

Analyse Numérique I*

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 1ère année / L3 MIM

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2024/11/06

*Compilé le 2024/11/06 à 07:40:09

2024/11/06 1 / 32

Chapitre V

Interpolation

2024/11/06 2 / 32

Plan

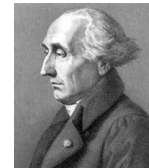
1 Interpolation de Lagrange

- Exercices
- Résultats
- Stabilité

2 Interpolation de Lagrange-Hermite

2024/11/06 3 / 32

Historique



(a) *Joseph-Louis Lagrange* 1736-1813, mathématicien italien puis français



(b) *Pafnouti Lvovitch Tchebychev* 1821-1894, mathématicien russe



(c) *Charles Hermite* 1822-1901, mathématicien français



(d) *Henri-Léon Lebesgue* 1875-1941, mathématicien français

2024/11/06 4 / 32

- 1 Interpolation de Lagrange
 - Exercices
 - Résultats
 - Stabilité
- 2 Interpolation de Lagrange-Hermite

Exercice 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(n + 1)$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux. On note

- Q. 1
- 1 Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i de degré n vérifiant

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket. \tag{1}$$

2 Montrer que les $(L_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n).

On défini le polynôme P_n par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x). \tag{2}$$

- Q. 2
- Montrer que polynôme P_n est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant $P_n(x_i) = y_i$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Definition 1.1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(n + 1)$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange** de $\mathbb{R}_n[X]$, noté P_n , et vérifiant

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P_n(x_i) = y_i \tag{1}$$

est donné par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x), \tag{2}$$

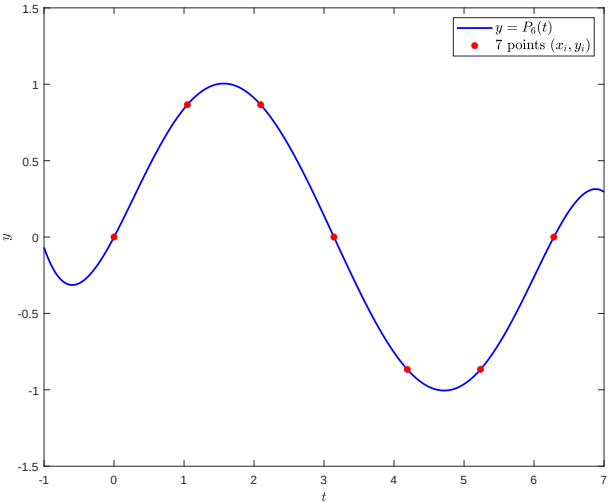
où les L_i de $\mathbb{R}_n[X]$ sont les **polynômes de base de Lagrange** donnés par

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \tag{3}$$

Théorème 1.1

Le **polynôme d'interpolation de Lagrange**, P_n , associé aux $(n + 1)$ couples $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, est l'unique polynôme de degré au plus n , vérifiant

$$P_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \tag{4}$$



Polynôme d'interpolation de Lagrange avec 7 points donnés

Exercice 2

Ecrire la fonction **Lagrange** permettant de calculer $\mathcal{P}_n$ (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $(n+1)$ couples $(x_i, y_i)_{i \in [0, n]}$) en $t \in \mathbb{R}$.

On a

$$\mathcal{P}_n(t) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(t).$$

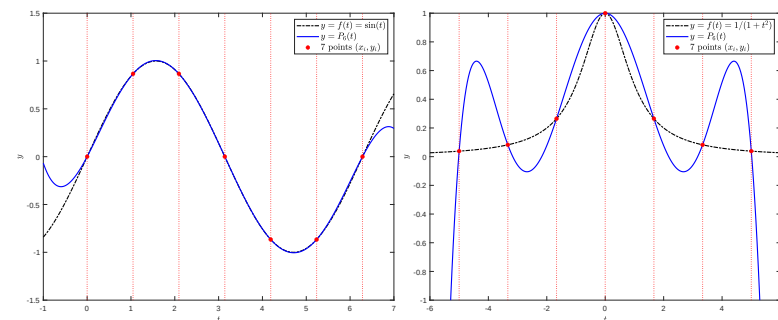
avec

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - x_j}{x_i - x_j}$$

Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [0, n].$$

On cherche à évaluer l'erreur $E_n(t) = f(t) - \mathcal{P}_n(t)$, $\forall t \in [a, b]$.

