

## EXERCICE 1

Soient  $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$   $n + 1$  triplets de  $\mathbb{R}^3$ , où les  $x_i$  sont des points distincts deux à deux de l'intervalle  $[a, b]$ . Le polynôme d'interpolation de **Lagrange-Hermite**, noté  $\mathcal{H}_n$ , associé aux  $n + 1$  triplets  $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , est défini par

$$\mathcal{H}_n(x_i) = y_i \text{ et } \mathcal{H}'_n(x_i) = z_i, \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad (\text{P-1})$$

Q. 1

*Quel est a priori le degré de  $\mathcal{H}_n$ ?*

On définit le polynôme  $P_n$  par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^n z_i B_i(x) \quad (\text{P-2})$$

avec, pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $A_i$  et  $B_i$  polynômes de degré au plus  $2n + 1$  indépendants des valeurs  $y_i$  et  $z_i$ .

Q. 2

- Déterminer des conditions suffisantes sur  $A_i$  et  $B_i$  pour que  $P_n$  vérifie (P-1).*
- En déduire les expressions de  $A_i$  et  $B_i$  en fonction de  $L_i$  et de  $L'_i(x_i)$  où*

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Q. 3

*Démontrer qu'il existe un unique polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite de degré au plus  $2n + 1$  défini par (P-1).*

