note

Q. 1

1. *Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i de degré n vérifiant*

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \forall j \in [\![0, n]\!]. \tag{1}$$

2. *Montrer que les $(L_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n).*

On défini le polynôme P_n par

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x). \tag{2}$$

Q. 2

Montrer que polynôme P_n est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant $\mathrm{P}_n(x_i) = y_i$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.

Definition 1.1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(n+1)$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange** de $\mathbb{R}_n[X]$, noté P_n, et vérifiant

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad \mathrm{P}_n(x_i) = y_i \tag{1}$$

est donné par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \mathrm{L}_i(x), \tag{2}$$

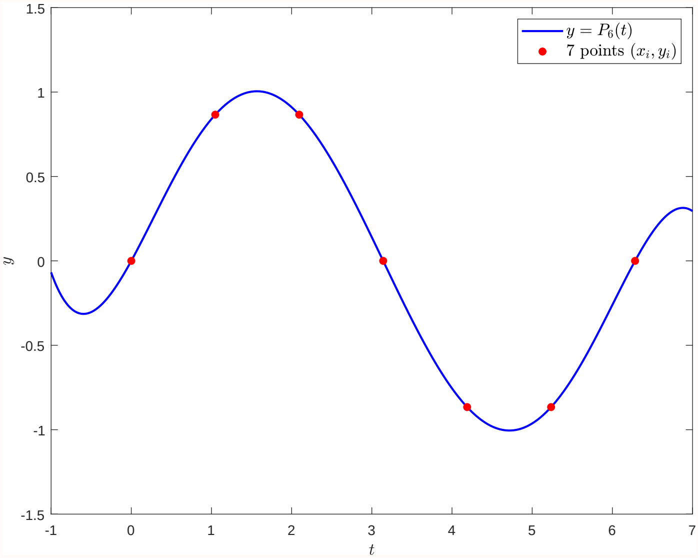
où les $\mathrm{L}_i \in \mathbb{R}_n[X]$ sont les **polynômes de base de Lagrange** donnés par

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{L}_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \tag{3}$$

Théorème 1.1

Le **polynôme d'interpolation de Lagrange**, $\mathcal{P}_n$, associé aux $(n+1)$ couples $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, est l'unique polynôme de degré au plus n, vérifiant

$$\mathcal{P}_n(x_i) = y_i, \ \forall i \in [\![0,n]\!]. \tag{4}$$



Polynôme d'interpolation de Lagrange avec 7 points donnés

Exercice 2

Ecrire la fonction Lagrange permettant de calculer $\mathcal{P}_n$ (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $(n+1)$ couples $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$) en $t \in \mathbb{R}$.

On a

$$\mathrm{P}_n(t) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(t).$$

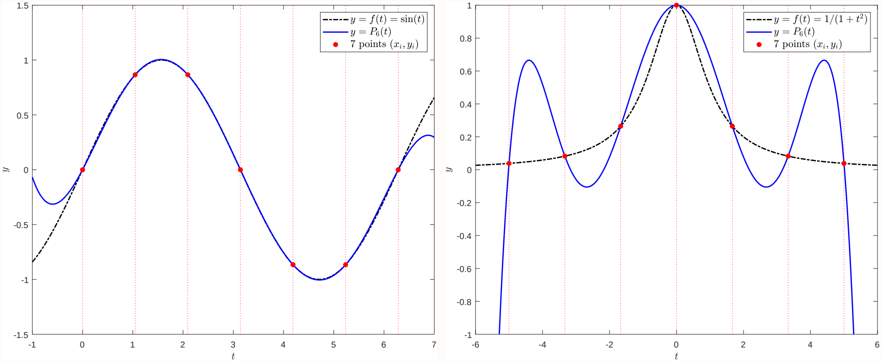
avec

$$\mathrm{L}_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{t - x_j}{x_i - x_j}$$

Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{5}$$

On cherche à évaluer l'erreur $E_n(t) = f(t) - \mathcal{P}_n(t)$, $\forall t \in [a, b]$.

