Exercice 10

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$.

Q. 1

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2$ et $\arg(\alpha) = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle) + \delta\pi$ avec $\delta \in [\![0, 1]\!]$.

a. *On suppose que $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, (i.e. $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ colinéaires). Exprimer $\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}$ en fonction de λ et $\boldsymbol{b}$.*

b. *Que peut-on dire si $\boldsymbol{a}$ est nul?*

R. 1

a. On a

$$\|\boldsymbol{a}\|_2 = |\lambda| \, \|\boldsymbol{b}\|_2 = |\lambda|$$

et

$$\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle = \langle \boldsymbol{b}, \lambda\boldsymbol{b}\rangle = \lambda \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}\rangle = \lambda.$$

On rappelle que $\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle = \overline{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle}$ et, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\arg(z) = -\arg(\overline{z})$. On a alors

$$\begin{aligned} \arg(\alpha) &= -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle) + \delta\pi \\ &= \arg(\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle) + \delta\pi \\ &= \arg(\lambda) + \delta\pi. \end{aligned}$$

On a alors

- avec $\delta = 0$,

$$\alpha = |\alpha| e^{\imath \arg(\alpha)} = |\lambda| e^{\imath \arg(\lambda)} = \lambda$$

  ce qui donne

$$\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0},$$

- avec $\delta = 1$,

$$\alpha = |\alpha| e^{\imath \arg(\alpha)} = |\lambda| e^{\imath (\arg(\lambda) + \pi)} = -\lambda$$

$$\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b} = 2\lambda\boldsymbol{b}.$$

b. Si $\boldsymbol{a}$ est nul, on a $\alpha = 0$ et $\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

Q. 2 *Ecrire la fonction algorithmique* MatHouseholder *de paramètres* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *et* $\delta \in [\![0, 1]\!]$ *retournant une matrice* $\mathbb{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *unitaire et* $\alpha \in \mathbb{C}$ *telles que*

- *si* $\boldsymbol{a} - \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle \boldsymbol{b} = 0$ *(i.e.* $\boldsymbol{a}$ *nul ou colinéaire à* $\boldsymbol{b}$*) alors* $\mathbb{S}$ *est la matrice identitée et* $\alpha = 0$,
- *sinon* α *est le nombre complexe défini en* ***Q. 1*** *(dépendant de* δ*) et* $\mathbb{S}$ *est la matrice élémentaire de Householder*

$$\mathbb{S} = \mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}\|_2}\right)$$

  telle que $\mathbb{S}\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$.

Des fonctions comme dot$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *(produit scalaire de deux vecteurs),* norm$(\boldsymbol{a})$ *(norme 2 d'un vecteur),* arg(z) *(argument d'un nombre complexe),* eye(n) *(matrice identitée de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*),* matprod$(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ *(produit de deux matrices),* ctranspose$(\mathbb{A})$ *(adjoint d'une matrice), ... pourront être utilisées*

R. 2

Algorithme 1 fonction $[\mathbb{S}, \alpha] \leftarrow$ MatHouseholder$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \delta)$.

Retourne une matrice $\mathbb{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire et $\alpha \in \mathbb{C}$ telles que

- si $\boldsymbol{a} - \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle \boldsymbol{b} = 0$ (i.e. $\boldsymbol{a}$ nul ou colinéaire à $\boldsymbol{b}$) alors $\mathbb{S}$ est la matrice identitée et $\alpha = 0$,
- sinon α est le nombre complexe défini par

$$|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2 \quad \text{et} \quad \arg(\alpha) = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle) + \delta\pi,$$

  et, $\mathbb{S}$ est la matrice élémentaire de Householder

$$\mathbb{S} = \mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}\|_2}\right)$$

  telle que $\mathbb{S}\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$.

Données : $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$: deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$ non nuls et non colinéaires.
δ : 0 ou 1, permet de déterminer α.

Résultat : $\mathbb{S}$: matrice de Householder ou indentité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
α : nombre complexe , de module $\|\boldsymbol{a}\|_2$ et d'argument $-\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle) + \delta\pi$.