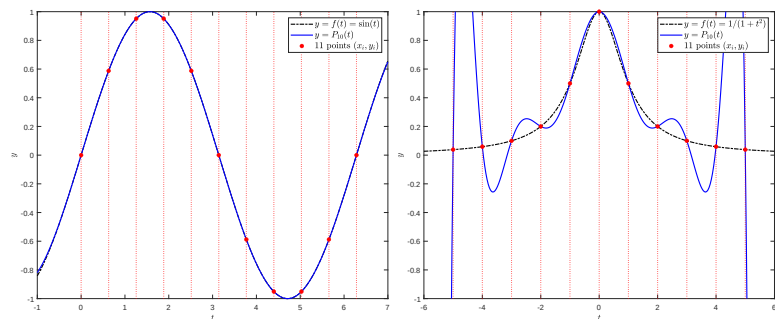


Polynômes d'interpolation de lagrange avec $n = 6$ (7 points) uniformément répartis. A gauche pour la fonction $f : t \rightarrow \sin(t)$ avec $x_0 = 0$, $x_6 = 2\pi$ et à droite pour la fonction $f : t \rightarrow 1/(1+t^2)$ avec $x_0 = -5$, $x_6 = 5$.

Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [0, n].$$

On cherche à évaluer l'erreur $E_n(t) = f(t) - \mathcal{P}_n(t)$, $\forall t \in [a, b]$.

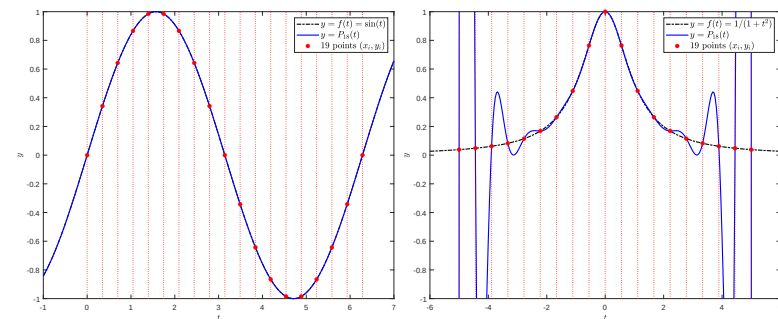


Polynômes d'interpolation de lagrange avec $n = 10$ (11 points) uniformément répartis. A gauche pour la fonction $f : t \rightarrow \sin(t)$ avec $x_0 = 0$, $x_{10} = 2\pi$ et à droite pour la fonction $f : t \rightarrow 1/(1+t^2)$ avec $x_0 = -5$, $x_{10} = 5$.

Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [0, n].$$

On cherche à évaluer l'erreur $E_n(t) = f(t) - \mathcal{P}_n(t)$, $\forall t \in [a, b]$.



Polynômes d'interpolation de lagrange avec $n = 18$ (19 points) uniformément répartis. A gauche pour la fonction $f : t \rightarrow \sin(t)$ avec $x_0 = 0$, $x_{18} = 2\pi$ et à droite pour la fonction $f : t \rightarrow 1/(1+t^2)$ avec $x_0 = -5$, $x_{18} = 5$.

- 1
- Interpolation de Lagrange
 - Exercices
 - Résultats
 - Stabilité
- 2
- Interpolation de Lagrange-Hermite

 Lemme 1.1 : Séparation des zéros d'une fonction

Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $(x_i)_{i=0}^n$ dans I , avec $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, tel que

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad f(x_i) = 0.$$

- 1
- Si $f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$, avec f dérivable sur I , alors, il existe $(\xi_i)_{i=1}^n$ dans I , avec $x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \dots < \xi_n < x_n$, tel que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad f^{(1)}(\xi_i) = 0.$$

- 2
- Si $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I; \mathbb{R})$, avec $f^{(n-1)}$ dérivable alors il existe $\xi \in]x_0, x_n[$ tel que $f^{(n)}(\xi) = 0$.