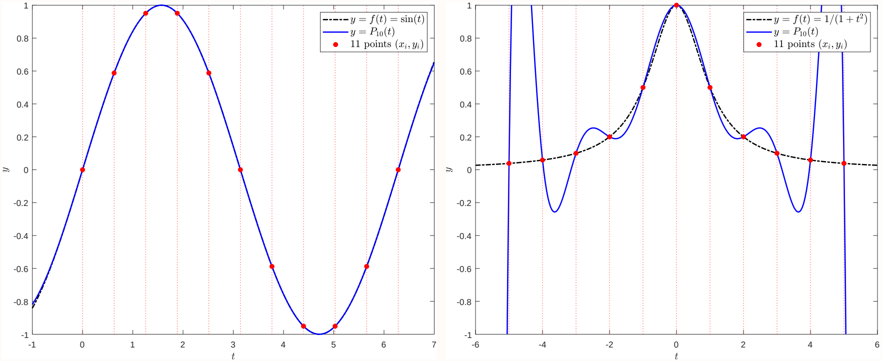


Polynômes d'interpolation de lagrange avec $n = 6$ (7 points) uniformément répartis. A gauche pour la fonction $f : t \longrightarrow sin(t)$ avec $x_0 = 0$, $x_6 = 2\pi$ et à droite pour la fonction $f : t \longrightarrow 1/(1 + t^2)$ avec $x_0 = -5$, $x_6 = 5$.

Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{5}$$

On cherche à évaluer l'erreur $E_n(t) = f(t) - \mathcal{P}_n(t)$, $\forall t \in [a, b]$.

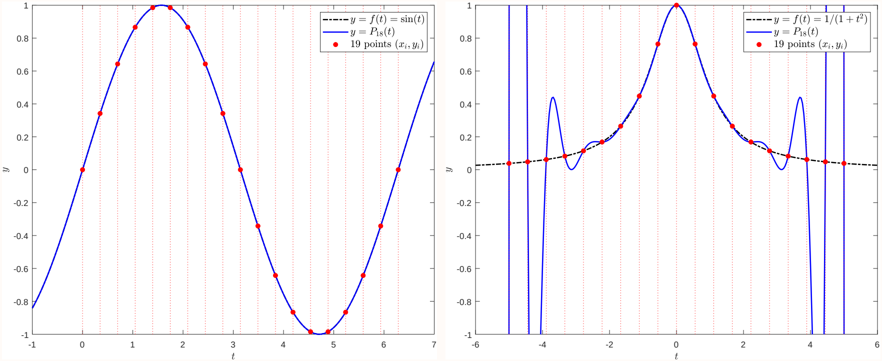


Polynômes d'interpolation de lagrange avec $n = 10$ (11 points) uniformément répartis. A gauche pour la fonction $f : t \longrightarrow sin(t)$ avec $x_0 = 0$, $x_{10} = 2\pi$ et à droite pour la fonction $f : t \longrightarrow 1/(1 + t^2)$ avec $x_0 = -5$, $x_{10} = 5$.

Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{5}$$

On cherche à évaluer l'erreur $E_n(t) = f(t) - \mathcal{P}_n(t)$, $\forall t \in [a, b]$.



Polynômes d'interpolation de lagrange avec $n = 18$ (19 points) uniformément répartis. A gauche pour la fonction $f : t \longrightarrow sin(t)$ avec $x_0 = 0$, $x_{18} = 2\pi$ et à droite pour la fonction $f : t \longrightarrow 1/(1 + t^2)$ avec $x_0 = -5$, $x_{18} = 5$.

Plan

Lemme 1.1 : ***Séparation des zéros d'une fonction***

Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $(x_i)_{i=0}^n$ dans I, avec $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, tel que

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad f(x_i) = 0.$$

1. Si $f \in \mathcal{C}^0(I;\mathbb{R})$, avec f dérivable sur I, alors, il existe $(\xi_i)_{i=1}^n$ dans I, avec $x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \ldots < \xi_n < x_n$, tel que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad f^{(1)}(\xi_i) = 0.$$

2. Si $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I;\mathbb{R})$, avec $f^{(n-1)}$ dérivable alors il existe $\xi \in]x_0, x_n[$ tel que $f^{(n)}(\xi) = 0$.

voir Exercice 3

Exercice 4

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a;b];\mathbb{R})$ et $(n+1)$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, tels que les $x_i \in [a;b]$ sont distincts deux à deux et $y_i = f(x_i)$.
On note par P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ et π_n le polynôme de degré $(n+1)$ défini par

$$\pi_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Q. 1

Soit $x \in [a;b]$ tel que, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $x \neq x_i$. On note

$$x_{\min} = \min(x, x_0, \ldots, x_n), \quad x_{\max} = \max(x, x_0, \ldots, x_n),$$

et

$$F(t) = f(t) - \mathrm{P}_n(t) - \frac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n(t).$$

