Analyse Numérique I*

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 1ère année / L3 MIM

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2024/10/24

*Compilé le 2024/10/24 à 10:54:17

Chapitre IV

Résolution de systèmes linéaires

Plan

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$.

Résoudre

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Le calcul de la matrice inverse $\mathbb{A}^{-1}$ revient à résoudre n systèmes linéaires.

⚠ Pour résoudre un système linéaire, on ne calcule pas la matrice inverse associée.

- **Méthodes directes :** On cherche $\mathbb{M}$ inversible tel que $\mathbb{M}\mathbb{A}$ *facilement* inversible

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \mathbb{M}\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \mathbb{M}\boldsymbol{b}.$$

- **Méthodes itératives :** On cherche $\mathbb{B}$ et $\boldsymbol{c}$,

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{c}, \quad k \geqslant 0, \ \boldsymbol{x}^{[0]} \text{ donné}$$

en espérant $\lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{x}^{[k]} = \boldsymbol{x}$.

Conditionnement

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$.

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

De petites erreurs sur les données engendrent-elles de petites erreurs sur la solution?

Soient

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad \Delta\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{25} & \frac{1}{25} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{50} & -\frac{11}{100} & 0 \\ -\frac{1}{100} & -\frac{1}{100} & 0 & -\frac{1}{50} \end{pmatrix}$$

et $\boldsymbol{b}^t = (32, 23, 33, 31)$, $(\boldsymbol{\Delta b})^t = \left(\frac{1}{100}, -\frac{1}{100}, \frac{1}{100}, -\frac{1}{100}\right)$. Des calculs exacts donnent

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad &\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{x}^t = (1, 1, 1, 1) \\
\mathbb{A}\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{\Delta b}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{u}^t = \left(\frac{91}{50}, -\frac{9}{25}, \frac{27}{20}, \frac{79}{100}\right) \\
& \qquad\qquad \approx (1.8, -0.36, 1.3, 0.79) \\
(\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} \quad &\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{v}^t = (-81, 137, -34, 22) \\
(\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A})\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{\Delta b}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{y}^t = \left(-\frac{18283543}{461600}, \frac{31504261}{461600}, -\frac{3741501}{230800}, \frac{5235241}{461600}\right) \\
& \qquad\qquad \approx (-39.61, 68.25, -16.21, 11.34)
\end{aligned}$$

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$.

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

De petites erreurs sur les données engendrent-elles de petites erreurs sur la solution?

Non, pas forcément!

Le système linéaire prédédent est **mal conditionné**.
On dit qu'un système linéaire est **bien conditionné** ou qu'il a un **bon conditionnement** si de petites perturbations des données n'entrainent qu'une variation *raisonnable* de la solution.

Est-il possible de "mesurer" le **conditionnement** d'une matrice?

Definition

Soit $\|.\|$ une norme matricielle subordonnée, le conditionnement d'une matrice régulière $\mathbb{A}$, associé à cette norme, est le nombre

$$\mathrm{cond}(\mathbb{A}) = \|\mathbb{A}\| \left\|\mathbb{A}^{-1}\right\|.$$

Nous noterons $\mathrm{cond}_p(\mathbb{A}) = \|\mathbb{A}\|_p \left\|\mathbb{A}^{-1}\right\|_p$.

Proposition :

Soit $\mathbb{A}$ une matrice régulière. On a les propriétés suivantes

1. $\forall \alpha \in \mathbb{K}^*$, $\operatorname{cond}(\alpha\mathbb{A}) = \operatorname{cond}(\mathbb{A})$.
2. $\operatorname{cond}_p(\mathbb{A}) \geqslant 1$, $\forall p \in [\![1, +\infty]\!]$.
3. $\operatorname{cond}_2(\mathbb{A}) = 1$ si et seulement si $\mathbb{A} = \alpha\mathbb{Q}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $\mathbb{Q}$ matrice unitaire

Théorème :

Soit $\mathbb{A}$ une matrice inversible. Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x}$ les solutions respectives de

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \text{et} \quad \mathbb{A}\left(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x}\right) = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{\Delta b}.$$

Supposons $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, alors l'inégalité

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leqslant \operatorname{cond}(\mathbb{A}) \frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

est satisfaite, et c'est la meilleure possible : pour une matrice $\mathbb{A}$ donnée, on peut trouver des vecteurs $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{\Delta b} \neq \boldsymbol{0}$ tels qu'elle devienne une égalité.

Théorème :

Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A}$ deux matrices inversibles. Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}$ les solutions respectives de

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ et } (\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A})(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}) = \boldsymbol{b}.$$

Supposons $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, alors on a

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}\|} \leqslant \operatorname{cond}(\mathbb{A}) \frac{\|\Delta\mathbb{A}\|}{\|\mathbb{A}\|}.$$

Remarque 1.1

Une matrice est donc **bien conditionnée** si son conditionnement est proche de 1.

Plan

Système diagonal

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$.

$$x_i = b_i / A_{i,i}, \quad \forall i \in [\![1, n]\!]. \tag{1}$$

Algorithme Fonction RSLMatDiag permettant de résoudre le système linéaire à matrice diagonale inversible

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Données : $\mathbb{A}$: matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.
Résultat : $\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.

```
Fonction x ← RSLMatDiag( A, b )
    Pour i ← 1 à n faire
        x(i) ← b(i)/A(i,i)
    Fin Pour
Fin Fonction
```

Système triangulaire inférieur

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire inférieure inversible ($A_{i,j} = 0$ si $i < j$)

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ A_{n,1} & \dots & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{A}$ inversible $\iff$

Système triangulaire inférieur

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire inférieure inversible ($A_{i,j} = 0$ si $i < j$)

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ A_{n,1} & \dots & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A} \text{ inversible} \iff A_{i,i} \neq 0, \forall i \in [\![1, n]\!]$$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire inférieure inversible ($A_{i,j} = 0$ si $i < j$)

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ A_{n,1} & \dots & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A} \text{ inversible} \iff A_{i,i} \neq 0, \forall i \in [\![1, n]\!]$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$, $\left((\mathbb{A}\boldsymbol{x})_i = b_i, \iff \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} x_j = b_i\right)$.

$$b_i = \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j + A_{i,i} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} \underbrace{A_{i,j}}_{=0} x_j = \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j + A_{i,i} x_i$$

$$x_i = \frac{1}{A_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j \right), \ \forall i \in [\![1, n]\!]. \tag{2}$$

$$x_i = \frac{1}{A_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j \right), \ \forall i \in [\![1, n]\!].$$

Algorithme 2 $\boxed{\mathcal{R}_0}$

Résoudre $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en calculant successivement $x_1, \ x_2, \ \ldots, x_n$.

Algorithme 2 $\boxed{\mathcal{R}_1}$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**

$\quad x_i \leftarrow \dfrac{1}{A_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j \right)$

Fin Pour

$$x_i = \frac{1}{A_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j}x_j\right), \ \forall i \in [\![1, n]\!].$$

Algorithme 2 $\boxed{\mathcal{R}_1}$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**

$$\boxed{x_i \leftarrow \frac{1}{A_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j}x_j\right)}$$

Fin Pour

Algorithme 2 $\boxed{\mathcal{R}_2}$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**

$$\left\{\begin{array}{l} S \leftarrow \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j}x_j \\ x_i \leftarrow (b_i - S)/A_{i,i} \end{array}\right.$$

Fin Pour

$$x_i = \frac{1}{A_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j \right), \quad \forall i \in [\![1, n]\!].$$

Algorithme 2 $\mathcal{R}_2$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
  $\boxed{S \leftarrow \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j}$
  $x_i \leftarrow (b_i - S)/A_{i,i}$
Fin Pour

Algorithme 2 $\mathcal{R}_3$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
  $S \leftarrow 0$
  Pour $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
    $S \leftarrow S + A(i,j) * x(j)$
  Fin Pour
  $x_i \leftarrow (b_i - S)/A_{i,i}$
Fin Pour

$$x_i = \frac{1}{A_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j \right), \ \forall i \in [\![1, n]\!].$$

Algorithme Fonction RSLTriInf permettant de résoudre le système linéaire triangulaire inférieur inversible $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Données : $\mathbb{A}$: matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inférieure inversible.
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{K}^n$.
Résultat : $\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{K}^n$.

```
Fonction x ← RSLTriInf( A, b )
  Pour i ← 1 à n faire
    S ← 0
    Pour j ← 1 à i − 1 faire
      S ← S + A(i, j) ∗ x(j)
    Fin Pour
    x(i) ← (b(i) − S)/A(i, i)
  Fin Pour
Fin Fonction
```

Système triangulaire supérieur

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure inversible ($A_{i,j} = 0$ si $i > j$)

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & \dots & A_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Exercice 1 **Travail à faire**

Ecrire la fonction RSLTriSup permettant de résoudre le système triangulaire supérieur $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Plan

Exercice 2 : Travail à faire *Matrice de permutation*

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j$, on note $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identitée dont on a permuté les lignes i et j.

Q. 1 *Représenter cette matrice et la définir proprement.*

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.On note $\boldsymbol{A}_{r,:}$ le r-ème vecteur ligne de $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{A}_{:,s}$ le s-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$.

