

Exercice 7

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1

Montrer que si \mathbb{A} admet une factorisation régulière de Cholesky alors \mathbb{A} est hermitienne définie positive.

R. 1

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation régulière de Cholesky $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$ avec \mathbb{B} est une matrice triangulaire inférieure inversible.

La matrice \mathbb{A} est hermitienne car

$$\mathbb{A}^* = (\mathbb{B}\mathbb{B}^*)^* = (\mathbb{B}^*)^*\mathbb{B}^* = \mathbb{B}\mathbb{B}^* = \mathbb{A}.$$

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, on a

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{B}\mathbb{B}^*\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{B}^*\mathbf{x}, \mathbb{B}^*\mathbf{x} \rangle = \|\mathbb{B}^*\mathbf{x}\|^2 > 0$$

car $\mathbb{B}^*\mathbf{x} \neq 0$ (\mathbb{B}^* inversible et $\mathbf{x} \neq 0$). Donc la matrice \mathbb{A} est bien hermitienne définie positive.

Q. 2

Montrer que si \mathbb{A} est hermitienne définie positive alors elle admet une factorisation régulière de Cholesky.

R. 2

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive.

D'après le Corollaire 2.9, il existe alors une matrice $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité et une matrice $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficient strictement positifs telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*.$$

On note $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale inversible vérifiant $\mathbb{H}^2 = \mathbb{D}$ (i.e. $H_{i,i} = \pm\sqrt{D_{i,i}} \neq 0, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$). On a alors

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{H}\mathbb{H}\mathbb{L}^* = (\mathbb{L}\mathbb{H})(\mathbb{L}\mathbb{H})^*$$

En posant $\mathbb{B} = \mathbb{L}\mathbb{H}$, la matrice \mathbb{B} est bien triangulaire inférieure inversible car produit d'une matrice triangulaire inférieure inversible par une matrice diagonale inversible et on a $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$.

Q. 3

On suppose que \mathbb{A} est hermitienne définie positive.

- a. Montrer que \mathbb{A} admet une factorisation positive de Cholesky.
- b. Montrer que cette factorisation est unique.

R. 3

- a. En choisissant, dans la question précédente,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad H_{i,i} = \sqrt{D_{i,i}} > 0,$$

la matrice $\mathbb{B} = \mathbb{L}\mathbb{H}$ triangulaire inférieure a alors pour éléments diagonaux

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad B_{i,i} = H_{i,i} > 0.$$

- b. Montrons qu'une factorisation positive de Cholesky est unique.
Soient \mathbb{B}_1 et \mathbb{B}_2 deux factorisations positives de la matrice \mathbb{A} , on a donc

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}_1 \mathbb{B}_1^* = \mathbb{B}_2 \mathbb{B}_2^*.$$

En multipliant à gauche par \mathbb{B}_2^{-1} et à droite par $(\mathbb{B}_1^*)^{-1}$ cette équation on obtient

$$\mathbb{B}_2^{-1} \mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2^* (\mathbb{B}_1^*)^{-1} = \mathbb{B}_2^* (\mathbb{B}_1^{-1})^* = (\mathbb{B}_1^{-1} \mathbb{B}_2)^*$$

En notant $\mathbb{G} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{B}_2^{-1} \mathbb{B}_1$, on tire de l'équation précédente

$$\mathbb{G} = (\mathbb{G}^{-1})^*. \tag{R7.1}$$

Or, on a

- (voir Proposition 2.35, page 12): l'inverse d'une matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux réels strictement positifs est aussi une matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux réels strictement positifs.

- (voir Proposition 2.34, page 11): le produit de matrices triangulaires inférieures à coefficients diagonaux réels strictement positifs reste triangulaire inférieure à coefficients diagonaux réels strictement positifs.

On en déduit que les matrices $\mathbb{G} = \mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1$ et $\mathbb{G}^{-1} = \mathbb{B}_1^{-1}\mathbb{B}_2$ sont triangulaires inférieures à coefficients diagonaux réels strictement positifs.

De plus l'équation (R7.1) identifie la matrice triangulaire inférieure \mathbb{G} à la matrice triangulaire supérieure $(\mathbb{G}^{-1})^*$: ce sont donc des matrices diagonales à coefficients diagonaux réels strictement positifs et on en déduit

$$(\mathbb{G}^{-1})^* = \mathbb{G}^{-1}$$

et

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (\mathbb{G}^{-1})_{i,i} = \frac{1}{\mathbb{G}_{i,i}} > 0.$$

De l'équation (R7.1), on obtient alors $\mathbb{G} = \mathbb{G}^{-1}$ et donc

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{G}_{i,i} = \frac{1}{\mathbb{G}_{i,i}} > 0.$$

On en déduit alors que $\mathbb{G} = \mathbb{I}$ et donc

$$\mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1 = \mathbb{I}$$

c'est à dire \mathbb{B}_2^{-1} est l'inverse de \mathbb{B}_1 qui est unique, donc $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2$.

