Exercice 4

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible.

Q. 1 *Montrer qu'il existe une matrice $\mathbb{G} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det(\mathbb{G})| = 1$ et $\mathbb{G}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = \alpha\boldsymbol{e}_1$ avec $\alpha \neq 0$ et $\boldsymbol{e}_1$ premier vecteur de la base canonique de C^n.*

R. 1 D'après le Lemme 2.2 de [?], si $A_{1,1} \neq 0$, le résultat est immédiat.
Dans l'énoncé rien ne vient corroborer cette hypothèse. Toutefois, comme la matrice $\mathbb{A}$ est inversible, il existe au moins un $p \in [\![1, n]\!]$ tel que $A_{p,1} \neq 0$. On peut même choisir le premier indice p tel que $|A_{p,1}| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |A_{i,1}| > 0$ (pivot de l'algorithme de Gauss-Jordan). On note $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[1,p]}$ la matrice de permutation des lignes 1 et p (voir Lemme 2.1 de [?]).

$$|\det \mathbb{P}| = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}^{-1} = \mathbb{P}.$$

Par construction $(\mathbb{P}\mathbb{A})_{1,1} = A_{p,1} \neq 0$, et on peut alors appliquer le Lemme 2.2 de [?] à la matrice $(\mathbb{P}\mathbb{A})$ pour obtenir l'existence d'une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\det \mathbb{E} = 1$ et telle que

$$\mathbb{E}(\mathbb{P}\mathbb{A})\boldsymbol{e}_1 = A_{p,1}\boldsymbol{e}_1.$$

En posant $\mathbb{G} = \mathbb{E}\mathbb{P}$ et $\alpha = A_{p,1}$, on obtient bien $\mathbb{G}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = \alpha\boldsymbol{e}_1$. De plus, on a

$$|\det \mathbb{G}| = |\det(\mathbb{E}\mathbb{P})| = |\det \mathbb{E} \times \det \mathbb{P}| = 1.$$

Remarque. *La matrice $\mathbb{G}$ étant inversible, on a*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \mathbb{G}\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \mathbb{G}\boldsymbol{b}$$

ce qui correspond à la première permutation/élimination de l'algorithme de Gauss-Jordan.

Q. 2

a. *Montrer par récurrence sur l'ordre des matrices que pour toute matrice $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, il existe une matrice $\mathbb{S}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det \mathbb{S}_n| = 1$ et $\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n$ avec $\mathbb{U}_n$ matrice triangulaire supérieure inversible.*

b. *Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$. En supposant connue la décompostion précédente $\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n$, expliquer comment résoudre le système $\mathbb{A}_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*

R. 2

a. On veut démontrer, par récurrence sur $n \geqslant 2$, la propriété suivante

$(\mathcal{P}_n)$

$\forall \mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, $\exists \mathbb{S}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $|\det \mathbb{S}_n| = 1$, tel que la matrice $\mathbb{U}_n \stackrel{\mathsf{def}}{=} \mathbb{S}_n\mathbb{A}$ soit une triangulaire supérieure inversible.

Initialisation : Pour $n = 2$. Soit $\mathbb{A}_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ inversible. En utilisant la question précédente il existe $\mathbb{G}_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $|\det \mathbb{G}_2| = 1$ et $\mathbb{G}_2\mathbb{A}_2\boldsymbol{e}_1 = \alpha\boldsymbol{e}_1$ avec $\alpha \neq 0$ et $\boldsymbol{e}_1$ premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^2$. On note $\mathbb{U}_2 = \mathbb{G}_2\mathbb{A}_2$. Cette matrice s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{U}_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \bullet \\ 0 & \bullet \end{pmatrix}$$

et elle est triangulaire supérieure. Les matrices $\mathbb{G}_2$ et $\mathbb{A}_2$ étant inversible, leur produit $\mathbb{U}_2$ l'est aussi. La proposition $(\mathcal{P}_2)$ est donc vérifiée avec $\mathbb{S}_2 = \mathbb{G}_2$.