Fonction $[\mathbb{S}, \alpha] \leftarrow$ MatHouseholder($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \delta$)
  ba $\leftarrow$ dot$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ $\quad\triangleright$ dot$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$: $\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{a}$
  Si norm$(\boldsymbol{a} -$ ba $* \boldsymbol{b}) < 1e - 15$ **alors**
    $\mathbb{S} \leftarrow$ eye(n), $\alpha \leftarrow 0$
  Sinon
    $\alpha \leftarrow$ norm$(\boldsymbol{a}) * exp(i * (\delta * \pi +$ arg(ba)))
    $\boldsymbol{u} \leftarrow \boldsymbol{a} - \alpha * \boldsymbol{b}$
    $\boldsymbol{u} \leftarrow \boldsymbol{u}$/norm$(\boldsymbol{u})$
    $\mathbb{S} \leftarrow$ eye$(n) - 2 *$ matprod$(\boldsymbol{u}$, ctranspose$(\boldsymbol{u}))$
  Fin Si
Fin Fonction

Q. 3

Proposer un programme permettant de tester cette fonction. On pourra utiliser la fonction vecrand(n) *retournant un vecteur aléatoire de* $\mathbb{C}^n$, *les parties réelles et imaginaires de chacune de ses composantes étant dans* $]0,1[$ *(loi uniforme).*

R. 3

$n \leftarrow 100$
$\boldsymbol{a} \leftarrow \mathrm{vecrand}(n)$
$\boldsymbol{b} \leftarrow \mathrm{vecrand}(n)$
$\boldsymbol{b} \leftarrow \boldsymbol{b}/\mathrm{norm}(\boldsymbol{b}, 2)$
$[\mathbb{H}, \alpha] \leftarrow \mathrm{MatHouseholder}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, 0)$
$\mathrm{error} \leftarrow \mathrm{norm}(\mathbb{H} * \boldsymbol{a} - \alpha * \boldsymbol{b}, 2)$

Q. 4

Proposer un programme permettant de vérifier que $\delta = 1$ *est le "meilleur" choix.*

R. 4

Ici, l'objectif est d'illustrer le fait qu'avec $\boldsymbol{a}$ *presque* colinéaire à $\boldsymbol{b}$, on a (voir **Q. 1**)

- si $\delta = 1$, alors $\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b} \approx 2\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle \boldsymbol{b}$
- si $\delta = 0$, alors $\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b} \approx \boldsymbol{0}$ et ceci est source d'ennuis numériques (précision machine) lors du calcul du vecteur

$$\frac{\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}\|_2}.$$

$n \leftarrow 100$
$\boldsymbol{b} \leftarrow \mathrm{vecrand}(n)$
$\boldsymbol{b} \leftarrow \boldsymbol{b}/\mathrm{norm}(\boldsymbol{b}, 2)$
$\boldsymbol{a} \leftarrow \boldsymbol{a} + \mathrm{tol} * \mathrm{vecrand}(n)$
$[\mathbb{H}_1, \alpha_1] \leftarrow \mathrm{MatHouseholder}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, 1)$
$[\mathbb{H}_0, \alpha_0] \leftarrow \mathrm{MatHouseholder}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, 0)$

$\text{error0} \leftarrow \text{norm}(\mathbb{H}_0 * \boldsymbol{a} - \alpha_0 * \boldsymbol{b}, 2)/(1 + \text{abs}(\alpha_0))$
$\text{error1} \leftarrow \text{norm}(\mathbb{H}_1 * \boldsymbol{a} - \alpha_1 * \boldsymbol{b}, 2)/(1 + \text{abs}(\alpha_1))$

Dans la figure qui suit, on représente en échelle logarithmique, et, en fonction de l'ordre des matrices, l'erreur obtenue avec $\delta = 1$, $\delta = 0$ et tol $= 1e - 12$ lors de l'utilisation de la fonction MatHouseholder avec un vecteur $\boldsymbol{a}$ *presque* colinéaire à $\boldsymbol{b}$. En Figure 2, la représentation est faite avec tol $= 1e - 6$.