1. *Démontrer que F est définie sur $[a;b]$ et admet $(n+2)$ racines distinctes.*
2. *Montrer qu'il existe $\xi_x \in]x_{\min}; x_{\max}[$ tel que $F^{(n+1)}(\xi_x) = 0$.*
3. *En déduire que*

$$f(x) - \mathrm{P}_n(x) = \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \tag{1}$$

Q. 2

Montrer que, $\forall x \in [a;b]$, il existe ξ_x appartenant au plus petit intervalle ouvert contenant $x, x_0, \ldots, x_n$ vérifiant (1).

Théorème 1.2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i)_{i=0}^{n}$, $(n+1)$ points distincts de l'intervalle $[a,b]$. Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a;b];\mathbb{R})$ et $\mathcal{P}_n$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n passant par $(x_i, f(x_i))$, $\forall i \in [\![0,n]\!]$.
Alors,
$\forall x \in [a,b],\ \exists \xi_x \in (min(x_i,x), max(x_i,x))$,

$$f(x) - \mathcal{P}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{6}$$

Comment "minimiser" $f(x) - \mathrm{P}_n(x)$?

"jouer" sur le choix des points x_i

Trouver $(\bar{x}_i)_{i=0}^n$, $\bar{x}_i \in [a, b]$, distincts deux à deux, tels que
$\forall (x_i)_{i=0}^n$, $x_i \in [a, b]$, distincts 2 à 2

$$\max_{t \in [a,b]} \prod_{i=0}^{n} |t - \bar{x}_i| \leqslant \max_{t \in [a,b]} \prod_{i=0}^{n} |t - x_i|, \tag{7}$$

On a alors le résultat suivant

Théorème 1.3 : *admis*

Les points réalisant (7) sont les points de Tchebychev donnés par

$$\bar{x}_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\right), \ \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{8}$$

