Exercice 11

Soit $n \geqslant 2$.

$(\mathcal{P}_n)$

Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice. Il existe une matrice unitaire $\mathbb{U}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\mathbb{U}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{R}_n. \tag{P-1}$$

Q. 1 *Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $(\mathcal{P}_n)$ est vraie.*

R. 1

- **Initialisation** : on va montrer que $(\mathcal{P}_2)$ est vraie
  Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On note $\boldsymbol{a} = \mathbb{A}_{:,1}$ (première colonne de $\mathbb{A}$) et $\mathbb{b} = (1,0)^{\mathtt{t}}$.

  - Si $\boldsymbol{a} \neq 0$ et si $\boldsymbol{a}$ non colinéaire à $\boldsymbol{b}$, on est sous les conditions du théorème 2.15. On défini alors $\alpha \in \mathbb{C}$ $|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2$ et $\arg\alpha = -\arg\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle + \delta\pi$ (choix $\delta = 1$ préférable) Dans ce cas on a

    $$\mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}\|_2}\right)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}.$$

    On pose $\mathbb{U} = \mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}\|_2}\right)$ qui est une matrice unitaire.
  - Si $\boldsymbol{a} = 0$ ou si $\boldsymbol{a}$ est colinéaire à $\boldsymbol{b}$, alors $\boldsymbol{a}_2 = \mathbb{A}_{2,1} = 0$ et on pose $\mathbb{U} = \mathbb{I}$, qui est unitaire, et $\alpha = \pm\boldsymbol{a}_1 (= \pm\mathbb{A}_{1,1})$.

  Dans les 2 cas, on obtient

  $$\mathbb{U}\mathbb{A} = \mathbb{U}\left(\,\mathbb{A}_{:,1}\,\middle|\,\mathbb{A}_{:,2}\,\right) = \left(\,\mathbb{U}\mathbb{A}_{:,1}\,\middle|\,\mathbb{U}\mathbb{A}_{:,2}\,\right) = \left(\,\alpha\boldsymbol{b}\,\middle|\,\mathbb{U}\mathbb{A}_{:,2}\,\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & \mathbb{U}\mathbb{A}_{:,2} \\ 0 & \end{array}\right) = \mathbb{R}$$

  où $\mathbb{R}$ est triangulaire supérieure et la matrice $\mathbb{U}$ est soit l'indentité, soit une matrice élémentaire de Housholder.

- **Hérédité** : soit $n \geqslant 2$, on suppose que $(\mathcal{P}_{n-1})$ est vérifiée, on va alors montrer que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie.
  Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\boldsymbol{a} = \mathbb{A}_{:,1} \in \mathbb{C}^n$ (première colonne de $\mathbb{A}$) et $\mathbb{b} = \boldsymbol{e}_1$, premier vecteur de la base canonique $(\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{b}_i = \delta_{1,i})$.

  - Si $\boldsymbol{a} \neq 0$ et si $\boldsymbol{a}$ non colinéaire à $\boldsymbol{b}$, on est sous les conditions du théorème 2.15. On défini alors $\alpha \in \mathbb{C}$ $|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2$ et $\arg\alpha = -\arg\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + \delta\pi$ (choix $\delta = 1$ préférable) Dans ce cas on a

  $$\mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}\|_2}\right)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}.$$

    On pose $\mathbb{H} = \mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}\|_2}\right)$ qui est une matrice unitaire.
  - Si $\boldsymbol{a} = 0$ ou si $\boldsymbol{a}$ est colinéaire à $\boldsymbol{b}$, alors $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $\boldsymbol{a}_i = \mathbb{A}_{i,1} = 0$. On pose $\mathbb{H} = \mathbb{I}$, qui est unitaire, et $\alpha = \pm\boldsymbol{a}_1 (= \pm\mathbb{A}_{1,1})$.

  Dans les 2 cas, on obtient

  $$\begin{aligned} \mathbb{H}\mathbb{A} &= \mathbb{H}\big(\ \mathbb{A}_{:,1}\ \big|\ \mathbb{A}_{:,2}\ \big|\ \dots\ \big|\ \mathbb{A}_{:,n}\ \big) = \big(\ \mathbb{H}\mathbb{A}_{:,1}\ \big|\ \mathbb{H}\mathbb{A}_{:,2}\ \big|\ \dots\ \big|\ \mathbb{H}\mathbb{A}_{:,n}\ \big) \\ &= \big(\ \alpha\boldsymbol{e}_1\ \big|\ \mathbb{H}\mathbb{A}_{:,2}\ \big|\ \dots\ \big|\ \mathbb{H}\mathbb{A}_{:,n}\ \big) \end{aligned}$$

  On en déduit que $\mathbb{H}\mathbb{A}$ s'écrit aussi sous la forme

  $$\mathbb{H}\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \bullet & \dots & \bullet \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{A}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

  où $\mathbb{A}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. On peut donc appliquer à $\mathbb{A}_{n-1}$ l'hypothèse de récurrence: $\exists \mathbb{U}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ unitaire et $\exists \mathbb{R}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telles que

  $$\mathbb{U}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1} = \mathbb{R}_{n-1}.$$