Q. 2

1. *Déterminer les lignes de la matrice $\mathbb{D} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}\mathbb{A}$ en fonction des vecteurs lignes de $\mathbb{A}$.*
2. *Déterminer les colonnes de la matrice $\mathbb{E} = \mathbb{A}\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ en fonction des vecteurs colonnes de $\mathbb{A}$.*

Q. 3

1. *Calculer le déterminant de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.*
2. *Déterminer l'inverse de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.*

Exercice 3 : *Matrice d'élimination*

Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ avec $v_1 \neq 0$. On note $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice triangulaire inférieure à diagonale unité définie par

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} = \left(\begin{array}{c:cccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hdashline -v_2/v_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -v_n/v_1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{1}$$

Q. 1

1. *Calculer le déterminant de* $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$.
2. *Déterminer l'inverse de* $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$.

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $A_{1,1} \neq 0$. On note $\boldsymbol{A}_{:,j}$ le j-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{A}_{i,:}$ son i-ème vecteur ligne. On pose $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_{:,1}$.

Q. 2

1. *Calculer* $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}\mathbb{A}$ *en fonction des vecteurs lignes de* $\mathbb{A}$.
2. *Montrer que la première colonne de* $\tilde{\mathbb{A}}$ *est le vecteur* $(A_{1,1}, 0, \dots, 0)^t$ *i.e.*

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = A_{1,1}\boldsymbol{e}_1 \tag{2}$$

où $\boldsymbol{e}_1$ *est le premier vecteur de la base canonique de* $\mathbb{C}^n$.

Lemme : *matrice de permutation*

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On note $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identitée dont on a permuté les lignes i et j. Alors la matrice $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ est symétrique et orthogonale. Pour toute matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

1. la matrice $\mathbb{P}_n^{[i,j]}\mathbb{A}$ est matrice $\mathbb{A}$ dont on a permuté les **lignes** i et j,
2. la matrice $\mathbb{A}\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ est matrice $\mathbb{A}$ dont on a permuté les **colonnes** i et j,

Lemme : *matrice d'élimination*

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $A_{1,1} \neq 0$. Il existe une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité telle que

$$\mathbb{E}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = A_{1,1}\boldsymbol{e}_1 \tag{3}$$

où $\boldsymbol{e}_1$ est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Théorème : *décomposition de Schur*

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe une matrice unitaire $\mathbb{U}$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{T}$ telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^* \tag{4}$$

Plan

Algorithme de Gauss-Jordan

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$$

où $\mathbb{U}$ matrice triangulaire supérieure.
Opérations élémentaires sur les matrices :

- $\mathcal{L}_i \leftrightarrow \mathcal{L}_j$ permutation lignes i et j
- $\mathcal{L}_i \leftarrow \mathcal{L}_i + \alpha\mathcal{L}_j$ combinaison linéaire

A l'aide d'opérations élémentaires, on va transformer successivement en $n-1$ étapes le système.

- **Etape** j: on va *s'arranger* pour annuler les termes sous-diagonaux de la colonne j de la matrice sans modifier les $j-1$ premières colonnes.

$$\begin{array}{c}
\quad\overset{\color{blue}j-1}{\color{blue}\xleftrightarrow{\hspace{6em}}}\hspace{8em} \\
\left(\begin{array}{cccc:ccc}
\bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\
0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \bullet & \vdots & & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\
\hdashline
0 & \cdots & \cdots & 0 & {\color{red}\bullet} & \cdots & \bullet \\
\vdots & & & \vdots & {\color{red}\vdots} & & \vdots \\
0 & \ldots & \ldots & 0 & {\color{red}\bullet} & \cdots & \bullet
\end{array}\right)
\end{array}
\boldsymbol{x} =
\left(\begin{array}{c}
\bullet \\ \vdots \\ \bullet \\ \hdashline \bullet \\ \vdots \\ \bullet
\end{array}\right)$$

- **Etape** j: on va *s'arranger* pour annuler les termes sous-diagonaux de la colonne j de la matrice sans modifier les $j-1$ premières colonnes.

$$\begin{array}{l}
\qquad \xleftrightarrow{\qquad\quad j-1 \qquad\quad} \\
\left(\begin{array}{cccc:ccc}
\bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\
0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \bullet & \vdots & & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\
\hdashline
0 & \cdots & \cdots & 0 & \color{red}{\bullet} & \cdots & \bullet \\
\vdots & & & \vdots & \color{red}{\vdots} & & \vdots \\
0 & \ldots & \ldots & 0 & \color{red}{\bullet} & \cdots & \bullet
\end{array}\right) \boldsymbol{x} = \left(\begin{array}{c}
\bullet \\ \vdots \\ \bullet \\ \hdashline \bullet \\ \vdots \\ \bullet
\end{array}\right)
\end{array}$$

Algorithme Algorithme de Gauss-Jordan formel pour la résolution de $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

1: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $n-1$ **faire**
2: Rechercher l'indice k de la ligne du pivot (sur la colonne j, $k \in [\![j, n]\!]$)
3: Permuter les lignes j $(\mathcal{L}_j)$ et k $(\mathcal{L}_k)$ du système si besoin.
4: **Pour** $i \leftarrow j+1$ **à** n **faire**
5: Eliminer en effectuant $\mathcal{L}_i \leftarrow \mathcal{L}_i - \frac{A_{i,j}}{A_{j,j}}\mathcal{L}_j$
6: **Fin Pour**
7: **Fin Pour**
8: Résoudre le système triangulaire supérieur par la méthode de la remontée.

Algorithme Algorithme de Gauss-Jordan avec fonctions pour la résolution de $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible.
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{K}^n$.

Résultat : $\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Fonction $\boldsymbol{x} \leftarrow \mathrm{RSLGauss}(\ \mathbb{A}, \boldsymbol{b}\ )$
  Pour $j \leftarrow 1$ **à** $n-1$ **faire**
    $k \leftarrow \boxed{\mathrm{ChercheIndPivot}}(\mathbb{A}, j)$ ▷ à écrire
    Si $k \neq j$ **alors**
      $[\mathbb{A}, \boldsymbol{b}] \leftarrow \boxed{\mathrm{PermLignesSys}}(\mathbb{A}, \boldsymbol{b}, j, k)$ ▷ à écrire
    Fin Si
    Pour $i \leftarrow j+1$ **à** n **faire**
      $[\mathbb{A}, \boldsymbol{b}] \leftarrow \boxed{\mathrm{CombLignesSys}}(\mathbb{A}, \boldsymbol{b}, j, i, -A(i,j)/A(j,j))$ ▷ à écrire
    Fin Pour
  Fin Pour
  $\boldsymbol{x} \leftarrow \mathrm{RSLTriSup}(\mathbb{A}, \boldsymbol{b})$ ▷ déjà écrite
Fin Fonction

Algorithme Recherche d'un pivot pour l'algorithme de Gauss-Jordan.

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
j : entier, $1 \leqslant j \leqslant n$.
Résultat : k : dans $[\![j, n]\!]$, indice ligne pivot

Fonction $k \leftarrow$ ChercheIndPivot($\mathbb{A}, j$)
  $k \leftarrow j,\ \text{pivot} \leftarrow |\mathbb{A}(j,j)|$
  Pour $i \leftarrow j+1$ **à** n **faire**
    Si $|\mathbb{A}(i,j)| > \text{pivot}$ **alors**
      $k \leftarrow i$
      $\text{pivot} \leftarrow |\mathbb{A}(i,j)|$
    Fin Si
  Fin Pour
Fin Fonction

Algorithme Permutte deux lignes d'une matrice et d'un vecteur.

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{K}^n$.
j, k : entiers, $1 \leqslant j, k \leqslant n$.
Résultat : $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{b}$ modifiés.

Fonction $[\mathbb{A}, \boldsymbol{b}] \leftarrow$ PermLignesSys($\mathbb{A}, \boldsymbol{b}, j, k$)
  Pour $l \leftarrow 1$ **à** n **faire**
    $t \leftarrow \mathbb{A}(j,l)$
    $\mathbb{A}(j,l) \leftarrow \mathbb{A}(k,l)$
    $\mathbb{A}(k,l) \leftarrow t$
  Fin Pour
  $t \leftarrow \boldsymbol{b}(j),\ \boldsymbol{b}(j) \leftarrow \boldsymbol{b}(k),\ \boldsymbol{b}(k) \leftarrow t$
Fin Fonction

Algorithme Combinaison linéaire $\mathcal{L}_i \leftarrow \mathcal{L}_i + \alpha \mathcal{L}_j$ appliqué à une matrice et à un vecteur.

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{K}^n$.
j, i : entiers, $1 \leqslant j, i \leqslant n$.
alpha : scalaire de $\mathbb{K}$
Résultat : $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{b}$ modifiés.

Fonction $[\mathbb{A}, \boldsymbol{b}] \leftarrow$ CombLignesSys($\mathbb{A}, \boldsymbol{b}, j, i, \alpha$)
  Pour $k \leftarrow 1$ **à** n **faire**
    $\mathbb{A}(i,k) \leftarrow \mathbb{A}(i,k) + \alpha * \mathbb{A}(j,k)$
  Fin Pour
  $\boldsymbol{b}(i) \leftarrow \boldsymbol{b}(i) + \alpha \boldsymbol{b}(j)$
Fin Fonction

Exercice 4 Méthode de Gauss, écriture algébrique

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible.

