

EXERCICE 3

Soient I un intervalle non vide de \mathbb{R} , $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $(x_i)_{i=0}^n$ dans I , avec $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, tel que

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad f(x_i) = 0.$$

Q. 1

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$, avec f dérivable sur I . On suppose qu'il existe $(x_i)_{i=0}^n$ dans I , avec $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, tel que

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad f(x_i) = 0.$$

Montrer qu'il existe $(\xi_i)_{i=1}^n$ dans I , avec $x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \dots < \xi_n < x_n$, tel que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad f^{(1)}(\xi_i) = 0.$$

R. 1

On rappelle le théorème de Rolle:

Théorème (Rolle). Soient a, b deux réels, $a < b$, et, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que

- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$,
- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Sur l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$, $x_{k-1} < x_k$, on a $f(x_{k-1}) = f(x_k) (= 0)$ et le théorème de Rolle s'applique:

$$\exists \xi_k \in]x_{k-1}, x_k[, \quad f^{(1)}(\xi_k) = 0.$$

La fonction $f^{(1)}$ admet donc au moins n zéros distincts, les $(\xi_k)_{k=1}^n$, avec

$$x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < \dots < x_{n-1} < \xi_n < x_n.$$

Q. 2

Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition suivante

(\mathcal{P}_n)

Soit $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I; \mathbb{R})$, $f^{(n-1)}$ dérivable sur I . Si f admet au moins $(n+1)$ zéros distincts dans I , notés $x_0 < \dots < x_n$, alors $f^{(n)}$ admet au moins un zéro dans $]x_0, x_n[$.

R. 2

- **Initialisation.** Montrons que (\mathcal{P}_1) est vérifiée.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$ et f dérivable sur I . Si f admet au moins 2 zéros distincts dans I , notés x_0 et x_1 , avec $x_0 < x_1$, alors on a $f(x_0) = f(x_1) (= 0)$ et le théorème de Rolle s'applique:

$$\exists \xi \in]x_0, x_1[, \quad f^{(1)}(\xi) = 0.$$

- **Hérédité.** Soit $n \geq 2$. On suppose que (\mathcal{P}_{n-1}) est vraie. Montrons que (\mathcal{P}_n) est vérifiée.

Soit $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I; \mathbb{R})$, $f^{(n-1)}$ dérivable sur I . On suppose que f admet au moins $(n+1)$ zéros distincts dans I , notés $(x_i)_{i=0}^n$ avec $x_0 < \dots < x_n$. On a donc

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad f(x_i) = 0.$$

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme on vérifie les hypothèse de **Q. 1**, on en déduit

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \exists \xi_k \in]x_{k-1}, x_k[, \text{ tel que } f^{(1)}(\xi_k) = 0.$$

La fonction $f^{(1)}$ admet donc au moins n zéros distincts, les $(\xi_k)_{k=1}^n$, avec $x_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n < x_n$. En posant $g = f^{(1)}$, on a, par hypothèse sur f , $g \in \mathcal{C}^{n-2}(I; \mathbb{R})$ et $g^{(n-2)}$ dérivable sur I . La fonction g admettant n zéros

distincts dans I , les $(\xi_k)_{k=1}^n$, avec $\xi_1 < \dots < \xi_n$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence (\mathcal{P}_{n-1}) à g pour obtenir

$$\exists \xi \in]\xi_1, \xi_n[, \quad g^{(n-1)}(\xi) = 0.$$

On abouti alors à $f^{(n)}(\xi) = 0$ avec $\xi \in]\xi_1, \xi_n[\subset]x_0, x_n[$.

Ce qui prouve (\mathcal{P}_n) .

- **Conclusion.** On a démontré par récurrence que (\mathcal{P}_n) est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

