

Exercice 2 : Matrice de permutation

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i \neq j$, on note $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identité dont on a permuté les lignes i et j .

Q. 1

Représenter cette matrice et la définir proprement.

R. 1


On note, dans toute la correction, $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

On peut définir cette matrice par ligne,

$$\begin{cases} \forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}, & P_{r,s} = \delta_{r,s}, & \forall s \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\ & P_{i,s} = \delta_{j,s}, & \forall s \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\ & P_{j,s} = \delta_{i,s}, & \forall s \in \llbracket 1, n \rrbracket. \end{cases}$$

ou par colonne

$$\begin{cases} \forall s \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}, & P_{r,s} = \delta_{r,s}, & \forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\ & P_{r,i} = \delta_{r,j}, & \forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\ & P_{r,j} = \delta_{r,i}, & \forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket. \end{cases}$$

 Ne pas utiliser les indices i et j qui sont déjà fixés dans la définition de la matrice $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

On peut noter que la matrice \mathbb{P} est symétrique. Pour la représentation, on suppose $i < j$. On effectue une représentation bloc 5×5 avec des blocs diagonaux carrés sachant que tous les blocs non décrits sont nuls:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \xleftrightarrow{i-1} & i & \xleftrightarrow{j-i-1} & j & \xleftrightarrow{n-j} \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & 0 & \text{ } & 1 & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & 1 & \text{ } & 0 & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} \updownarrow i-1 \\ \updownarrow i \\ \updownarrow j-i-1 \\ \updownarrow j \\ \updownarrow n-j \end{matrix}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathbf{A}_{r,:}$ le r -ème vecteur ligne de \mathbb{A} et $\mathbf{A}_{:,s}$ le s -ème vecteur colonne de \mathbb{A} .

Q. 2

- a. Déterminer les lignes de la matrice $\mathbb{D} = \mathbb{P}_n^{[i,j]} \mathbb{A}$ en fonction des vecteurs lignes de \mathbb{A} .
- b. Déterminer les colonnes de la matrice $\mathbb{E} = \mathbb{A} \mathbb{P}_n^{[i,j]}$ en fonction des vecteurs colonnes de \mathbb{A} .

R. 2

- a. On note $\mathbb{D} = \mathbb{P} \mathbb{A}$. Par définition du produit matriciel on a

$$D_{r,s} = \sum_{k=1}^n P_{r,k} A_{k,s}.$$

On obtient, $\forall s \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{cases} D_{r,s} = \sum_{k=1}^n \delta_{r,k} A_{k,s} = A_{r,s}, & \forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}, \\ D_{i,s} = \sum_{k=1}^n \delta_{j,k} A_{k,s} = A_{j,s}, \\ D_{j,s} = \sum_{k=1}^n \delta_{i,k} A_{k,s} = A_{i,s}. \end{cases}$$

ce qui donne


$$\begin{cases} \mathbf{D}_{r,:} = \mathbf{A}_{r,:}, & \forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}, \\ \mathbf{D}_{i,:} = \mathbf{A}_{j,:}, \\ \mathbf{D}_{j,:} = \mathbf{A}_{i,:}. \end{cases}$$

Note: La notation $\mathbf{D}_{i,:}$ correspond au vecteur ligne $(D_{i,1}, \dots, D_{i,n})$ et $\mathbf{D}_{:,j}$ correspond au vecteur colonne

$$\begin{pmatrix} D_{1,j} \\ \vdots \\ D_{n,j} \end{pmatrix}$$

b. On note $\mathbb{E} = \mathbb{A}\mathbb{P}$. Par définition du produit matriciel et par symétrie de \mathbb{P} on a

$$E_{r,s} = \sum_{k=1}^n A_{r,k} P_{k,s} = \sum_{k=1}^n A_{r,k} P_{s,k}.$$

 Ne pas utiliser les indices i et j qui sont déjà fixés dans la définition de la matrice $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

On obtient en raisonnant par colonne, $\forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{r,s} = \sum_{k=1}^n A_{r,k} \delta_{s,k} = A_{r,s}, \quad \forall s \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}, \\ E_{r,i} = \sum_{k=1}^n A_{r,k} \delta_{j,k} = A_{r,j}, \\ E_{r,j} = \sum_{k=1}^n A_{r,k} \delta_{i,k} = A_{r,i}. \end{array} \right.$$

ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_{:,s} = \mathbf{A}_{:,s}, \quad \forall s \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}, \\ \mathbf{E}_{:,i} = \mathbf{A}_{:,j}, \\ \mathbf{E}_{:,j} = \mathbf{A}_{:,i}. \end{array} \right.$$

Q. 3

a. Calculer le déterminant de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

b. Déterminer l'inverse de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

R. 3

a. $\det(\mathbb{P}) = -1$, si $i \neq j$ et $\det(\mathbb{P}) = 1$ sinon.

b. Immédiat par calcul direct on a $\mathbb{P}\mathbb{P} = \mathbb{I}$ et donc la matrice \mathbb{P} est inversible et $\mathbb{P}^{-1} = \mathbb{P}$.