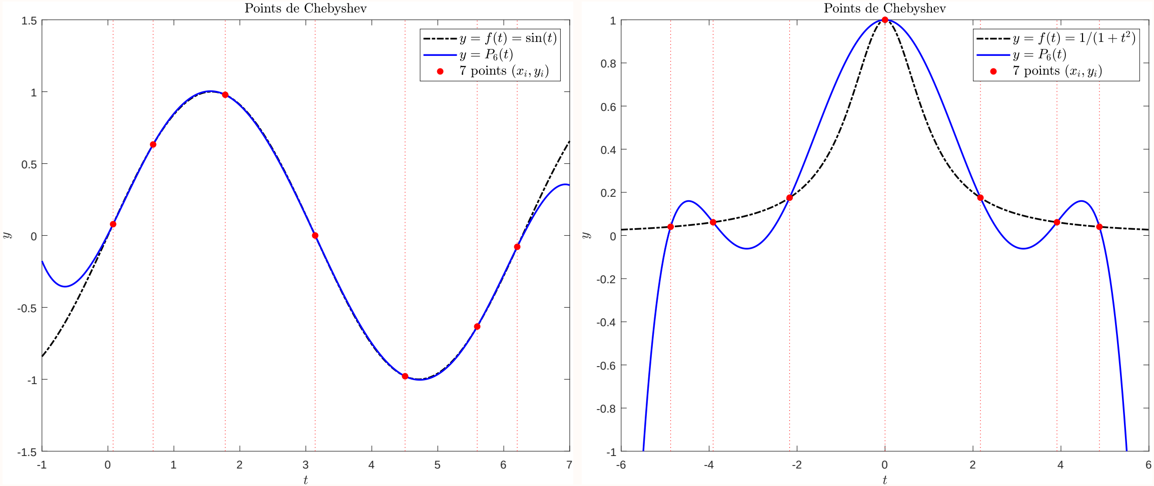


Figure: Erreurs d'interpolation avec $n = 6$

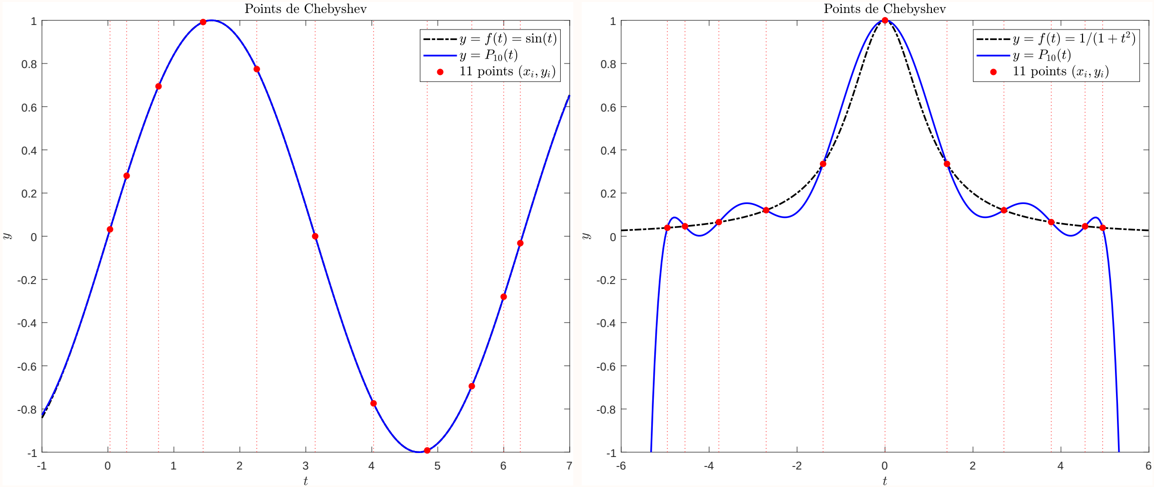


Figure: Erreurs d'interpolation avec $n = 10$

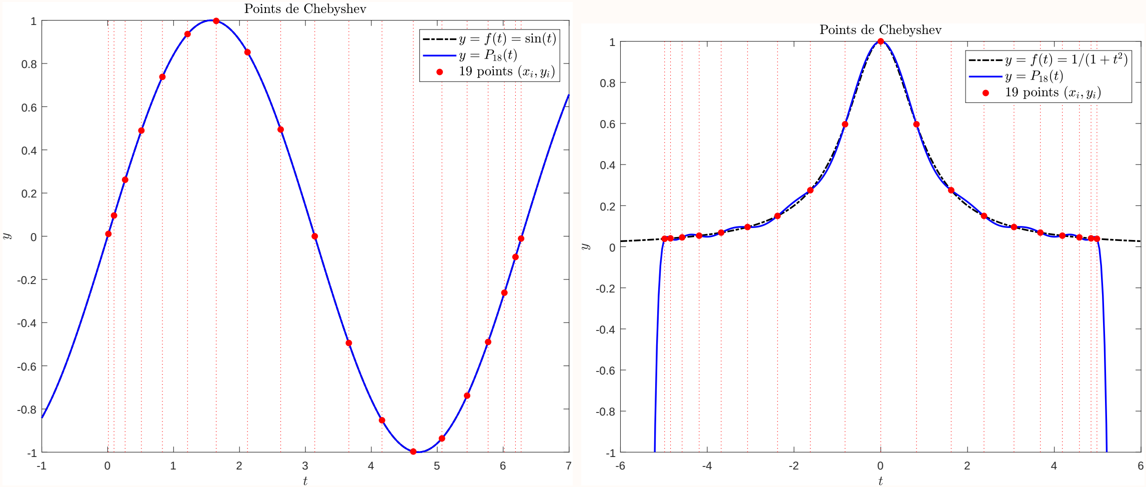


Figure: Erreurs d'interpolation avec $n = 18$

Plan

On commet des erreurs sur les données

$$f_i \approx f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]$$

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathrm{L}_i(x) \quad \text{et} \quad \widehat{\mathrm{P}}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \mathrm{L}_i(x)$$

$$\begin{aligned} |\widehat{\mathrm{P}}_n(x) - \mathrm{P}_n(x)| &= |\sum_{i=0}^{n}(f_i - f(x_i))\mathrm{L}_i(x)| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n} |f_i - f(x_i)||\mathrm{L}_i(x)| \\ &\leqslant \max_{i\in[\![0,n]\!]} |f_i - f(x_i)| \sum_{i=0}^{n} |\mathrm{L}_i(x)|. \end{aligned}$$

Constante de Lebesgue : $\Lambda_n = \max_{x\in[a,b]} \sum_{i=0}^{n} |\mathrm{L}_i(x)|.$

$$\left\|\widehat{\mathrm{P}}_n - \mathrm{P}_n\right\|_\infty \leqslant \Lambda_n \max_{i\in[\![0,n]\!]} |f_i - f(x_i)|.$$

