

EXERCICE 5

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et x_0, \dots, x_n des points distincts de $[a, b]$ ordonnés par ordre croissant. On pose $E \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ et $F \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}_n[X]$, et, on les munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On note $\mathcal{L}_n : E \longrightarrow F$ l'application qui à $f \in E$ associe le polynôme d'interpolation de Lagrange $P_n \in F$ tel que $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P_n(x_i) = f(x_i)$.

Q. 1

- a. Montrer que \mathcal{L}_n est bien définie.
- b. Montrer que \mathcal{L}_n est linéaire.
- c. Montrer que \mathcal{L}_n est continue et que

$$\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leq \Lambda_n \|f\|_\infty, \quad (\text{P-1})$$

$$\text{où } \Lambda_n = \max_{x \in [a, b]} \sum_{i=0}^n |L_i(x)|.$$

R. 1

- a. Comme $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, on a, $\forall x \in [a, b], f(x)$ défini. ^a On a donc, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, f(x_i)$ défini. D'après le Théorème ??, les points $(x_i)_{i=0}^n$ étant distincts deux à deux, le polynôme d'interpolation de Lagrange $\mathcal{L}_n(f)$ associés aux couples de $(x_i, f(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est unique dans $\mathbb{R}_n[X]$. L'application \mathcal{L}_n est donc bien définie.
- b. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, et, f et g deux fonctions de $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$. il nous faut démontrer, par exemple, que

$$\mathcal{L}_n(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{L}_n(f) + \mu \mathcal{L}_n(g).$$

Cette dernière équation est équivalente à

$$\forall x \in [a, b], \quad \mathcal{L}_n(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \mathcal{L}_n(f)(x) + \mu \mathcal{L}_n(g)(x).$$

Soit $x \in [a, b]$. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_n(\lambda f + \mu g)(x) &= \sum_{i=0}^n (\lambda f + \mu g)(x_i) L_i(x) \\
&= \sum_{i=0}^n (\lambda f(x_i) + \mu g(x_i)) L_i(x) \\
&= \lambda \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) + \mu \sum_{i=0}^n g(x_i) L_i(x) \\
&= \lambda \mathcal{L}_n(f)(x) + \mu \mathcal{L}_n(g)(x).
\end{aligned}$$

Ce qui démontre la linéarité de \mathcal{L}_n .

c. Comme \mathcal{L}_n est linéaire, pour démontrer qu'elle est continue, il suffit de démontrer que

$$\exists C > 0 \text{ t.q. } \forall f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}), \|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leq C \|f\|_\infty.$$

En effet, on a pour tout $x \in [a, b]$ et pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}_n(f)(x)| &= \left| \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) \right| \\
&\leq \sum_{i=0}^n |f(x_i) L_i(x)| \leq \|f\|_\infty \sum_{i=0}^n |L_i(x)| \\
&\leq \Lambda_n \|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leq \Lambda_n \|f\|_\infty. \tag{P-1}$$

En prenant $C = \Lambda_n$, qui est bien indépendant de f , on obtient la continuité de \mathcal{L}_n .

^aCeci n'aurait pas été le cas si $f \in L^2([a, b])$ puisque $f(x)$ aurait alors été défini pour presque tout $x \in [a, b]$.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires et continues de E dans F muni de la norme

$$\forall \mathcal{H} \in \mathcal{L}(E, F), \quad \|\mathcal{H}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}^0([a,b]; \mathbb{R}) \\ f \neq 0}} \frac{\|\mathcal{H}(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$$

Q. 2

a. Montrer que

$$\|\mathcal{L}_n\| \leq \Lambda_n. \quad (\text{P-2})$$

b. Montrer qu'il existe $\bar{x} \in [a, b]$ vérifiant

$$\Lambda_n = \sum_{i=0}^n |L_i(\bar{x})|.$$

c. Montrer qu'il existe $\bar{f} \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ vérifiant

$$|\mathcal{L}_n(\bar{f})(\bar{x})| = \Lambda_n \|\bar{f}\|_\infty.$$

d. Conclure.