voir Exercice 3 

Exercice 4

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b]; \mathbb{R})$ et $(n + 1)$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, tels que les $x_i \in [a; b]$ sont distincts deux à deux et $y_i = f(x_i)$.
On note par P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ et π_n le polynôme de degré $(n + 1)$ défini par

$$\pi_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Q. 1 Soit $x \in [a; b]$ tel que, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x \neq x_i$. On note

$$x_{\min} = \min(x, x_0, \dots, x_n), \quad x_{\max} = \max(x, x_0, \dots, x_n),$$

et

$$F(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n(t).$$

- 1
- Démontrer que F est définie sur $[a; b]$ et admet $(n + 2)$ racines distinctes.
- 2
- Montrer qu'il existe $\xi_x \in]x_{\min}; x_{\max}[$ tel que $F^{(n+1)}(\xi_x) = 0$.
- 3
- En déduire que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{\pi_n(x)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \tag{1}$$

Q. 2 Montrer que, $\forall x \in [a; b]$, il existe ξ_x appartenant au plus petit intervalle ouvert contenant $x, x_0, \dots, x_n$ vérifiant (1).

Théorème 1.2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i)_{i=0}^n$, $(n + 1)$ points distincts de l'intervalle $[a, b]$. Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b]; \mathbb{R})$ et P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n passant par $(x_i, f(x_i))$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
Alors,
 $\forall x \in [a, b]$, $\exists \xi_x \in (\min(x_i, x), \max(x_i, x))$,

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n + 1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \tag{6}$$

Comment "minimiser" $f(x) - P_n(x)$?

"jouer" sur le choix des points x_i

Trouver $(\bar{x}_i)_{i=0}^n$, $\bar{x}_i \in [a, b]$, distincts deux à deux, tels que $\forall (x_i)_{i=0}^n$, $x_i \in [a, b]$, distincts 2 à 2

$$\max_{t \in [a,b]} \prod_{i=0}^n |t - \bar{x}_i| \leq \max_{t \in [a,b]} \prod_{i=0}^n |t - x_i|, \tag{7}$$

On a alors le résultat suivant

Théorème 1.3 : *admis*

Les points réalisant (7) sont les points de Tchebychev donnés par

$$\bar{x}_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\right), \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$
 (8)