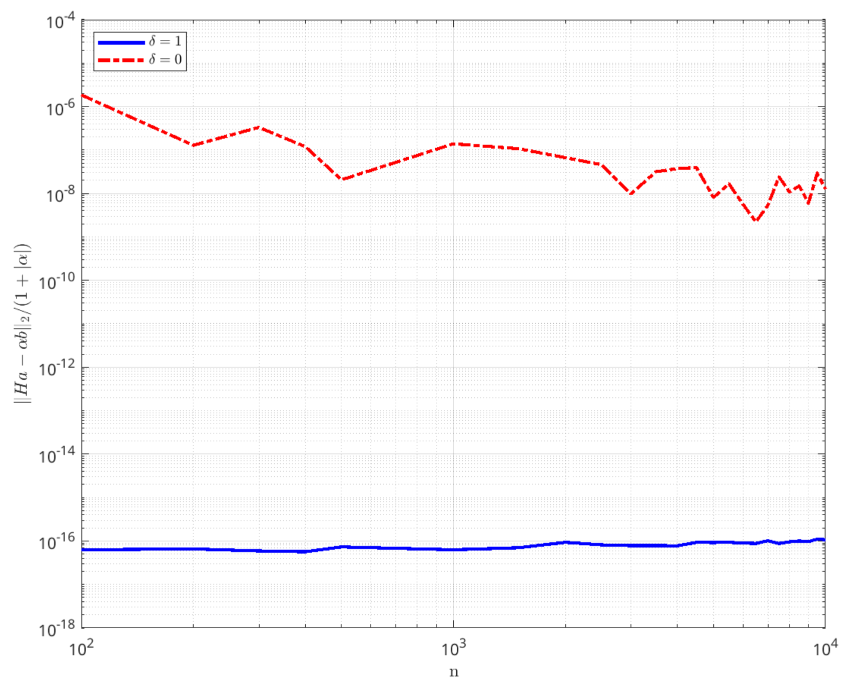

Figure 1: Choix de α dans MatHouseholder : erreur relative en norme L_2 avec tol $= 1e - 12$

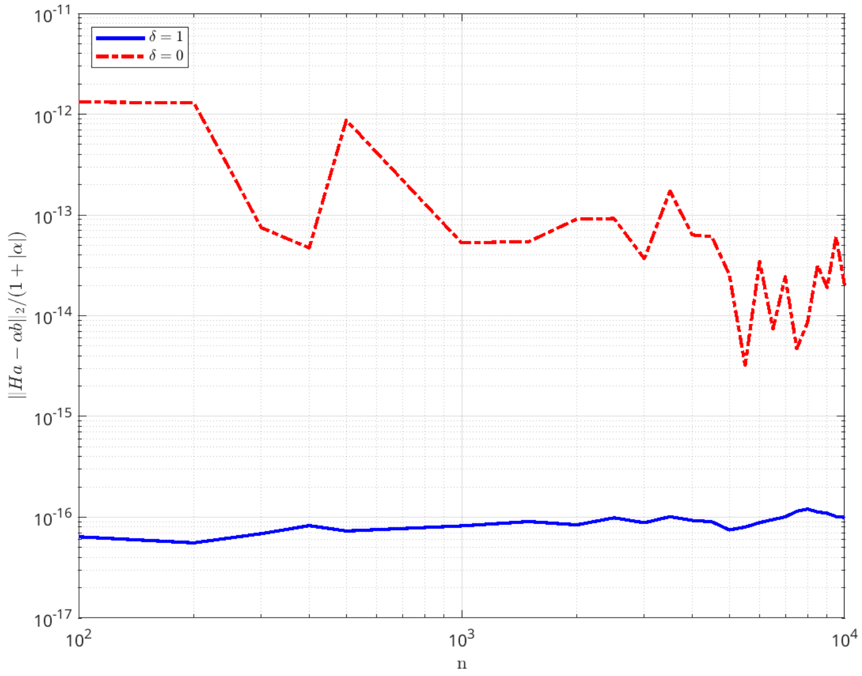

Figure 2: Choix de α dans MatHouseholder : erreur relative en norme L_2 avec tol $= 1e-6$