Théorème 1.4

Soient $n \in N^*$ et $x_0, \cdots, x_n$ des points distincts de $[a,b]$. L'application $\mathcal{L}_n : \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ qui a toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ donne le polynôme d'interpolation de Lagrange P_n associés aux couples de $(x_i, f(x_i))_{i \in [\![0,n]\!]}$ est bien définie et linéaire. On munit $\mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[X]$ de la norme $\|.\|_\infty$. On a alors

$$\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leqslant \Lambda_n \|f\|_\infty, \tag{9}$$

ce qui assure la continuité de $\mathcal{L}_n$,

$$\|\mathcal{L}_n\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}) \\ f \neq 0}} \frac{\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \Lambda_n, \tag{10}$$

et

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}), \quad \|f - \mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leqslant (1 + \Lambda_n) \inf_{\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - \mathrm{Q}\|_\infty \tag{11}$$

voir Exercice 5

- Pour les **points équidistants** $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$ et $h = (b-a)/n$,

$$\Lambda_n \geqslant \frac{2^n}{4n^2} \tag{12}$$

et le comportement asymptotique $(n \to +\infty)$

$$\Lambda_n \sim \frac{2^{n+1}}{e.n\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \tag{13}$$

- Pour les **points de Tchebychev**,

$$\Lambda_n \leqslant C\ln(n), \quad \text{avec} \quad C > 0 \tag{14}$$

et le comportement asymptotique

$$\Lambda_n \sim \frac{2}{\pi}\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \tag{15}$$

voir **Demailly2006**, page 47-48.

Proposition : *admis*

Pour toute famille de points d'interpolation, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ telle que la suite des polynômes d'interpolation de Lagrange associés ne converge pas uniformément.

Proposition : *admis*

Soit f une fonction lipschitzienne sur $[a,b]$ à valeurs réelles, i.e. il existe une constante $K \geqslant 0$ telle que $\forall (x,y) \in [a,b]^2$, on ait $|f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|$. Soient $n \in N^*$ et $x_0, \cdots, x_n$ les points de Tchebychev $[a,b]$. On note $\mathcal{L}_n(f)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange associés aux couples de $(x_i, f(x_i))_{i\in[\![0,n]\!]}$.
Alors la suite $(\mathcal{L}_n(f))_{n\geqslant 1}$ des polynômes d'interpolation converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

voir **Demailly2006-im**, page 50.

Conclusion

L'interpolation de Lagrange en des points équidistants n'est à utiliser qu'avec un nombre de points assez faible : des phénomènes d'instabilités pouvant apparaître.

Exercice 6 Interpolation de Lagrange-Hermite

Soient $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ $n+1$ triplets de $\mathbb{R}^3$, où les x_i sont des points distincts deux à deux de l'intervalle $[a,b]$. Le polynôme d'interpolation de **Lagrange-Hermite**, noté H_n, associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, est défini par

$$\mathrm{H}_n(x_i) = y_i \quad \text{et} \quad \mathrm{H}_n'(x_i) = z_i, \ \forall i \in [\![0,n]\!] \tag{1}$$

Q. 1 *Quel est a priori le degré de H_n?*

On défini le polynôme P_n par

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i(x) \tag{2}$$

avec, pour $i \in [\![0,n]\!]$, A_i et B_i polynômes de degré au plus $2n+1$ indépendants des valeurs y_i et z_i.

Q. 2

1. *Déterminer des conditions suffisantes sur A_i et B_i pour que P_n vérifie (1).*
2. *En déduire les expressions de A_i et B_i en fonction de L_i et de $L_i'(x_i)$ où*

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Q. 3 *Démontrer qu'il existe un unique polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite de degré au plus $2n+1$ défini par (1).*

Definition 2.1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ $(n+1)$ triplets de $\mathbb{R}^3$, où les x_i sont des points distincts deux à deux de $\mathbb{R}$. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite**, noté H_n, associé aux $(n+1)$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, est défini par

$$\mathrm{H}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i(x) \tag{16}$$

avec

$$A_i(x) = \big(1 - 2(x - x_i)L_i'(x_i)\big)L_i^2(x) \quad \text{et} \quad B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x) \tag{17}$$

où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Théorème 2.1

Le **polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite**, H_n, associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, est l'unique polynôme de degré au plus $2n+1$, vérifiant

$$\mathrm{H}_n(x_i) = y_i \quad \text{et} \quad \mathrm{H}'_n(x_i) = z_i, \ \forall i \in [\![0, n]\!] \tag{18}$$