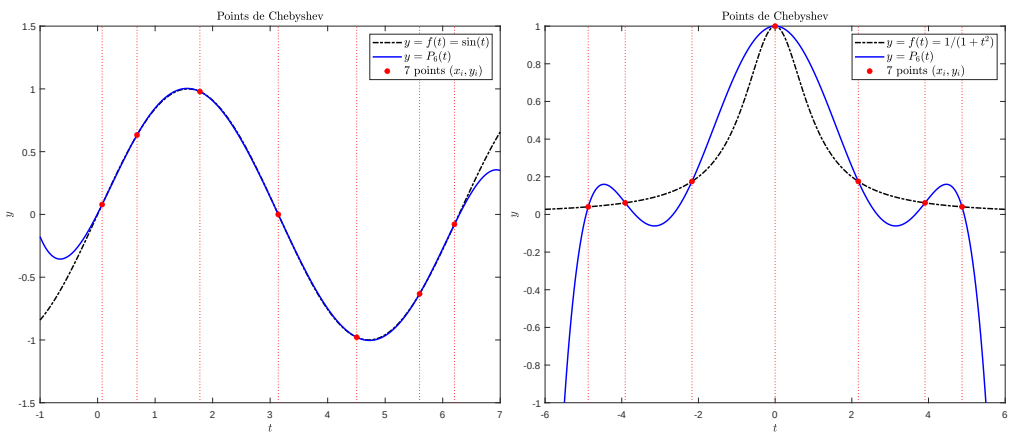


Figure: Erreurs d'interpolation avec $n = 6$

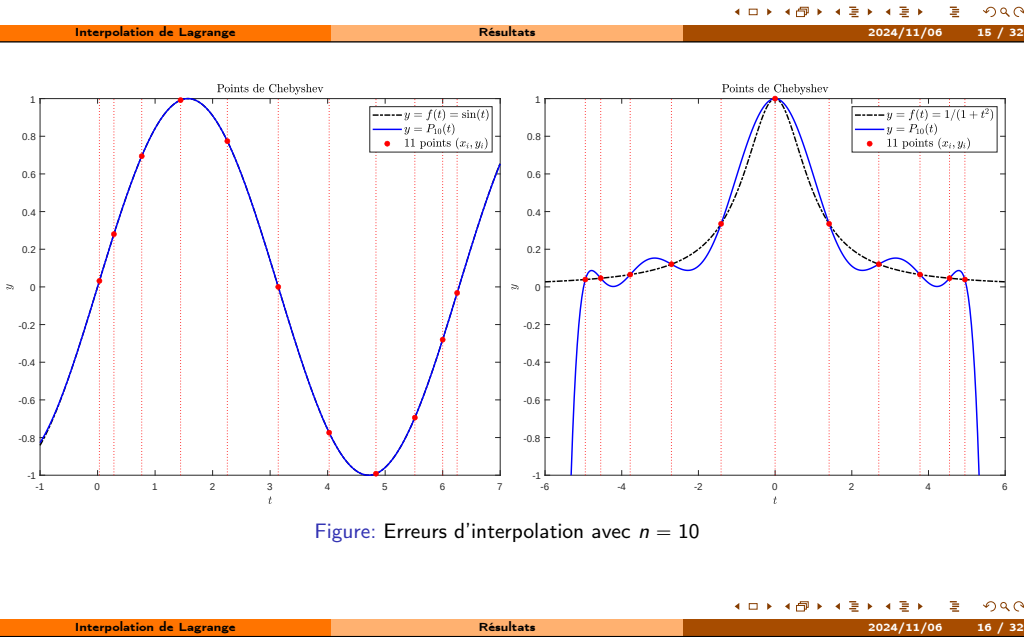


Figure: Erreurs d'interpolation avec $n = 10$

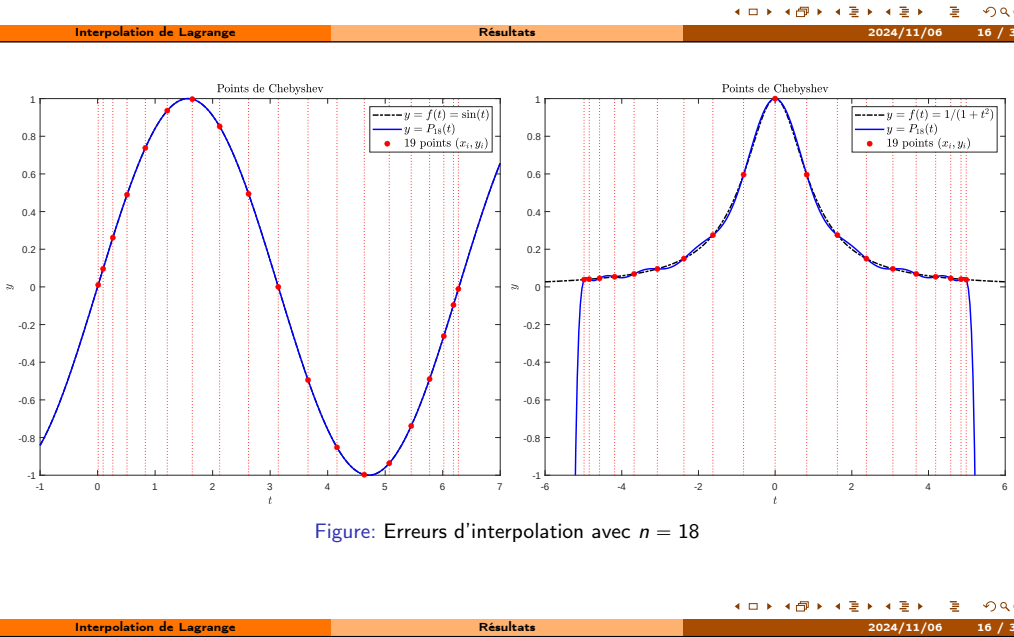


Figure: Erreurs d'interpolation avec $n = 18$

- 1 Interpolation de Lagrange
 - Exercices
 - Résultats
 - Stabilité
- 2 Interpolation de Lagrange-Hermite

