

Exercice 6

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1

Montrer que s'il existe $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et, $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$ alors \mathbb{A} est hermitienne définie positive.

R. 1

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$ avec $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et, $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs.

La matrice \mathbb{A} est alors hermitienne car

$$\mathbb{A}^* = (\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*)^* = (\mathbb{L}^*)^* \mathbb{D}^* \mathbb{L}^* = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*.$$

De plus $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ on a

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{D}\mathbb{L}^*\mathbf{x}, \mathbb{L}^*\mathbf{x} \rangle$$

On pose $\mathbf{y} = \mathbb{L}^*\mathbf{x} \neq 0$ car $\mathbf{x} \neq 0$ et \mathbb{L}^* inversible. On obtient alors

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{D}\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n D_{i,i} |y_i|^2 > 0$$

car \mathbb{D} diagonale, $D_{i,i} > 0$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\mathbf{y} \neq 0$.

La matrice hermitienne \mathbb{A} est donc bien définie positive.

Q. 2

Montrer que si \mathbb{A} est hermitienne définie positive alors il existe $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et, $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$.

R. 2

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive.

D'après le Corollaire 2.6 de [?], la matrice \mathbb{A} admet une unique factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$.

D'après le Théorème 2.8, la matrice hermitienne \mathbb{A} peut alors s'écrire sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$ où \mathbb{D} est diagonale à coefficients réels et \mathbb{L} triangulaire inférieure à diagonale unité.

Il reste à démontrer que $D_{i,i} > 0$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Comme \mathbb{A} est définie positive, on a $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $\langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$. Or on a

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{D}\mathbb{L}^*\mathbf{x}, \mathbb{L}^*\mathbf{x} \rangle$$

On note $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, la base canonique de \mathbb{C}^n et on rappelle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\langle \mathbb{D}\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = D_{i,i}$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En choisissant $\mathbf{x} = (\mathbb{L}^*)^{-1}\mathbf{e}_i \neq 0$, on obtient alors

$$\langle \mathbb{D}\mathbb{L}^*\mathbf{x}, \mathbb{L}^*\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{D}\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = D_{i,i} > 0.$$