Q. 1 *Montrer qu'il existe une matrice $\mathbb{G} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det(\mathbb{G})| = 1$ et $\mathbb{G}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = \alpha\boldsymbol{e}_1$ avec $\alpha \neq 0$ et $\boldsymbol{e}_1$ premier vecteur de la base canonique de C^n.*

Q. 2

1. *Montrer par récurrence sur l'ordre des matrices que pour toute matrice $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, il existe une matrice $\mathbb{S}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det \mathbb{S}_n| = 1$ et $\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n$ avec $\mathbb{U}_n$ matrice triangulaire supérieure inversible.*
2. *Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$. En supposant connue la décompostion précédente $\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n$, expliquer comment résoudre le système $\mathbb{A}_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*

Q. 3 *Que peut-on dire si $\mathbb{A}$ est non inversible?*

Indication : utiliser les Lemmes 2.1 (matrice de permutation) et 2.2 (matrice d'élimination) du résumé de ce chapitre.

On a donc démontré la proposition suivante

Proposition 2.1

Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée, inversible ou non. Il existe (au moins) une matrice inversible $\mathbb{G}$ telle que $\mathbb{G}\mathbb{A}$ soit triangulaire supérieure.

Plan

Exercice 5 Vers la factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les sous-matrices principales d'ordre i, notées Δ_i, $i \in [\![1, n]\!]$. Montrer par récurrence sur l'ordre n de la matrice $\mathbb{A}$ qu'il existe une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que la matrice $\mathbb{U}$ définie par

$$\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$$

soit triangulaire supérieure avec $U_{i,i} = \det \Delta_i / (U_{1,1} \times \cdots \times U_{i-1,i-1})$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.

Théorème : *Factorisation* $\mathbb{L}\mathbb{U}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les sous-matrices principales sont inversibles alors il existe

- une unique matrice $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure (*lower triangular* en anglais) à diagonale unité,
- une unique matrice $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure (*upper triangular* en anglais) inversible

telles ques

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}.$$

preuve : Travail à faire

- **Existence :** exercice précédent $\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$ et $\mathbb{L} = \mathbb{E}^{-1}$
- **Unicité :** $\mathbb{A} = \mathbb{L}_1\mathbb{U}_1 = \mathbb{L}_2\mathbb{U}_2$ ...

Exercice Travail à faire

Montrer que si $\mathbb{A}$ inversible admet une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$ alors toutes ses sous-matrices principales sont inversibles.

Corollaire 2.1 :

Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice hermitienne définie positive alors elle admet une unique factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$.

preuve : Travail à faire Montrer que si $\mathbb{A}$ hermitienne définie positive alors toutes ses sous-matrices principales sont hermitienne définies positives. Puis conclure.

Remarque 2.1

Si la matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est inversible mais que ses sous-matrices principales ne sont pas toutes inversibles, il est possible par des permutations préalables de lignes de la matrice de se ramener à une matrice telle que ses sous-matrices principales soient inversibles.

Théorème 2.1 : *Factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$ avec permutations* ★★★★☆

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible. Il existe une matrice $\mathbb{P}$, produit de matrices de permutation, une matrice $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité et une matrice $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure inversible telles ques

$$\mathbb{P}\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}. \tag{5}$$

Utilisation pratique de la factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$

Trouver $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \mathbb{L}\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{6}$$

est équivalent à

Utilisation pratique de la factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$

Trouver $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \mathbb{L}\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{6}$$

est équivalent à

Trouver $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ solution de

$$\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \tag{7}$$

avec $\boldsymbol{y} \in \mathbb{K}^n$ solution de

$$\mathbb{L}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}. \tag{8}$$

Algorithme Fonction RSLFactLU permettant de résoudre, par une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$, le système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ où $\mathbb{A}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dont toutes les sous-matrices principales sont inversibles, et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$.

, **Données :** $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les sous-matrices principales sont inversibles;
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{K}^n$.

Résultat : $\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{K}^n$.

1: **Fonction** $\boldsymbol{x} \leftarrow \text{RSLFactLU}(\ \mathbb{A}, \boldsymbol{b}\ )$
2: $\quad[\mathbb{L}, \mathbb{U}] \leftarrow \text{FactLU}(\mathbb{A})$ ▷ Factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$
3: $\quad\boldsymbol{y} \leftarrow \text{RSLTriInf}(\mathbb{L}, \boldsymbol{b})$ ▷ Résolution du système $\mathbb{L}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$
4: $\quad\boldsymbol{x} \leftarrow \text{RSLTriSup}(\mathbb{U}, \boldsymbol{y})$ ▷ Résolution du système $\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$
5: **Fin Fonction**

Il nous faut donc écrire la fonction FactLU

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$.

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ L_{2,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ L_{n,1} & L_{n,2} & \dots & L_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & \dots & \dots & U_{1,n} \\ 0 & U_{2,2} & \dots & \dots & U_{2,n} \\ 0 & 0 & U_{3,3} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & U_{n,n} \end{pmatrix}$$

On connait $\mathbb{A}$, on cherche $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$.

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ L_{2,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ L_{n,1} & L_{n,2} & \dots & L_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & \dots & \dots & U_{1,n} \\ 0 & U_{2,2} & \dots & \dots & U_{2,n} \\ 0 & 0 & U_{3,3} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & U_{n,n} \end{pmatrix}$$

- **Etape** 1 :
  - On connait la **première ligne** de $\mathbb{L} \Longrightarrow$ on peut calculer la **première ligne** de $\mathbb{U}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une factorisation $\mathbb{LU}$.

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ L_{2,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ L_{n,1} & L_{n,2} & \dots & L_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & \dots & \dots & U_{1,n} \\ 0 & U_{2,2} & \dots & \dots & U_{2,n} \\ 0 & 0 & U_{3,3} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & U_{n,n} \end{pmatrix}$$

- **Etape** 1 :
  - On connait la **première ligne** de $\mathbb{L}$ $\Longrightarrow$ on peut calculer la **première ligne** de $\mathbb{U}$
  - On connait la **première colonne** de $\mathbb{U}$ $\Longrightarrow$ on peut calculer la **première colonne** de $\mathbb{L}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$.

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ L_{2,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ L_{n,1} & L_{n,2} & \dots & L_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & \dots & \dots & U_{1,n} \\ 0 & U_{2,2} & \dots & \dots & U_{2,n} \\ 0 & 0 & U_{3,3} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & U_{n,n} \end{pmatrix}$$

- **Etape** 1 :
  - On connait la **première ligne** de $\mathbb{L} \Longrightarrow$ on peut calculer la **première ligne** de $\mathbb{U}$
  - On connait la **première colonne** de $\mathbb{U} \Longrightarrow$ on peut calculer la **première colonne** de $\mathbb{L}$
- **Etape** 2 :
  - On connait la **deuxième ligne** de $\mathbb{L} \Longrightarrow$ on peut calculer la **deuxième ligne** de $\mathbb{U}$ car on connait la première ligne de $\mathbb{U}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$.

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ L_{2,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ L_{n,1} & L_{n,2} & \dots & L_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & \dots & \dots & U_{1,n} \\ 0 & U_{2,2} & \dots & \dots & U_{2,n} \\ 0 & 0 & U_{3,3} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & U_{n,n} \end{pmatrix}$$

- **Etape** 1 :
  - On connait la **première ligne** de $\mathbb{L} \Longrightarrow$ on peut calculer la **première ligne** de $\mathbb{U}$
  - On connait la **première colonne** de $\mathbb{U} \Longrightarrow$ on peut calculer la **première colonne** de $\mathbb{L}$
- **Etape** 2 :
  - On connait la **deuxième ligne** de $\mathbb{L} \Longrightarrow$ on peut calculer la **deuxième ligne** de $\mathbb{U}$ car on connait la première ligne de $\mathbb{U}$
  - On connait la **deuxième colonne** de $\mathbb{U} \Longrightarrow$ on peut calculer la **deuxième colonne** de $\mathbb{L}$ car on connait la première colonne de $\mathbb{L}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$.

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ L_{2,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ L_{n,1} & L_{n,2} & \dots & L_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & \dots & \dots & U_{1,n} \\ 0 & U_{2,2} & \dots & \dots & U_{2,n} \\ 0 & 0 & U_{3,3} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & U_{n,n} \end{pmatrix}$$

- **Etape** 1 :
  - On connait la **première ligne** de $\mathbb{L} \Longrightarrow$ on peut calculer la **première ligne** de $\mathbb{U}$
  - On connait la **première colonne** de $\mathbb{U} \Longrightarrow$ on peut calculer la **première colonne** de $\mathbb{L}$
- **Etape** 2 :
  - On connait la **deuxième ligne** de $\mathbb{L} \Longrightarrow$ on peut calculer la **deuxième ligne** de $\mathbb{U}$ car on connait la première ligne de $\mathbb{U}$
  - On connait la **deuxième colonne** de $\mathbb{U} \Longrightarrow$ on peut calculer la **deuxième colonne** de $\mathbb{L}$ car on connait la première colonne de $\mathbb{L}$
- ...