Exercice 7 Interpolation de Lagrange-Hermite

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a,b];\mathbb{R})$. et $(x_i)_{i=0}^{n}$, $(n+1)$ points distincts de $[a;b]$. On note

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad y_i = f(x_i) \ \text{ et } \ z_i = f'(x_i).$$

On définit, par H_n, le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux triplets $(x_i, f(x_i), f'(x_i))_{i\in[\![0,n]\!]}$ et par π_n le polynôme défini par

$$\pi_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^{n}(t - x_i).$$

Q. 1 *Soit $x \in [a;b]$ tel que, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $x \neq x_i$. On note*

$$x_{\min} = \min(x, x_0, \ldots, x_n), \quad x_{\max} = \max(x, x_0, \ldots, x_n),$$

et

$$F(t) = f(t) - \mathrm{H}_n(t) - \frac{f(x) - \mathrm{H}_n(x)}{\kappa_n(x)}\kappa_n(t)$$

avec $\kappa_n \stackrel{\text{def}}{=} \pi_n^2$.

1. *Démontrer que F est définie sur $[a;b]$ et que $F \in \mathcal{C}^{2n+2}([a,b];\mathbb{R})$.*
2. *Montrer que F' admet $2(n+1)$ zéros distincts.*
3. *Montrer qu'il existe $\xi_x \in]x_{\min}; x_{\max}[$ tel que $F^{(2n+2)}(\xi_x) = 0$.*
4. *En déduire que*

$$f(x) - \mathrm{H}_n(x) = \frac{\kappa_n(x)}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi_x). \tag{1}$$

Q. 2 *Montrer que, $\forall x \in [a;b]$, il existe ξ_x appartenant au plus petit intervalle ouvert contenant $x, x_0, \ldots, x_n$ vérifiant (1).*

Théorème 2.2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \cdots, x_n$, $n+1$ points distincts de l'intervalle $[a, b]$. Soient $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a; b]; \mathbb{R})$ et H_n le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux $n+1$ triplets $(x_i, f(x_i), f'(x_i))_{i \in [\![0,n]\!]}$. On a alors $\forall x \in [a, b]$, $\exists \xi_x \in (\min(x_i, x), \max(x_i, x))$, tels que

$$f(x) - \mathrm{H}_n(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2 \tag{19}$$

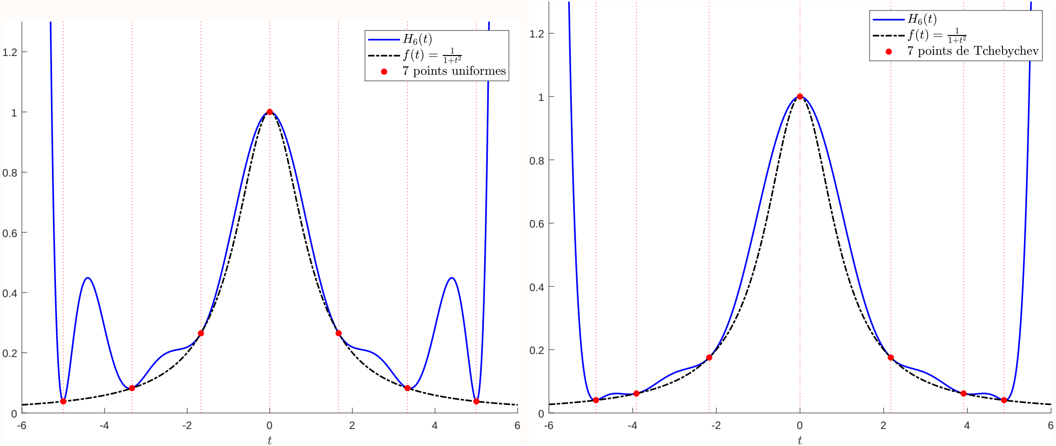
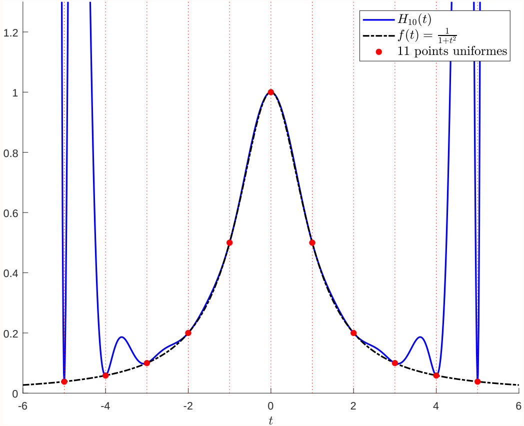