Hérédité : Soit $n \geqslant 3$. On suppose que $(\mathcal{P}_{n-1})$ est vraie. Montrons que $(\mathcal{P}_n)$ est vérifiée.
Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible. En utilisant la question précédente il existe $\mathbb{G}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det \mathbb{G}_n| = 1$ et $\mathbb{G}_n\mathbb{A}_n\boldsymbol{e}_1 = \alpha_n\boldsymbol{e}_1$ avec $\alpha_n \neq 0$ et $\boldsymbol{e}_1$ premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On note $\mathbb{V}_n = \mathbb{G}_n\mathbb{A}_n$. Cette matrice s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{V}_n = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_n & \bullet & \dots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \dots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \dots & \bullet \end{array}\right) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \left(\begin{array}{c|c} \alpha_n & \boldsymbol{c}_{n-1}^* \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{B}_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right)$$

où $\boldsymbol{c}_{n-1} \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $\mathbb{B}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. Comme $\mathbb{G}_n$ et $\mathbb{A}_n$ sont inversibles, $\mathbb{V}_n$ l'est aussi. On en déduit donc que $\mathbb{B}_{n-1}$ est inversible car $0 \neq \det \mathbb{V}_n = \alpha_n \times \det \mathbb{B}_{n-1}$ et $\alpha_n \neq 0$.

On peut donc utiliser la propriété $(\mathcal{P}_{n-1})$ (hyp. de récurrence) sur la matrice $\mathbb{B}_{n-1}$: il existe donc $\mathbb{S}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$, avec $|\det \mathbb{S}_{n-1}| = 1$, tel que la matrice $\mathbb{U}_{n-1} = \mathbb{S}_{n-1}\mathbb{B}_{n-1}$ soit une triangulaire supérieure inversible.

Soit $\mathbb{Q}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\mathbb{Q}_n = \left(\begin{array}{c:ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{S}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_n\mathbb{G}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{Q}_n\mathbb{V}_n &= \left(\begin{array}{c:ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{S}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c:c} \alpha_n & \boldsymbol{c}_{n-1}^* \\ \hdashline 0 & \\ \vdots & \mathbb{B}_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c:c} \alpha_n & \boldsymbol{c}_{n-1}^* \\ \hdashline 0 & \\ \vdots & \mathbb{S}_{n-1}\mathbb{B}_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} \alpha_n & \boldsymbol{c}_{n-1}^* \\ \hdashline 0 & \\ \vdots & \mathbb{U}_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{U}_n \end{aligned}$$

La matrice $\mathbb{U}_n$ est triangulaire supérieure inversible car $\mathbb{U}_{n-1}$ l'est aussi et $\alpha_n \neq 0$.

On pose $\mathbb{S}_n = \mathbb{Q}_n\mathbb{G}_n$. On a donc

$$\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n.$$

De plus, comme on a $\det \mathbb{S}_n = \det \mathbb{Q}_n \times \det \mathbb{G}_n$, et $\det \mathbb{Q}_n = \det \mathbb{S}_{n-1}$, on obtient, en utilisant $|\det \mathbb{G}_n| = 1$ et l'hypothèse de récurrence $|\det \mathbb{S}_{n-1}| = 1$, que

$$|\det \mathbb{S}_n| = 1.$$

Ceci prouve la véracité de la proposition $(\mathcal{P}_n)$.

b. Comme $\mathbb{S}_n$ est inversible, on a en multipliant à gauche le système par $\mathbb{S}_n$

$$\mathbb{A}_n \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \mathbb{S}_n \mathbb{A}_n \boldsymbol{x} = \mathbb{S}_n \boldsymbol{b} \iff \mathbb{U}_n \boldsymbol{x} = \mathbb{S}_n \boldsymbol{b}$$

Pour déterminer le vecteur $\boldsymbol{x}$, on peut alors résoudre le dernier système par l'algorithme de remontée.

Q. 3 *Que peut-on dire si $\mathbb{A}$ est non inversible?*

R. 3 Si $\mathbb{A}$ est non inversible, alors dans la première question nous ne sommes pas assurés d'avoir $\alpha \neq 0$. Cependant l'existence de la matrice $\mathbb{G}$ reste avérée.
Pour la deuxième question, le seul changement vient du fait que la matrice $\mathbb{U}_n$ n'est plus inversible.