Par récurrence, en supposant connues les $(i-1)$ premières colonnes de $\mathbb{L}$ et les $(i-1)$ premières lignes de $\mathbb{U}$.

$$\mathbb{A} = \overset{\mathbb{L}}{\begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{\bullet\ 0\ \cdots\ 0}}^{i-1} \\ \left(\begin{array}{cccc|cccc}
\bullet & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\bullet & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\bullet & \cdots & \bullet & \bullet & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\hline
\bullet & \cdots & \cdots & \bullet & L_{i,i} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \vdots & \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
\bullet & \cdots & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & L_{n,n}
\end{array}\right) \\ \text{Connus} \end{array}}
\overset{\mathbb{U}}{\begin{array}{c} \text{Connus} \\ \left(\begin{array}{cccc|cccc}
\bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\
0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \bullet & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\
\hline
0 & \cdots & \cdots & 0 & U_{i,i} & \bullet & \cdots & \bullet \\
\vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & U_{n,n}
\end{array}\right) \\ \phantom{\text{Connus}} \end{array}}
\begin{array}{l} \\ i-1 \\ \\ \end{array}$$

Par récurrence, en supposant connues les $(i-1)$ premières colonnes de $\mathbb{L}$ et les $(i-1)$ premières lignes de $\mathbb{U}$.

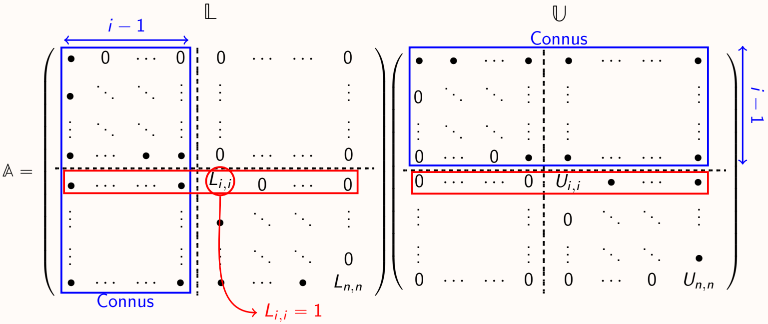
$$\mathbb{A} = \overset{\mathbb{L}}{\left(\begin{array}{cccc:cccc}
\overbrace{\bullet \quad 0 \quad \cdots \quad 0}^{i-1} & & & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\bullet & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\bullet & \cdots & \bullet & \bullet & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hdashline
\bullet & \cdots & \cdots & \bullet & L_{i,i} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \vdots & \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
\bullet & \cdots & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & L_{n,n}
\end{array}\right)}
\overset{\mathbb{U}}{\left(\begin{array}{cccc:cccc}
\bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\
0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \bullet & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ \hdashline
0 & \cdots & \cdots & 0 & U_{i,i} & \bullet & \cdots & \bullet \\
\vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & U_{n,n}
\end{array}\right)}\ \Big\updownarrow{\scriptstyle i-1}$$

Connus (premières $i-1$ colonnes de $\mathbb{L}$) Connus (premières $i-1$ lignes de $\mathbb{U}$)

$L_{i,i} = 1$

$\Rightarrow$ ligne i de $\mathbb{L}$ connue : on peut calculer la ligne i de $\mathbb{U}$!

Par récurrence, en supposant connues les $(i-1)$ premières colonnes de $\mathbb{L}$ et les $(i-1)$ premières lignes de $\mathbb{U}$.



$\Rightarrow$ ligne i de $\mathbb{L}$ connue : on peut calculer la ligne i de $\mathbb{U}$!

On cherche $U_{i,j}$ $\forall j \in [\![i, n]\!]$.

$$A_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} L_{i,k} U_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} \overbrace{L_{i,k} U_{k,j}}^{\text{connus}} + \overbrace{L_{i,i}}^{=1} U_{i,j} + \sum_{k=i+1}^{n} \overbrace{L_{i,k}}^{=0} U_{k,j}$$

$$U_{i,j} = A_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k} U_{k,j}, \quad \forall j \in [\![i, n]\!].$$

Par récurrence, en supposant connues les $(i-1)$ premières colonnes de $\mathbb{L}$ et les $(i-1)$ premières lignes de $\mathbb{U}$.

$$\mathbb{A} = \overset{\mathbb{L}}{\left(\begin{array}{cccc:cccc}
\bullet & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\bullet & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\bullet & \cdots & \bullet & \bullet & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\hdashline
\bullet & \cdots & \cdots & \bullet & L_{i,i} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \vdots & \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
\bullet & \cdots & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & L_{n,n}
\end{array}\right)}
\overset{\mathbb{U}}{\left(\begin{array}{cccc:cccc}
\bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\
0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \bullet & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\
\hdashline
0 & \cdots & \cdots & 0 & U_{i,i} & \bullet & \cdots & \bullet \\
\vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & U_{n,n}
\end{array}\right)}$$

$i-1$ Connus

$i-1$ Connus

$\Rightarrow$ colonne i de $\mathbb{U}$ connue : on peut calculer la colonne i de $\mathbb{L}$!

Par récurrence, en supposant connues les $(i-1)$ premières colonnes de $\mathbb{L}$ et les $(i-1)$ premières lignes de $\mathbb{U}$.

$$\mathbb{A} = \overset{\mathbb{L}}{\begin{pmatrix} \bullet & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \bullet & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \bullet & \cdots & \cdots & \bullet & L_{i,i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \bullet & \cdots & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & L_{n,n} \end{pmatrix}} \overset{\mathbb{U}}{\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \bullet & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & U_{i,i} & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & U_{n,n} \end{pmatrix}}$$

$i-1$ Connus

Connus $i-1$

$\Rightarrow$ colonne i de $\mathbb{U}$ connue : on peut calculer la colonne i de $\mathbb{L}$!

On cherche $L_{j,i}$ $\forall j \in [\![i+1, n]\!]$, $(L_{i,i} = 1)$

$$A_{j,i} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} L_{j,k} U_{k,i} = \sum_{k=1}^{i-1} \overbrace{L_{j,k} U_{k,i}}^{\text{connus}} + L_{j,i} \overbrace{U_{i,i}}^{\text{connu}} + \sum_{k=i+1}^{n} L_{j,k} \overbrace{U_{k,i}}^{=0}$$

$$L_{j,i} = \left(A_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{j,k} U_{k,i} \right) / U_{i,i}, \quad \forall j \in [\![i+1, n]\!].$$

En résumé, à l'étape i:

- Calcul de la ligne i de $\mathbb{U}$

$$\begin{aligned} U_{i,j} &= 0, & \forall j \in [\![1, i-1]\!], \\ U_{i,j} &= A_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k} U_{k,j}, & \forall j \in [\![i, n]\!]. \end{aligned}$$

- Calcul de la colonne i de $\mathbb{L}$

$$\begin{aligned} L_{j,i} &= 0, & \forall j \in [\![1, i-1]\!], \\ L_{i,i} &= 1, & \\ L_{j,i} &= \left(A_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{j,k} U_{k,i} \right) / U_{i,i}, & \forall j \in [\![i+1, n]\!]. \end{aligned}$$

Algorithme 9 $\mathcal{R}_0$

1: $\boxed{\text{Calculer les matrices } \mathbb{L} \text{ et } \mathbb{U}}$

Algorithme 9 $\mathcal{R}_1$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
2: Calculer la ligne i de $\mathbb{U}$.
3: Calculer la colonne i de $\mathbb{L}$.
4: **Fin Pour**

Algorithme 9 $\mathcal{R}_1$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
  Calculer la ligne i de $\mathbb{U}$.
  Calculer la colonne i de $\mathbb{L}$.
Fin Pour

Algorithme 9 $\mathcal{R}_2$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
  Pour $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
    $U(i,j) \leftarrow 0$
  Fin Pour
  Pour $j \leftarrow i$ **à** n **faire**
    $U_{i,j} \leftarrow A_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k} U_{k,j}$
  Fin Pour
  Pour $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
    $L_{j,i} \leftarrow 0$
  Fin Pour
  $L_{i,i} \leftarrow 1$
  Pour $j \leftarrow i+1$ **à** n **faire**
    $L_{j,i} \leftarrow \frac{1}{U_{i,i}} \left(A_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{j,k} U_{k,i} \right)$
  Fin Pour
Fin Pour

En résumé, à l'étape i:

- Calcul de la ligne i de $\mathbb{U}$

$$\begin{aligned} U_{i,j} &= 0, && \forall j \in [\![1, i-1]\!], \\ U_{i,j} &= A_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k} U_{k,j}, && \forall j \in [\![i, n]\!]. \end{aligned}$$

- Calcul de la colonne i de $\mathbb{L}$

$$\begin{aligned} L_{j,i} &= 0, && \forall j \in [\![1, i-1]\!], \\ L_{i,i} &= 1, && \\ L_{j,i} &= \left(A_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{j,k} U_{k,i} \right) / U_{i,i}, && \forall j \in [\![i+1, n]\!]. \end{aligned}$$

