

## EXERCICE 1

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(n + 1)$  couples de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , tels que les  $x_i$  sont distincts deux à deux. On note

Q. 1

a. Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme  $L_i$  de degré  $n$  vérifiant

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (\text{P-1})$$

b. Montrer que les  $(L_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  forment une base de  $\mathbb{R}_n[X]$  (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ ).

R. 1

a. De (P-1), on déduit que les  $n$  points distincts  $x_j$  pour  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}$  sont les  $n$  zéros du polynôme  $L_i$  de degré  $n$  : il s'écrit donc sous la forme

$$L_i(x) = C \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Pour déterminer la constante  $C$ , on utilise (P-1) avec  $j = i$

$$L_i(x_i) = 1 = C \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)$$

Les points  $x_i$  sont distincts deux à deux, on a  $\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j) \neq 0$  et donc

$$C = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}$$

d'où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (\text{R1.1})$$

Il reste à démontrer l'unicité. On suppose qu'il existe  $L_i$  et  $U_i$  deux polynômes de  $\mathbb{R}_n[X]$  vérifiant (P-1). Alors  $Q_i = L_i - U_i$  est polynôme de degré  $n$  (au plus) admettant  $n + 1$  zéros distincts, c'est donc le polynôme nul et on a nécessairement  $L_i = U_i$ .

- b. On sait que  $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$ . Pour que les  $\{L_i\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  forment une base de  $\mathbb{R}_n[X]$  il suffit de démontrer qu'ils sont linéairement indépendants.

Soit  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$   $n + 1$  scalaires. Montrons pour cela que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0 \implies \lambda_i = 0, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

Noter que la première égalité est dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_n[X]$  et donc le 0 est pris au sens polynôme nul.

On a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0 \iff \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . En choisissant  $x = x_k$ , on a par (P-1)  $\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(x_k) = \lambda_k$  et donc

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0 \implies \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(x_k) = 0, \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \iff \lambda_k = 0, \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

Les  $\{L_i\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  sont donc linéairement indépendants.

On définit le polynôme  $P_n$  par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x). \quad (\text{P-2})$$

Q. 2

Montrer que polynôme  $P_n$  est l'unique polynôme de degré au plus  $n$  vérifiant  $P_n(x_i) = y_i, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

R. 2

Par construction  $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$  et on a,  $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket^a$ ,

$$\begin{aligned} P_n(x_j) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^n y_i L_i(x_j) \\ &= \sum_{i=0}^n y_i \delta_{i,j} \text{ par (P-1)} \\ &= y_j. \end{aligned}$$

Pour démontrer l'unicité, on propose ici deux méthodes

- On note  $P_a$  et  $P_b$  deux polynômes de  $\mathbb{R}_n[X]$  vérifiant (P-1). Le polynôme  $Q = P_a - P_b$  appartient aussi à  $\mathbb{R}_n[X]$  et il vérifie,  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$Q(x_i) = P_a(x_i) - P_b(x_i) = 0.$$

Les  $n + 1$  points  $x_i$  étant distincts, ce sont donc  $n + 1$  racines distinctes du polynôme  $Q$ . Or tout polynôme de degré  $n$  admet au plus  $n$  racines distinctes<sup>b</sup>. On en déduit que le seul polynôme de degré au plus  $n$  admettant  $n + 1$  racines distinctes est le polynôme nulle et donc  $P_a = P_b$ .

- c'est l'unique polynôme de degré au plus  $n$  vérifiant (P-2) car la décomposition dans la base  $\{L_i\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  est unique.

---

<sup>a</sup>A noter le choix de l'indice  $j$ . Que doit-on faire dans ce qui suit si l'on choisi  $i$  comme indice?

<sup>b</sup>Le théorème de d'Alembert-Gauss affirme que tout polynôme à coefficients complexes de degré  $n$  admet  $n$  racines complexes qui ne sont pas nécessairement distinctes