R. 2

a. Soit $f \in E$, $f \neq 0$. (rappel: $f = 0 \Leftrightarrow \|f\|_\infty = 0$) De (P-1), on a

$$\frac{\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leq \Lambda_n.$$

En prenant le sup sur toutes les fonctions non nulles, on obtient

$$\|\mathcal{L}_n\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{f \in E \\ f \neq 0}} \frac{\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leq \Lambda_n. \quad (\text{R5.1})$$

b. L'application $x \mapsto \sum_{i=0}^n |L_i(x)|$ étant continue sur le fermé borné $[a, b]$, il existe alors $\bar{x} \in [a, b]$ tel que

$$\Lambda_n = \max_{x \in [a, b]} \sum_{i=0}^n |L_i(x)| = \sum_{i=0}^n |L_i(\bar{x})|.$$

c. On a

$$|\mathcal{L}_n(f)(\bar{x})| = \left| \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(\bar{x}) \right|$$

et on veut déterminer $\bar{f} \in E$ pour avoir

$$\left| \sum_{i=0}^n \bar{f}(x_i) L_i(\bar{x}) \right| = \sum_{i=0}^n |\bar{f}(x_i) L_i(\bar{x})|. \quad (\text{R5.2})$$

Il faut donc que, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, les réels $\bar{f}(x_i) L_i(\bar{x})$ aient le même signe. On choisi le signe positif, et on impose par exemple les valeurs de $\bar{f}(x_i)$,

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \begin{cases} \bar{f}(x_i) &= 1, & \text{si } L_i(\bar{x}) \geq 0, \\ \bar{f}(x_i) &= -1, & \text{si } L_i(\bar{x}) < 0. \end{cases}$$

Ainsi, avec cette construction, (R5.2) est bien vérifiée.

Enfin, il faut aussi que l'on ai

$$\sum_{i=0}^n |\bar{f}(x_i) L_i(\bar{x})| = \|\bar{f}\|_{\infty} \sum_{i=0}^n |L_i(\bar{x})|$$

Comme les $(x_i)_{i=0}^n$ sont ordonnés par ordre croissant, on a

$$a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$$

et on peut alors choisir \bar{f} affine sur chacun des intervalles $[x_k, x_{k+1}]$, $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, puisque l'on connaît les valeurs aux extrémités de chaque intervalle (+1 ou -1). En dehors de ces intervalles, on prend par exemple

$\bar{f}(x) = \bar{f}(x_0)$, $\forall x \in [a, x_0]$, et $\bar{f}(x) = \bar{f}(x_n)$, $\forall x \in [x_n, b]$. Cette fonction est par construction continue, donc dans E , et

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad |f(x_i)| = \|\bar{f}\|_\infty.$$

Au final, on obtient avec cette fonction

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_n(\bar{f})(\bar{x})| &= \left| \sum_{i=0}^n \bar{f}(x_i) L_i(\bar{x}) \right| \\ &= \sum_{i=0}^n |\bar{f}(x_i) L_i(\bar{x})| = \|\bar{f}\|_\infty \sum_{i=0}^n |L_i(\bar{x})| \\ &= \Lambda_n \|\bar{f}\|_\infty. \end{aligned}$$

d. On déduit de l'égalité précédente que

$$\|\mathcal{L}_n(\bar{f})\|_\infty \geq \Lambda_n \|\bar{f}\|_\infty$$

et comme $\|\bar{f}\|_\infty \neq 0$, on obtient

$$\frac{\|\mathcal{L}_n(\bar{f})\|_\infty}{\|\bar{f}\|_\infty} \geq \Lambda_n.$$

En utilisant conjointement cette equation et (R5.2), on obtient

$$\|\mathcal{L}_n\| = \Lambda_n.$$

Q. 3

Soit $f \in E$. Montrer que

$$\|f - \mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \inf_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - Q\|_\infty \quad (\text{P-3})$$

R. 3

Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Par unicité du théorème d'interpolation on a $\mathcal{L}_n(Q) = Q$ et alors

$$\begin{aligned}\|f - \mathcal{L}_n(f)\|_\infty &= \|f - Q + \mathcal{L}_n(Q) - \mathcal{L}_n(f)\|_\infty \\ &\leq \|f - Q\|_\infty + \|\mathcal{L}_n(Q - f)\|_\infty \quad \text{par linéarité de } \mathcal{L}_n \\ &\leq \|f - Q\|_\infty + \Lambda_n \|f - Q\|_\infty \quad \text{par continuité de } \mathcal{L}_n\end{aligned}$$

d'où le résultat.