Algorithme 9 $\mathcal{R}_2$

```
Pour i ← 1 à n faire
    Pour j ← 1 à i − 1 faire
        U(i, j) ← 0
    Fin Pour
    Pour j ← i à n faire
```
$$U_{i,j} \leftarrow A_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k} U_{k,j}$$
```
    Fin Pour
    Pour j ← 1 à i − 1 faire
        L_{j,i} ← 0
    Fin Pour
    L_{i,i} ← 1
    Pour j ← i + 1 à n faire
```
$$L_{j,i} \leftarrow \frac{1}{U_{i,i}} \left(A_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{j,k} U_{k,i} \right)$$
```
    Fin Pour
Fin Pour
```

Algorithme 9 $\mathcal{R}_3$

```
Pour i ← 1 à n faire
    Pour j ← 1 à i − 1 faire
        U(i, j) ← 0
    Fin Pour
    Pour j ← i à n faire
```
$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 \leftarrow \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k} U_{k,j} \\ U_{i,j} \leftarrow A_{i,j} - S_1 \end{array} \right.$$
```
    Fin Pour
    Pour j ← 1 à i − 1 faire
        L_{j,i} ← 0
    Fin Pour
    L_{i,i} ← 1
    Pour j ← i + 1 à n faire
```
$$\left\{ \begin{array}{l} S_2 \leftarrow \sum_{k=1}^{i-1} L_{j,k} U_{k,i} \\ L_{j,i} \leftarrow \dfrac{1}{U_{i,i}} \left(A_{j,i} - S_2 \right). \end{array} \right.$$
```
    Fin Pour
Fin Pour
```

Algorithme 9 $\boxed{\mathcal{R}_3}$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
  Pour $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
    $U(i,j) \leftarrow 0$
  Fin Pour
  Pour $j \leftarrow i$ **à** n **faire**
    $\boxed{S_1 \leftarrow \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k} U_{k,j}}$
    $U_{i,j} \leftarrow A_{i,j} - S_1$
  Fin Pour
  Pour $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
    $L_{j,i} \leftarrow 0$
  Fin Pour
  $L_{i,i} \leftarrow 1$
  Pour $j \leftarrow i+1$ **à** n **faire**
    $\boxed{S_2 \leftarrow \sum_{k=1}^{i-1} L_{j,k} U_{k,i}}$
    $L_{j,i} \leftarrow \frac{1}{U_{i,i}} (A_{j,i} - S_2).$
  Fin Pour
Fin Pour

Algorithme 9 $\boxed{\mathcal{R}_4}$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
  Pour $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
    $U(i,j) \leftarrow 0$
  Fin Pour
  Pour $j \leftarrow i$ **à** n **faire**
    $S_1 \leftarrow 0$
    Pour $k \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
      $S_1 \leftarrow S_1 + L_{i,k} * U_{k,j}$
    Fin Pour
    $U_{i,j} \leftarrow A_{i,j} - S_1$
  Fin Pour
  Pour $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
    $L_{j,i} \leftarrow 0$
  Fin Pour
  $L_{i,i} \leftarrow 1$
  Pour $j \leftarrow i+1$ **à** n **faire**
    $S_2 \leftarrow 0$
    Pour $k \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
      $S_2 \leftarrow S_2 + L_{j,k} * U_{k,i}$
    Fin Pour
    $L_{j,i} \leftarrow \frac{1}{U_{i,i}} (A_{j,i} - S_2).$
  Fin Pour
Fin Pour

Algorithme Fonction FactLU permet de calculer les matrices $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$ dites matrice de factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$ associée à la matrice $\mathbb{A}$, telle que

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$$

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les sous-matrices principales sont inversibles.

Résultat : $\mathbb{L}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire inférieure avec $L_{i,i} = 1,\ \forall i \in [\![1, n]\!]$

$\mathbb{U}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure.

Fonction $[\mathbb{L}, \mathbb{U}] \leftarrow$ FactLU($\mathbb{A}$)
  $\mathbb{U} \leftarrow \mathbb{O}_n$ ▷ $\mathbb{O}_n$ matrice nulle $n \times n$
  $\mathbb{L} \leftarrow \mathbb{I}_n$ ▷ $\mathbb{I}_n$ matrice identitée $n \times n$
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
    Pour $j \leftarrow i$ **à** n **faire** ▷ Calcul de la ligne i de $\mathbb{U}$
      $S_1 \leftarrow 0$
      Pour $k \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
        $S_1 \leftarrow S_1 + L(i,k) * U(k,j)$
      Fin Pour
      $U(i,j) \leftarrow A(i,j) - S_1$
    Fin Pour
    Pour $j \leftarrow i+1$ **à** n **faire** ▷ Calcul de la colonne i de $\mathbb{L}$
      $S_2 \leftarrow 0$
      Pour $k \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
        $S_2 \leftarrow S_2 + L(j,k) * U(k,i)$
      Fin Pour
      $L(j,i) \leftarrow (A_{j,i} - S_2)/U(i,i)$.
    Fin Pour
  Fin Pour
Fin Fonction

Plan

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **hermitienne inversible** admettant une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$. On pose

$$\mathbb{D} = \operatorname{diag} \mathbb{U} \text{ et } \mathbb{R} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{U}.$$

$\mathbb{R}$ est alors triangulaire supérieure à diagonale unité. On a alors

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{U} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{R}.$$

$$\mathbb{A} \text{ hermitienne } \mathbb{A}^* = \mathbb{A} \implies \mathbb{A} = \mathbb{R}^*(\mathbb{D}^*\mathbb{L}^*) = \mathbb{L}(\mathbb{D}\mathbb{R})$$

Par unicité de la factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$:

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{L} \text{ et } \mathbb{D}^*\mathbb{L}^* = \mathbb{D}\mathbb{R} \implies \mathbb{R}^* = \mathbb{L} \text{ et } \mathbb{D}^* = \mathbb{D}$$

Théorème 2.2 : *Factorisation* $\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne inversible admettant une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$. Alors $\mathbb{A}$ s'écrit sous la forme

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^* \tag{9}$$

où $\mathbb{D} = \operatorname{diag} \mathbb{U}$ est une matrice à coefficients réels.

Corollaire 2.2 : *Exercice 6,*

Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$ avec $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs **si et seulement si** la matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive.

Plan

Definition 2.1

Une **factorisation régulière de Cholesky** d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une factorisation $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$ où $\mathbb{B}$ est une matrice triangulaire inférieure inversible.
Si les coefficients diagonaux de $\mathbb{B}$ sont positifs, on parle alors d'une **factorisation positive de Cholesky**.

Théorème 2.3 : *Factorisation de Cholesky, Exercice 7*

La matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une factorisation régulière de Cholesky **si et seulement si** la matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive. Dans ce cas, elle admet une unique factorisation positive.

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne définie positive et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$. On note $\mathbb{B}$ la matrice de factorisation positive de Cholesky de $\mathbb{A}$.

Trouver $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad (\Longleftrightarrow \quad \mathbb{B}\mathbb{B}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}) \tag{10}$$

est équivalent à

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne définie positive et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$. On note $\mathbb{B}$ la matrice de factorisation positive de Cholesky de $\mathbb{A}$.

Trouver $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad (\Longleftrightarrow \quad \mathbb{B}\mathbb{B}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}) \tag{10}$$

est équivalent à

Trouver $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ solution de

$$\mathbb{B}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \tag{11}$$

avec $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ solution de

$$\mathbb{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}. \tag{12}$$

Algorithme Fonction RSLCholesky permettant de résoudre, par une factorisation de Cholesky positive, le système linéaire

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

où $\mathbb{A}$ une matrice hermitienne de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie positive et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$.

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne définie positive,
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{C}^n$.

Résultat : $\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{C}^n$.

1: **Fonction** $\boldsymbol{x} \leftarrow \mathrm{RSLCholesky}(\ \mathbb{A}, \boldsymbol{b}\ )$
2: $\quad\mathbb{B} \leftarrow \mathrm{Cholesky}(\mathbb{A})$ ▷ Factorisation positive de Cholesky
3: $\quad\boldsymbol{y} \leftarrow \mathrm{RSLTriInf}(\mathbb{B}, \boldsymbol{b})$ ▷ Résolution du système $\mathbb{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$
4: $\quad\mathbb{U} \leftarrow \mathrm{MatAdjointe}(\mathbb{B})$ ▷ Calcul de la matrice adjointe de $\mathbb{B}$
5: $\quad\boldsymbol{x} \leftarrow \mathrm{RSLTriSup}(\mathbb{U}, \boldsymbol{y})$ ▷ Résolution du système $\mathbb{B}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$
6: **Fin Fonction**

Il nous faut donc écrire la fonction Cholesky

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne définie positive. il existe une unique matrice $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure avec $\mathrm{B}_{i,i} \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, telle que

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$$

c'est à dire

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}_{1,1} & \dots & \mathrm{A}_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \dots \\ \mathrm{A}_{n,1} & \dots & \mathrm{A}_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{B}_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \mathrm{B}_{n,1} & \dots & \dots & \mathrm{B}_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\mathrm{B}_{1,1}} & \dots & \dots & \overline{\mathrm{B}_{n,1}} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \overline{\mathrm{B}_{n,n}} \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne définie positive. il existe une unique matrice $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure avec $\mathrm{B}_{i,i} \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, telle que

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$$

c'est à dire

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}_{1,1} & \dots & \mathrm{A}_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \dots \\ \mathrm{A}_{n,1} & \dots & \mathrm{A}_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{B}_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \mathrm{B}_{n,1} & \dots & \dots & \mathrm{B}_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\mathrm{B}_{1,1}} & \dots & \dots & \overline{\mathrm{B}_{n,1}} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \overline{\mathrm{B}_{n,n}} \end{pmatrix}.$$

- Calcul de $\mathrm{B}_{1,1}$ (la 1ère ligne de $\mathbb{B}$ est donc déterminée)
  $\Longrightarrow$ calcul 1ère colonne de $\mathbb{B}$.