On commet des erreurs sur les données

$$f_i \approx f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x) \quad \text{et} \quad \hat{P}_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i L_i(x)$$

$$\begin{aligned} |\hat{P}_n(x) - P_n(x)| &= \left| \sum_{i=0}^n (f_i - f(x_i))L_i(x) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^n |f_i - f(x_i)| |L_i(x)| \\ &\leq \max_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} |f_i - f(x_i)| \sum_{i=0}^n |L_i(x)|. \end{aligned}$$

Constante de Lebesgue : $\Lambda_n = \max_{x \in [a, b]} \sum_{i=0}^n |L_i(x)|.$

$$\|\hat{P}_n - P_n\|_\infty \leq \Lambda_n \max_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} |f_i - f(x_i)|.$$

Théorème 1.4

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \dots, x_n$ des points distincts de $[a, b]$. L'application $\mathcal{L}_n : \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ qui à toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ donne le polynôme d'interpolation de Lagrange P_n associés aux couples de $(x_i, f(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est bien définie et linéaire. On munit $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[X]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On a alors

$$\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leq \Lambda_n \|f\|_\infty, \tag{9}$$

ce qui assure la continuité de $\mathcal{L}_n$,

$$\|\mathcal{L}_n\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}) \\ f \neq 0}} \frac{\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \Lambda_n, \tag{10}$$

et

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}), \quad \|f - \mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \inf_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - Q\|_\infty \tag{11}$$

voir Exercice 5

- Pour les **points équi-distants** $x_i = a + ih, i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $h = (b - a)/n$,

$$\Lambda_n \geq \frac{2^n}{4n^2} \tag{12}$$

et le comportement asymptotique ($n \rightarrow +\infty$)

$$\Lambda_n \sim \frac{2^{n+1}}{e \cdot n \ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \tag{13}$$

- Pour les **points de Tchebychev**,

$$\Lambda_n \leq C \ln(n), \quad \text{avec } C > 0 \tag{14}$$

et le comportement asymptotique

$$\Lambda_n \sim \frac{2}{\pi} \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \tag{15}$$

voir Demailly2006, page 47-48.



Proposition : admis

Pour toute famille de points d'interpolation, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ telle que la suite des polynômes d'interpolation de Lagrange associés ne converge pas uniformément.



Proposition : admis

Soit f une fonction lipschitzienne sur $[a, b]$ à valeurs réelles, i.e. il existe une constante $K \geq 0$ telle que $\forall (x, y) \in [a, b]^2$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \dots, x_n$ les points de Tchebychev $[a, b]$. On note $\mathcal{L}_n(f)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange associés aux couples de $(x_i, f(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$. Alors la suite $(\mathcal{L}_n(f))_{n \geq 1}$ des polynômes d'interpolation converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

voir Demailly2006-im, page 50.

Conclusion

L'interpolation de Lagrange en des points équidistants n'est à utiliser qu'avec un nombre de points assez faible : des phénomènes d'instabilités pouvant apparaître.

Exercice 6 Interpolation de Lagrange-Hermite

Soient $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ $n + 1$ triplets de $\mathbb{R}^3$, où les x_i sont des points distincts deux à deux de l'intervalle $[a, b]$. Le polynôme d'interpolation de **Lagrange-Hermite**, noté H_n , associé aux $n + 1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, est défini par

$$H_n(x_i) = y_i \text{ et } H'_n(x_i) = z_i, \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad (1)$$

Q.1 Quel est a priori le degré de H_n ?

On définit le polynôme P_n par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^n z_i B_i(x) \quad (2)$$

avec, pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, A_i et B_i polynômes de degré au plus $2n + 1$ indépendants des valeurs y_i et z_i .

- Q.2
- Déterminer des conditions suffisantes sur A_i et B_i pour que P_n vérifie (1).
 - En déduire les expressions de A_i et B_i en fonction de L_i et de $L'_i(x_i)$ où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Q.3 Démontrer qu'il existe un unique polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite de degré au plus $2n + 1$ défini par (1).

