

### Exercice 5 : Vers la factorisation LU

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice dont les sous-matrices principales d'ordre  $i$ , notées  $\Delta_i$ ,  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .  
Montrer par récurrence sur l'ordre  $n$  de la matrice  $A$  qu'il existe une matrice  $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , triangulaire inférieure à diagonale unité telle que la matrice  $U$  définie par

$$U = EA$$

soit triangulaire supérieure avec  $U_{i,i} = \det \Delta_i / (U_{1,1} \times \cdots \times U_{i-1,i-1})$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

**Correction** Soit  $n \geq 2$ , on va démontrer par récurrence sur  $n$  la proposition suivante

$(P_n)$

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Si, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , les sous-matrices principales d'ordre  $i$  de  $A$ , notées  $\Delta_i$ , sont inversibles, alors il existe une matrice  $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , triangulaire inférieure à diagonale unité telle que la matrice  $U = EA$  soit triangulaire supérieure avec  $U_{i,i} = \det \Delta_i / (U_{1,1} \times \cdots \times U_{i-1,i-1})$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

**Initialisation:**  $n = 2$  Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Si  $\Delta_1 = A_{1,1} \neq 0$  et  $\Delta_2 = A$  inversible. On va construire une matrice  $E \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , triangulaire inférieure à diagonale unité telle que  $U = EA$  soit triangulaire supérieure.

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ E_{2,1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} \\ 0 & U_{2,2} \end{pmatrix} = U$$

On a donc  $U_{2,1} = 0 = E_{2,1}A_{1,1} + A_{2,1}$ . Comme par hypothèse,  $A_{1,1} \neq 0$ , on a  $E_{2,1} = -A_{2,1}/A_{1,1}$ , ce qui donne

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{A_{2,1}}{A_{1,1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} - \frac{A_{2,1}}{A_{1,1}}A_{1,2} \end{pmatrix} = U.$$

On a alors

$$\begin{aligned} U_{1,1} &= A_{1,1} = \det(\Delta_1), \\ U_{2,2} &= A_{2,2} - \frac{A_{2,1}}{A_{1,1}}A_{1,2} = \frac{A_{2,2}A_{1,1} - A_{2,1}A_{1,2}}{A_{1,1}} = \frac{\det A}{U_{1,1}} = \frac{\det \Delta_2}{U_{1,1}}. \end{aligned}$$

**Hérédité:** Soit  $n \geq 3$ , on suppose que  $(\mathcal{P}_{n-1})$  est vérifiée. Soit  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . dont toutes les sous-matrices principales d'ordre  $i$  de  $\mathbb{A}$ , notées  $\Delta_i$ ,  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  sont inversibles. On décompose la matrice  $\mathbb{A}$  sous la forme bloc

$$\mathbb{A} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{n-1} & \mathbf{g} \\ \hline \mathbf{f}^* & A_{n,n} \end{array} \right)$$

avec  $\mathbb{A}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ ,  $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^{n-1}$  et  $\mathbf{g} \in \mathbb{C}^{n-1}$ . Comme les  $n-1$  premières sous-matrices principales de  $\mathbb{A}$  sont les  $n-1$  sous-matrices principales de  $\mathbb{A}_{n-1}$ , ces dernières sont, par hypothèse, inversibles. Par hypothèse de récurrence sur  $\mathbb{A}_{n-1}$ , il existe une matrice  $\mathbb{E}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ , triangulaire inférieure à diagonale unité telle que la matrice  $\mathbb{U}_{n-1} = \mathbb{E}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1}$  soit triangulaire supérieure.

On va construire (si possible) une matrice  $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , triangulaire inférieure à diagonale unité telle que  $\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$  soit triangulaire supérieure. La matrice  $\mathbb{E}$  s'écrit sous forme bloc

$$\mathbb{E} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{h}^* & 1 \end{array} \right)$$

avec  $\mathbb{X}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$  triangulaire inférieure à diagonale unité et  $\mathbf{h} \in \mathbb{C}^{n-1}$ .

On a alors

$$\mathbb{E}\mathbb{A} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{h}^* & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{n-1} & \mathbf{g} \\ \hline \mathbf{f}^* & A_{n,n} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1} & \mathbb{X}_{n-1}\mathbf{g} \\ \hline \mathbf{h}^*\mathbb{A}_{n-1} + \mathbf{f}^* & \mathbf{h}^*\mathbf{g} + A_{n,n} \end{array} \right)$$

Pour que la matrice  $\mathbb{E}\mathbb{A}$  soit triangulaire supérieure, il faut que  $\mathbb{X}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1}$  soit triangulaire supérieure et  $\mathbf{h}^*\mathbb{A}_{n-1} + \mathbf{f}^* = 0$ . En choisissant  $\mathbb{X}_{n-1} = \mathbb{E}_{n-1}$ , on a  $\mathbb{U}_{n-1} = \mathbb{X}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1}$  triangulaire supérieure. La matrice  $\mathbb{A}_{n-1}$  étant inversible, on a  $\mathbf{h}^* = -\mathbf{f}^*\mathbb{A}_{n-1}^{-1}$

On obtient donc

$$\mathbb{E}\mathbb{A} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{E}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{h}^* & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{n-1} & \mathbf{g} \\ \hline \mathbf{f}^* & A_{n,n} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{U}_{n-1} & \mathbb{E}_{n-1}\mathbf{g} \\ \hline 0 & A_{n,n} - \mathbf{h}^*\mathbf{g} \end{array} \right) = \mathbb{U}.$$

On a donc construit une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité,  $\mathbb{E}$ , telle que  $\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$  soit triangulaire supérieure. Par construction, on a

$$U_{i,j} = (\mathbb{U}_{n-1})_{i,j}, \quad \forall (i,j) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket^2$$

et donc, par hypothèse de récurrence sur  $\mathbb{U}_{n-1}$ , on obtient

$$U_{i,i} = \det \Delta_i / (U_{1,1} \times \cdots \times U_{i-1,i-1}), \quad \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket.$$

De plus on a,

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{E}\mathbb{A}) &= \det(\mathbb{E}) \det(\mathbb{A}) \\ &= \det(\mathbb{A}) && \text{car } \mathbb{E} \text{ tri. inf. à diag. unité} \\ &= \det(\Delta_n). && \text{car } \Delta_n = \mathbb{A}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{U}) &= \prod_{k=1}^n U_{k,k} && \text{car } \mathbb{U} \text{ tri. sup.} \\ &= U_{n,n} \prod_{k=1}^{n-1} U_{k,k} \end{aligned}$$

Comme  $\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$ , on en déduit que la matrice  $\mathbb{U}$  est inversible (car  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{A}$  le sont), que ses coefficients sont non nuls et, en prenant le déterminant:

$$\det(\Delta_n) = U_{n,n} \prod_{k=1}^{n-1} U_{k,k}$$

et donc

$$U_{n,n} = \frac{\det(\Delta_n)}{\prod_{k=1}^{n-1} U_{k,k}}.$$

La proposition  $(\mathcal{P}_n)$  est donc vraie.

**Conclusion:** On a démontré par récurrence que la proposition  $(\mathcal{P}_n)$  est vraie pour tout  $n \geq 2$ .

◇