Figure: Polynôme d'interpolation de lagrange-Hermite avec $n = 6$ (7 points) pour la fonction $f : x \longrightarrow 1/(1 + 25x^2)$. A gauche avec des points uniforméments répartis et à droite avec des points de Tchebychev



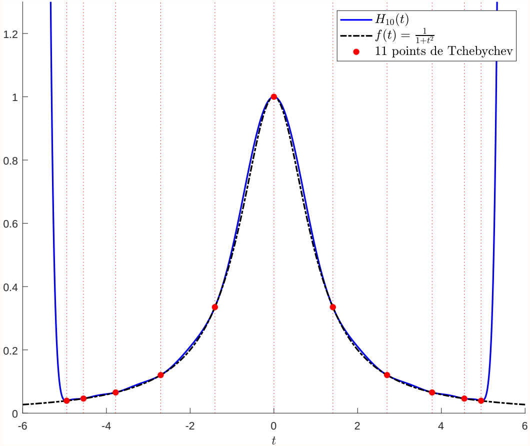


Figure: Polynôme d'interpolation de lagrange-Hermite avec $n = 10$ (11 points) pour la fonction $f : x \longrightarrow 1/(1+x^2)$. A gauche avec des points uniforméments répartis et à droite avec des points de Tchebychev

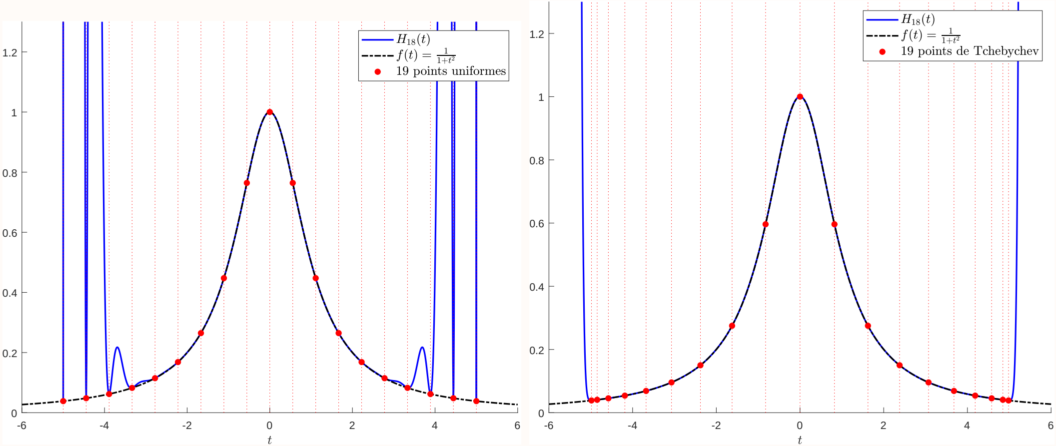


Figure: Polynôme d'interpolation de lagrange-Hermite avec $n = 18$ (19 points) pour la fonction $f : x \longrightarrow 1/(1 + x^2)$. A gauche avec des points uniforméments répartis et à droite avec des points de Tchebychev

Definition : *(rappel)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i, z_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ $(n+1)$ triplets de $\mathbb{R}^3$, où les x_i sont des points distincts deux à deux de $\mathbb{R}$. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite**, noté H_n, associé aux $(n+1)$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, est défini par

$$\mathrm{H}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i(x) \tag{20}$$

avec

$$A_i(x) = \left(1 - 2(x - x_i)L_i'(x_i)\right)L_i^2(x) \quad \text{et} \quad B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x) \tag{21}$$

où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Exercice 8 Interpolation de Lagrange-Hermite

Ecrire une fonction algorithmique Hermite permettant de calculer H_n (polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$) en $t \in \mathbb{R}$.

Il existe de nombreuses autres façons d'approcher une fonction:

- interpolation affine par morceau,
- interpolation par fonctions splines,
- méthodes des moindres carrés,
- interpolation trigonométrique et FFT,
- ...