Definition 2.1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ $(n + 1)$ triplets de $\mathbb{R}^3$, où les x_i sont des points distincts deux à deux de $\mathbb{R}$. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite**, noté H_n , associé aux $(n + 1)$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, est défini par

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^n z_i B_i(x) \quad (16)$$

avec

$$A_i(x) = (1 - 2(x - x_i)L'_i(x_i))L_i^2(x) \text{ et } B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x) \quad (17)$$

où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Théorème 2.1

Le **polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite**, H_n , associé aux $n + 1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, est l'unique polynôme de degré au plus $2n + 1$, vérifiant

$$H_n(x_i) = y_i \text{ et } H'_n(x_i) = z_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad (18)$$

Théorème 2.2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \dots, x_n$, $n + 1$ points distincts de l'intervalle $[a, b]$. Soient $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$ et H_n le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux $n + 1$ triplets $(x_i, f(x_i), f'(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$. On a alors $\forall x \in [a, b]$, $\exists \xi_x \in (\min(x_i, x), \max(x_i, x))$, tels que

$$f(x) - H_n(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2 \quad (19)$$

Exercice 7 Interpolation de Lagrange-Hermite

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$. et $(x_i)_{i=0}^n$, $(n + 1)$ points distincts de $[a, b]$. On note

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad y_i = f(x_i) \text{ et } z_i = f'(x_i).$$

On définit, par H_n , le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux triplets $(x_i, f(x_i), f'(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ et par π_n le polynôme défini par

$$\pi_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^n (t - x_i).$$

Q.1 Soit $x \in [a, b]$ tel que, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x \neq x_i$. On note

$$x_{\min} = \min(x, x_0, \dots, x_n), \quad x_{\max} = \max(x, x_0, \dots, x_n),$$

et

$$F(t) = f(t) - H_n(t) - \frac{f(x) - H_n(x)}{\kappa_n(x)} \kappa_n(t)$$

avec $\kappa_n \stackrel{\text{def}}{=} \pi_n^2$.

① Démontrer que F est définie sur $[a, b]$ et que $F \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$.

② Montrer que F' admet $2(n + 1)$ zéros distincts.

③ Montrer qu'il existe $\xi_x \in]x_{\min}, x_{\max}[$ tel que $F^{(2n+2)}(\xi_x) = 0$.

④ En déduire que

$$f(x) - H_n(x) = \frac{\kappa_n(x)}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi_x). \quad (1)$$

Q.2 Montrer que, $\forall x \in [a, b]$, il existe ξ_x appartenant au plus petit intervalle ouvert contenant $x, x_0, \dots, x_n$ vérifiant (1).

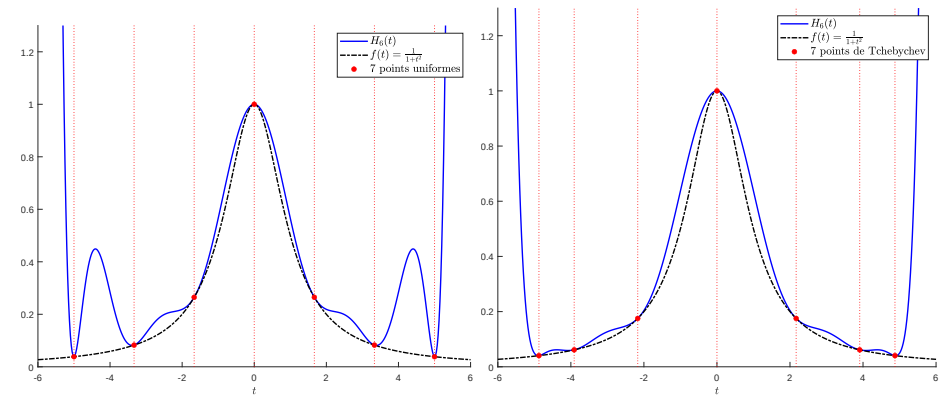


Figure: Polynôme d'interpolation de lagrange-Hermite avec $n = 6$ (7 points) pour la fonction $f : x \mapsto 1/(1 + 25x^2)$. A gauche avec des points uniformément répartis et à droite avec des points de Tchebychev