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne définie positive. il existe une unique matrice $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure avec $\mathrm{B}_{i,i} \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, telle que

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$$

c'est à dire

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}_{1,1} & \dots & \mathrm{A}_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \dots \\ \mathrm{A}_{n,1} & \dots & \mathrm{A}_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{B}_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \mathrm{B}_{n,1} & \dots & \dots & \mathrm{B}_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\mathrm{B}_{1,1}} & \dots & \dots & \overline{\mathrm{B}_{n,1}} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \overline{\mathrm{B}_{n,n}} \end{pmatrix}.$$

- Calcul de $\mathrm{B}_{1,1}$ (la 1ère ligne de $\mathbb{B}$ est donc déterminée)
  $\Longrightarrow$ calcul 1ère colonne de $\mathbb{B}$.
- Puis calcul de $\mathrm{B}_{2,2}$ (la 2ème ligne de $\mathbb{B}$ est donc déterminée)
  $\Longrightarrow$ calcul 2ème colonne de $\mathbb{B}$.
- Etc...

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On suppose connues les $i-1$ premières colonnes de $\mathbb{B}$.

Peut-on calculer la colonne i de $\mathbb{B}$?

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^* \implies \mathrm{A}_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{B}_{i,k}(\mathbb{B}^*)_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{B}_{i,k}\overline{\mathrm{B}_{i,k}}$$

Or $\mathbb{B}$ triangulaire inférieure (i.e. $\mathrm{B}_{i,j} = 0$ si $j > i$)

$$\mathrm{A}_{i,i} = \sum_{k=1}^{i-1} |\mathrm{B}_{i,k}|^2 + |\mathrm{B}_{i,i}|^2$$

et donc

$$\mathrm{B}_{i,i} = \left(\mathrm{A}_{i,i} - \sum_{j=1}^{i-1} |\mathrm{B}_{i,j}|^2\right)^{1/2}.$$

Il reste à déterminer $\mathrm{B}_{j,i}$, $\forall j \in [\![i+1, n]\!]$.

$$\mathrm{A}_{j,i} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{B}_{j,k} (\mathbb{B}^*)_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{B}_{j,k} \overline{\mathrm{B}_{i,k}}, \ \forall j \in [\![i+1, n]\!]$$

Comme $\mathbb{L}$ est triangulaire inférieure on obtient

$$\mathrm{A}_{j,i} = \sum_{k=1}^{i} \mathrm{B}_{j,k} \overline{\mathrm{B}_{i,k}} = \sum_{k=1}^{i-1} \mathrm{B}_{j,k} \overline{\mathrm{B}_{i,k}} + \mathrm{B}_{j,i} \overline{\mathrm{B}_{i,i}}, \ \forall j \in [\![i+1, n]\!]$$

Or $\mathrm{B}_{i,i} > 0$ connu et les $i-1$ premières colonnes de $\mathbb{B}$ aussi.

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_{j,i} &= \frac{1}{\mathrm{B}_{i,i}} \left(\mathrm{A}_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} \mathrm{B}_{j,k} \overline{\mathrm{B}_{i,k}} \right), \ \forall j \in [\![i+1, n]\!] \\ \mathrm{B}_{j,i} &= 0, \ \forall j \in [\![1, i-1]\!]. \end{aligned}$$

Algorithme 11 $\mathcal{R}_0$

1: Calculer la matrice $\mathbb{B}$

Algorithme 11 $\mathcal{R}_1$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
2: Calculer $\mathbb{B}_{i,i}$, connaissant les $i-1$ premières colonnes de $\mathbb{B}$.
3: Calculer la $i^{\text{ème}}$ colonne de $\mathbb{B}$.
4: **Fin Pour**

Algorithme 11 $\mathcal{R}_1$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
  Calculer $\mathrm{B}_{i,i}$, connaissant les $i-1$ premières colonnes de $\mathbb{B}$.
  Calculer la $i^{\text{ème}}$ colonne de $\mathbb{B}$.
Fin Pour

Algorithme 11 $\mathcal{R}_2$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
  $$\mathrm{B}_{i,i} \leftarrow \left(\mathrm{A}_{i,i} - \sum_{j=1}^{i-1} |\mathrm{B}_{i,j}|^2\right)^{1/2}$$
  Pour $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
    $\mathrm{B}_{j,i} \leftarrow 0$
  Fin Pour
  Pour $j \leftarrow i+1$ **à** n **faire**
    $$\mathrm{B}_{j,i} \leftarrow \frac{1}{\mathrm{B}_{i,i}}\left(\mathrm{A}_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} \mathrm{B}_{j,k}\overline{\mathrm{B}_{i,k}}\right).$$
  Fin Pour
Fin Pour

Etape i: les $i-1$ premières colonnes de $\mathbb{B}$ étant connues, on peut calculer la i-ème colonne:

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_{i,i} &= \left(\mathrm{A}_{i,i} - \sum_{j=1}^{i-1} |\mathrm{B}_{i,j}|^2\right)^{1/2} > 0 \\
\mathrm{B}_{j,i} &= \frac{1}{\mathrm{B}_{i,i}}\left(\mathrm{A}_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} \mathrm{B}_{j,k}\overline{\mathrm{B}_{i,k}}\right), \ \forall j \in [\![i+1, n]\!] \\
\mathrm{B}_{j,i} &= 0, \ \forall j \in [\![1, i-1]\!].
\end{aligned}$$

Algorithme 11 $\boxed{\mathcal{R}_2}$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**

$$\boxed{\mathrm{B}_{i,i} \leftarrow \left(\mathrm{A}_{i,i} - \sum_{j=1}^{i-1} |\mathrm{B}_{i,j}|^2\right)^{1/2}}$$

  Pour $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**

    $\mathrm{B}_{j,i} \leftarrow 0$

  Fin Pour

  Pour $j \leftarrow i+1$ **à** n **faire**

$$\boxed{\mathrm{B}_{j,i} \leftarrow \frac{1}{\mathrm{B}_{i,i}}\left(\mathrm{A}_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} \mathrm{B}_{j,k}\overline{\mathrm{B}_{i,k}}\right).}$$

  Fin Pour

Fin Pour

Algorithme 11 $\boxed{\mathcal{R}_3}$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**

$$\left\{\begin{array}{l} S_1 \leftarrow \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} |\mathrm{B}_{i,j}|^2 \\ \mathrm{B}_{i,i} \leftarrow \left(\mathrm{A}_{i,i} - S_1\right)^{1/2} \end{array}\right.$$

  Pour $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**

    $\mathrm{B}_{j,i} \leftarrow 0$

  Fin Pour

  Pour $j \leftarrow i+1$ **à** n **faire**

$$\left\{\begin{array}{l} S_2 \leftarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} \mathrm{B}_{j,k}\overline{\mathrm{B}_{i,k}} \\ \mathrm{B}_{j,i} \leftarrow \dfrac{1}{\mathrm{B}_{i,i}}\left(\mathrm{A}_{j,i} - S_2\right). \end{array}\right.$$

  Fin Pour

Fin Pour

Algorithme 11 $\mathcal{R}_3$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**

$$\boxed{S_1 \leftarrow \sum_{j=1}^{i-1} |\mathrm{B}_{i,j}|^2}$$

  $\mathrm{B}_{i,i} \leftarrow (\mathrm{A}_{i,i} - S_1)^{1/2}$

  Pour $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**

    $\mathrm{B}_{j,i} \leftarrow 0$

  Fin Pour

  Pour $j \leftarrow i+1$ **à** n **faire**

$$\boxed{S_2 \leftarrow \sum_{k=1}^{i-1} \mathrm{B}_{j,k}\overline{\mathrm{B}_{i,k}}}$$

$$\mathrm{B}_{j,i} \leftarrow \frac{1}{\mathrm{B}_{i,i}}(\mathrm{A}_{j,i} - S_2).$$

  Fin Pour

Fin Pour

Algorithme 11 $\mathcal{R}_4$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**

  $S_1 \leftarrow 0$

  Pour $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**

    $S_1 \leftarrow S_1 + |\mathrm{B}_{i,j}|^2$

  Fin Pour

  $\mathrm{B}_{i,i} \leftarrow (\mathrm{A}_{i,i} - S_1)^{1/2}$

  Pour $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**

    $\mathrm{B}_{j,i} \leftarrow 0$

  Fin Pour

  Pour $j \leftarrow i+1$ **à** n **faire**

    $S_2 \leftarrow 0$

    Pour $k \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**

      $S_2 \leftarrow S_2 + \mathrm{B}_{j,k}\overline{\mathrm{B}_{i,k}}$

    Fin Pour

$$\mathrm{B}_{j,i} \leftarrow \frac{1}{\mathrm{B}_{i,i}}(\mathrm{A}_{j,i} - S_2).$$

  Fin Pour

Fin Pour

Algorithme Fonction Cholesky permettant de calculer la matrice $\mathbb{B}$, dites matrice de factorisation positive de Cholesky associée à la matrice $\mathbb{A}$, telle que $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$.