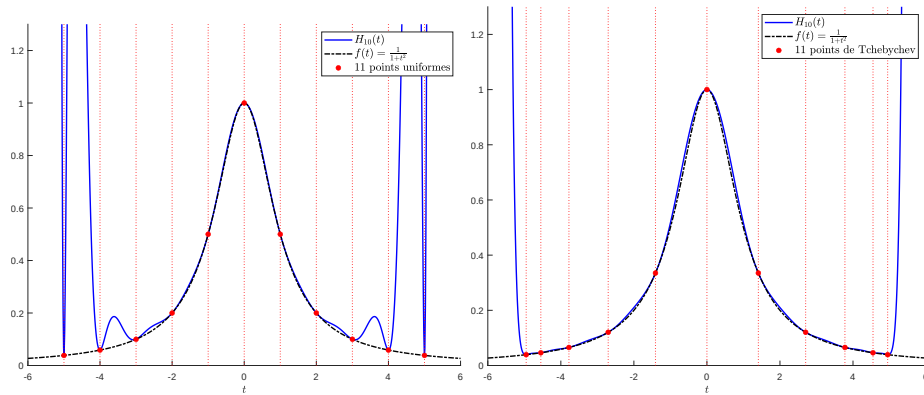


Figure: Polynôme d'interpolation de lagrange-Hermite avec $n = 10$ (11 points) pour la fonction $f : x \rightarrow 1/(1 + x^2)$. A gauche avec des points uniformément répartis et à droite avec des points de Tchebychev

Navigation icons

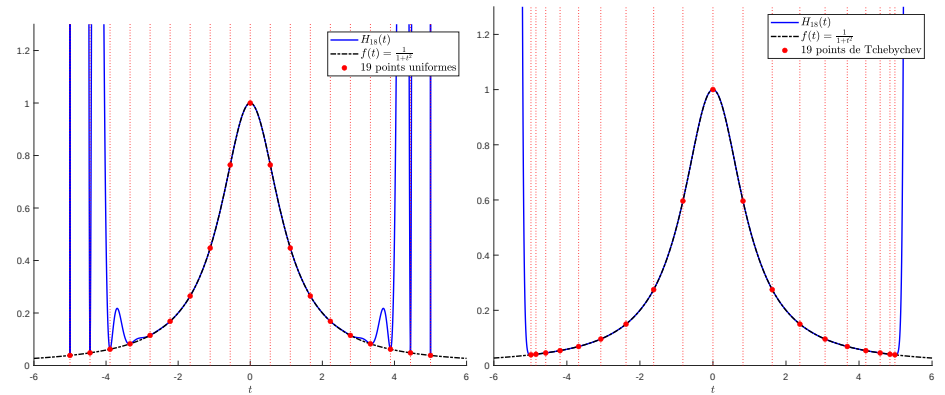


Figure: Polynôme d'interpolation de lagrange-Hermite avec $n = 18$ (19 points) pour la fonction $f : x \rightarrow 1/(1 + x^2)$. A gauche avec des points uniformément répartis et à droite avec des points de Tchebychev

Navigation icons

♥ Définition : (rappel)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i, z_i)_{i \in [0, n]}$ $(n + 1)$ triplets de $\mathbb{R}^3$, où les x_i sont des points distincts deux à deux de $\mathbb{R}$. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite**, noté H_n , associé aux $(n + 1)$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in [0, n]}$, est défini par

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^n z_i B_i(x) \quad (20)$$

avec

$$A_i(x) = (1 - 2(x - x_i)L'_i(x_i))L_i^2(x) \text{ et } B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x) \quad (21)$$

où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Exercice 8 Interpolation de Lagrange-Hermite 📖

Ecrire une fonction algorithmique **Hermite** permettant de calculer H_n (polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux $n + 1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in [0, n]}$) en $t \in \mathbb{R}$.

Navigation icons

Il existe de nombreuses autres façons d'approcher une fonction:

- interpolation affine par morceau,
- interpolation par fonctions splines,
- méthodes des moindres carrés,
- interpolation trigonométrique et FFT,
- ...

Navigation icons