Données : A : matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne définie positive.
Résultat : B : matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure
avec $\mathrm{B}(i,i) > 0, \ \forall i \in [\![1, n]\!]$

Fonction $\mathrm{B} \leftarrow$ Cholesky(A)
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
    $S_1 \leftarrow 0$
    Pour $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
      $S_1 \leftarrow S_1 + |\mathrm{B}(i,j)|^2$
    Fin Pour
    $\mathrm{B}(i,i) \leftarrow \mathrm{sqrt}(\mathrm{A}(i,i) - S_1)$
    Pour $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
      $\mathrm{B}(j,i) \leftarrow 0$
    Fin Pour
    Pour $j \leftarrow i+1$ **à** n **faire**
      $S_2 \leftarrow 0$
      Pour $k \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
        $S_2 \leftarrow S_2 + \mathrm{B}(j,k) * \overline{\mathrm{B}(i,k)}$
      Fin Pour
      $\mathrm{B}(j,i) \leftarrow (\mathrm{A}(j,i) - S_2)/\mathrm{B}(i,i)$.
    Fin Pour
  Fin Pour
Fin Fonction

Exercice **Travail à faire**

Proposer une méthode permettant de tester la fonction Cholesky.

Plan

Definition : *Matrice élémentaire de Householder*

Soit $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$. On appelle **matrice élémentaire de Householder** la matrice $\mathbb{H}(\boldsymbol{u}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u}) = \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*. \tag{13}$$

Exercice 8

Soit $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$. On note $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\mathbb{H} = \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*.$$

Q. 1

1. *Montrer que $\mathbb{H}$ est hermitienne.*
2. *Montrer que $\mathbb{H}$ est unitaire.*

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$. On note $\boldsymbol{x}_{\|} = \mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{x}_{\perp} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\|}$.

Q. 2

Montrer que

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{x}_{\perp} + \boldsymbol{x}_{\|}) = \boldsymbol{x}_{\perp} - \boldsymbol{x}_{\|}.$$

et

$$\mathbb{H}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \quad \textit{si } \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle = 0.$$

On vient de démontrer:

Propriété 2.1

Toute matrice élémentaire de Householder est hermitienne et unitaire.

Propriété 2.2

Soient $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ et $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n$, $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$. On note $\boldsymbol{x}_{\parallel} = \mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{x}_{\perp} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\parallel}$. On a alors

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x}_{\perp} + \boldsymbol{x}_{\parallel}) = \boldsymbol{x}_{\perp} - \boldsymbol{x}_{\parallel}. \tag{14}$$

et

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \quad \text{si } \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle = 0. \tag{15}$$

Exercice 9

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$. On va chercher $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$, vérifiant

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}. \tag{1}$$

Q. 1 *Montrer que si α et $\boldsymbol{u}$ vérifient (1) alors*

1. *on a*

$$|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2 \tag{2}$$

2. *on a*

$$\boldsymbol{a} - 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\rangle \boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{b} \tag{3}$$

3. *on en déduit que*

$$|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\rangle|^2 = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle}{2} \tag{4}$$

Nous allons maintenant établir une condition pour que (4) ait un sens.

Q. 2 *On suppose que* $\arg\alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle)\ [\pi]$

1. *Montrer que* $\alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \in \mathbb{R}$.
2. *Montrer que* $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \in \mathbb{R}^{*+}$.

Q. 3 *Soient α et $\boldsymbol{u}$ vérifiant (1). En déduire que si* $\arg\alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle)\ [\pi]$ *alors $\boldsymbol{u}$ est donné par*

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\rangle}(\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}). \tag{5}$$

et $\|u\|_2 = 1$.

On vient de démontrer le résultat suivant.

Théorème 2.4

Soient $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2$ et $\arg \alpha = -\arg\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \; [\pi]$. On a alors

$$\mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}\|_2}\right)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}. \tag{16}$$

Corollaire 2.3

Soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^n$ non nulle et non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1$, premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Alors, le vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ donné par

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{a} - \|\boldsymbol{a}\|_2 \, e^{\imath \arg(\boldsymbol{a}_1)}\boldsymbol{e}_1}{\left\|\boldsymbol{a} - \|\boldsymbol{a}\|_2 \, e^{\imath \arg(\boldsymbol{a}_1)}\boldsymbol{e}_1\right\|_2}$$

est bien défini et on a

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = -\|\boldsymbol{a}\|_2 \, e^{\imath \arg(\boldsymbol{a}_1)}\boldsymbol{e}_1. \tag{17}$$

Preuve : Travail à faire

Exercice 10

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$.

Q. 1 *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2$ et $\arg(\alpha) = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle) + \delta\pi$ avec $\delta \in [\![0, 1]\!]$.*

1. *On suppose que $\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, (i.e. $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ colinéaires). Exprimer $\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}$ en fonction de λ et $\boldsymbol{b}$.*
2. *Que peut-on dire si $\boldsymbol{a}$ est nul?*

Q. 2 *Ecrire la fonction algorithmique Householder de paramètres $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\delta \in [\![0, 1]\!]$ retournant une matrice $\mathbb{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire et $\alpha \in \mathbb{C}$ telles que*

- *si $\boldsymbol{a} - \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle \boldsymbol{b} = 0$ (i.e. $\boldsymbol{a}$ nul ou colinéaire à $\boldsymbol{b}$) alors $\mathbb{S}$ est la matrice identitée et $\alpha = 0$,*
- *sinon α est le nombre complexe défini en **Q. 1** (dépendant de δ) et $\mathbb{S}$ est la matrice élémentaire de Householder*

$$\mathbb{S} = \mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}\|_2}\right)$$

telle que $\mathbb{S}\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$.

Des fonctions comme dot$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ (produit scalaire de deux vecteurs), norm$(\boldsymbol{a})$ (norme 2 d'un vecteur), arg(z) (argument d'un nombre complexe), eye(n) (matrice identitée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), matprod$(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ (produit de deux matrices), ctranspose$(\mathbb{A})$ (adjoint d'une matrice), ... pourront être utilisées

Q. 3 *Proposer un programme permettant de tester cette fonction. On pourra utiliser la fonction vecrand(n) retournant un vecteur aléatoire de $\mathbb{C}^n$, les parties réelles et imaginaires de chacune de ses composantes étant dans $]0, 1[$ (loi uniforme).*

Q. 4 *Proposer un programme permettant de vérifier que $\delta = 1$ est le "meilleur" choix.*

fonctions disponibles: dot, norm, arg, eye, matprod, ctranspose

Algorithme fonction $[\mathbb{S}, \alpha] \leftarrow \text{Householder}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \delta)$.

Retourne une matrice $\mathbb{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire et $\alpha \in \mathbb{C}$ telles que

- si $\boldsymbol{a} - \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle \boldsymbol{b} = 0$ (i.e. $\boldsymbol{a}$ nul ou colinéaire à $\boldsymbol{b}$) alors $\mathbb{S}$ est la matrice identitée et $\alpha = 0$,
- sinon α est le nombre complexe défini par

$$|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2 \quad \text{et} \quad \arg(\alpha) = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle) + \delta\pi,$$

  et, $\mathbb{S}$ est la matrice élémentaire de Householder

$$\mathbb{S} = \mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}\|_2}\right)$$

  telle que $\mathbb{S}\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$.

Données : $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$: deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$ non nuls et non colinéaires.
δ : 0 ou 1, permet de déterminer α.

Résultat : $\mathbb{S}$: matrice de Householder ou indentité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
α : nombre complexe , de module $\|\boldsymbol{a}\|_2$ et d'argument $-\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle) + \delta\pi$.

```
Fonction [S, α] ← Householder( a, b, δ )
  ba ← dot(b, a)                                ▷ dot(b, a) : b* a
  Si norm(a − ba ∗ b) < 1e − 15 alors
    S ← eye(n),  α ← 0
  Sinon
    α ← norm(a) ∗ exp(i ∗ (δ ∗ π + arg(ba)))
    u ← a − α ∗ b
    u ← u/norm(u)
    S ← eye(n) − 2 ∗ matprod(u, ctranspose(u))
  Fin Si
Fin Fonction
```

Programme algorithmique vérifiant la fonction Householder:

$$
\begin{aligned}
& n \leftarrow 100 \\
& \boldsymbol{a} \leftarrow \mathrm{vecrand}(n) \\
& \boldsymbol{b} \leftarrow \mathrm{vecrand}(n) \\
& \boldsymbol{b} \leftarrow \boldsymbol{b}/\mathrm{norm}(\boldsymbol{b}, 2) \\
& [\mathbb{H}, \alpha] \leftarrow \mathrm{Householder}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, 0) \\
& \mathrm{error} \leftarrow \mathrm{norm}(\mathbb{H} * \boldsymbol{a} - \alpha * \boldsymbol{b}, 2)
\end{aligned}
$$

$\mathrm{vecrand}(n)$ retourne un vecteur aléatoire de $\mathbb{C}^n$ (loi uniforme $[0, 1]$ sur parties réelles et imaginaires)

$n \leftarrow 100$
$\boldsymbol{a} \leftarrow \text{vecrand}(n)$
$\boldsymbol{b} \leftarrow \boldsymbol{a} + \text{tol} * \text{vecrand}(n)$
$\boldsymbol{b} \leftarrow \boldsymbol{b}/\text{norm}(\boldsymbol{b}, 2)$
$[\mathbb{H}_1, \alpha_1] \leftarrow \text{Householder}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, 1)$
$[\mathbb{H}_0, \alpha_0] \leftarrow \text{Householder}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, 0)$
$\text{error0} \leftarrow \text{norm}(\mathbb{H}_0 * \boldsymbol{a} - \alpha_0 * \boldsymbol{b}, 2)/(1 + \text{abs}(\alpha_0))$
$\text{error1} \leftarrow \text{norm}(\mathbb{H}_1 * \boldsymbol{a} - \alpha_1 * \boldsymbol{b}, 2)/(1 + \text{abs}(\alpha_1))$

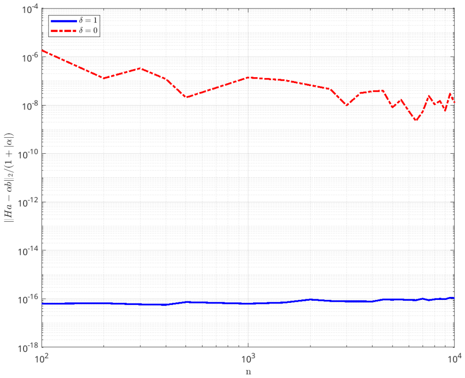


Figure: Choix de δ dans Householder : erreur relative en norme L_2 avec $\text{tol} = 1e-12$

Meilleur choix: $\delta = 1$.

Exercice 11

Soit $n \geqslant 2$.

$(\mathcal{P}_n)$

Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice. Il existe une matrice unitaire $\mathbb{U}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\mathbb{U}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{R}_n. \tag{1}$$

Q. 1 *Démontrer par récurrence que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $(\mathcal{P}_n)$ *est vraie.*

Q. 2 *Soit* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Montrer qu'il existe une matrice unitaire* $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et une matrice triangulaire supérieure* $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *telles que*

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

$(\mathcal{Q}_n)$

Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. Il existe une matrice orthogonale $\mathbb{U}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathbb{U}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{R}_n. \tag{2}$$

Q. 3 *La proposition* $(\mathcal{Q}_n)$ *est-elle vérifiée pour tout* $n \geqslant 2$? *Justifier.*

Q. 4 *Soit* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *Montrer qu'il existe une matrice orthogonale* $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et une matrice triangulaire supérieure* $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que*

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

2. *Montrer qu'il existe une matrice orthogonale* $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et une matrice triangulaire supérieure* $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *à coefficient diagonaux positifs ou nuls telles que*

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

3. *On suppose* $\mathbb{A}$ *inversible. Montrer qu'il existe une unique matrice orthogonale* $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et une unique matrice triangulaire supérieure* $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *à coefficient diagonaux strictement positifs telles que*

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

Théorème : *Factorisation* $\mathbb{QR}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice. Il existe une matrice unitaire $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{QR}. \tag{18}$$

Si $\mathbb{A}$ est réelle alors $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont aussi réelles et l'on peut choisir $\mathbb{Q}$ de telle sorte que les coefficients diagonaux de $\mathbb{R}$ soient positifs. De plus, si $\mathbb{A}$ est inversible alors la factorisation est unique.

Exercice 12

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{C})$ la matrice bloc

$$\mathbb{A} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array}\right) \end{array}.$$

On note $\boldsymbol{v} = \mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^n$ le premier vecteur colonne de $\mathbb{V}$ et on suppose que $\boldsymbol{v}$ est non nul et non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^n$ (premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$).

Q. 1 *Expliciter, en fonction de $\boldsymbol{v}$, le vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$, tel que*

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = \alpha \boldsymbol{e}_1^n, \quad \text{avec } \mathbb{H}(\boldsymbol{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*.$$

Q. 2 *Soient $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$ et $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$. On pose $\boldsymbol{w} = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{x} \\ \hline \boldsymbol{y} \end{array}\right) \in \mathbb{C}^{m+n}$. Déterminer $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})$ en fonction de $\mathbb{H}(\boldsymbol{x})$ et de $\mathbb{H}(\boldsymbol{y})$.*

Q. 3 *On pose $\boldsymbol{w} = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{0}_m \\ \hline \boldsymbol{u} \end{array}\right) \in \mathbb{C}^{m+n}$.*

1. *Déterminer $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A}$ en fonction de $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})$.*
2. *Que peut-on dire de particulier sur le bloc $(2,2)$ de $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A}$?*

Lemme

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{C})$ une matrice bloc

$$\mathbb{A} = \begin{array}{c} \\ m \\ n \end{array} \begin{array}{cc} m & n \\ \multicolumn{2}{c}{\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array}\right)} \end{array}.$$

On pose $\boldsymbol{v} = \mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^n$ le premier vecteur colonne de $\mathbb{V}$, et on suppose qu'il existe $i \in [\![2, n]\!]$ tel que $v_i = \mathbb{V}_{i,1} \neq 0$. Soit $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ le vecteur défini par

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v} - \alpha \boldsymbol{e}_1}{\left\| \boldsymbol{v} - \alpha \boldsymbol{e}_1^n \right\|} \text{ avec } \alpha = -\left\| \boldsymbol{v} \right\|_2 e^{\imath \arg(v_1)}$$

où $\boldsymbol{e}_1$ est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

En notant $\boldsymbol{w} = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{0}_m \\ \hline \boldsymbol{u} \end{array}\right) \in \mathbb{C}^{m+n}$, on a alors

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{E} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{V} \end{array}\right) \text{ avec } \mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{V} = \left[\begin{array}{c|ccc} \alpha & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right].$$

Exercice 13

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1 *Expliquer comment construire une matrice $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, produit d'au plus $n-1$ matrices élémentaires de Householder, et, $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire supérieure telles $\mathbb{H}\mathbb{A} = \mathbb{R}$.*

Q. 2 *Ecrire une fonction* FactQR *permettant de calculer la factorisation $\mathbb{Q}\mathbb{R}$ d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*
On pourra utiliser la fonction Householder *(voir Exercice* **??**, *page* **??***).*

Q. 3 *Ecrire un programme permettant de tester cette fonction. On dispose des fonctions:*

- MatRand(m, n) *retournant une matrice aléatoire de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ chacune des parties imaginaires et réelles de ses éléments étant une variable aléatoire suivant la loi uniforme* $[0, 1]$.
- NormInf$(\mathbb{A})$ *retournant la norme infinie d'une matrice carrée $\mathbb{A}$.*

Objectif: transformer $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(C)$ en une matrice triangulaire supérieure à l'aide de $(n-1)$ matrices unitaires $\left(\mathbb{H}^{[j]}\right)_{j=1}^{n-1}$.

$$\forall j \in [\![1, n-1]\!],\ \mathbb{A}^{[j]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[j]}\mathbb{A}^{[j-1]},\quad \text{avec } \mathbb{A}^{[0]} = \mathbb{A}.$$

pour avoir

$$\mathbb{A}^{[n-1]} = \mathbb{H}^{[n-1]} \dots \mathbb{H}^{[1]}\mathbb{A} \ \text{ triangulaire supérieure.}$$

Etape 1,

$$\mathbb{A}^{[0]} = \begin{pmatrix} \overset{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n}{\boxed{\begin{matrix} A_{1,1} \\ A_{2,1} \\ \vdots \\ A_{n,1} \end{matrix}}} & \begin{matrix} A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,2} & \cdots & A_{n,n} \end{matrix} \end{pmatrix} \hookrightarrow \mathbb{A}^{[1]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H}_1\mathbb{A}^{[0]} = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right).$$

- Si

Etape j,

$$\mathbb{A}^{[j-1]} = \begin{array}{c} \\ j-1 \\ \\ n-(j-1) \end{array} \overset{\hphantom{xx}j-1\hphantom{xxxxxxxx}n-(j-1)}{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{j-1} & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \underbrace{\bullet}_{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^{n-(j-1)}} & \cdots & \bullet \end{pmatrix}} \hookrightarrow \mathbb{A}^{[j]} = \mathbb{H}^{[j]} \mathbb{A}^{[j-1]} = \begin{array}{c} \\ j-1 \\ \\ n-(j-1) \end{array} \overset{\hphantom{xx}j-1\hphantom{xxxxxxxx}n-(j-1)}{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{j-1} & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_j & \bullet \cdots & \bullet \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \bullet & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \underbrace{0}_{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^{n-(j-1)}} & \bullet \cdots & \bullet \end{pmatrix}}$$