On défini alors

$$\mathbb{U} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

On a

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1}^* & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1}\mathbb{U}_{n-1}^* & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Comme $\mathbb{U}_{n-1}$ est unitaire, on en déduit que $\mathbb{U}$ est aussi unitaire. On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{U}(\mathbb{H}\mathbb{A}) &= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \bullet & \dots & \bullet \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{A}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \bullet & \dots & \bullet \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \bullet & \dots & \bullet \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{R}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{R}_{n-1}$ est triangulaire supérieure, on en déduit que $\mathbb{R}_n$ est aussi triangulaire supérieure. On pose $\mathbb{U}_n = \mathbb{U}\mathbb{H}$. Cette matrice est unitaire, car produit de deux matrices unitaires, et on a

$$\mathbb{U}_n\mathbb{A} = \mathbb{R}_n.$$

La proposition $(\mathcal{P}_n)$ est donc vérifiée.

- **Conclusion** : on vient de démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $(\mathcal{P}_n)$ est vraie.

Q. 2 *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une matrice unitaire $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que*

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

R. 2 D'après la proposition $(\mathcal{P}_n)$, Il existe une matrice unitaire $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\mathbb{U}\mathbb{A} = \mathbb{R}.$$

Comme $\mathbb{U}$ est unitaire, on a $\mathbb{U}^* = \mathbb{U}^{-1}$ et donc

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}^*\mathbb{R}.$$

En posant $\mathbb{Q} = \mathbb{U}^*$, qui est unitaire, on obtient le résultat demandé.

$(\mathcal{Q}_n)$

Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. Il existe une matrice orthogonale $\mathbb{U}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathbb{U}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{R}_n. \tag{P-2}$$

Q. 3 *La proposition $(\mathcal{Q}_n)$ est-elle vérifiée pour tout $n \geqslant 2$? Justifier.*

R. 3 La proposition $(\mathcal{Q}_n)$ est toujours vérifiée. En effet, en reprenant la démonstration par récurrence dans le cas complexe, on peut noter que toutes les matrices sont réelles y compris les matrices de Householder utilisées car les coefficients α sont nécessairement réels ($\arg\alpha = -\arg\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + \delta\pi = \delta\pi$), et Les matrices unitaires réelles sont orthogonales.

Q. 4 *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

a. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

b. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et une matrice triangulaire supérieure* $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *à coefficient diagonaux positifs ou nuls telles que*

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

c. On suppose $\mathbb{A}$ *inversible. Montrer qu'il existe une unique matrice orthogonale* $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et une unique matrice triangulaire supérieure* $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *à coefficient diagonaux strictement positifs telles que*

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

R. 4

a. D'après la proposition $(\mathcal{Q}_n)$, Il existe une matrice orthogonale $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathbb{U}\mathbb{A} = \mathbb{R}.$$

Comme $\mathbb{U}$ est orthogonale, on a $\mathbb{U}^{\mathsf{t}} = \mathbb{U}^{-1}$ et donc

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}^{\mathsf{t}}\mathbb{R}.$$

En posant $\mathbb{Q} = \mathbb{U}^{\mathsf{t}}$, qui est orthogonale, on obtient le résultat demandé.

b. D'après la proposition $(\mathcal{Q}_n)$, Il existe une matrice orthogonale $\widetilde{\mathbb{U}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\widetilde{\mathbb{R}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\widetilde{\mathbb{U}}\mathbb{A} = \widetilde{\mathbb{R}}.$$

Soit S l'application telle que $S(x) = -1$, si $x < 0$ et $S(x) = +1$, si $x \geqslant 0$. Soit $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice diagonale telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{D}_{i,i} = S(\widetilde{\mathbb{R}}_{i,i})$. Cette matrice est orthogonale.

On a alors

$$\mathbb{D}\widetilde{\mathbb{U}}\mathbb{A} = \mathbb{D}\widetilde{\mathbb{R}}.$$

On pose $\mathbb{U} = \mathbb{D}\widetilde{\mathbb{U}}$ et $\mathbb{R} = \mathbb{D}\widetilde{\mathbb{R}}$. Comme le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale, la matrice $\mathbb{U}$ est orthogonale. La matrice $\mathbb{R}$ est triangulaire supérieure car le produit d'une matrice diagonale par une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire supérieure. De plus, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\mathbb{R}_{i,i} = \mathbb{D}_{i,i}\widetilde{\mathbb{R}}_{i,i} = S(\widetilde{\mathbb{R}}_{i,i})\widetilde{\mathbb{R}}_{i,i} = |\widetilde{\mathbb{R}}_{i,i}| \geqslant 0.$$

En posant $\mathbb{Q} = \mathbb{U}^{\mathsf{t}}$, on obtient le résultat souhaité.

c. On vient de démontrer, en **Q. 4** b., qu'il l existe une matrice orthogonale $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficient diagonaux positifs ou nuls telles que $\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}$.
Comme $\mathbb{A}$ inversible, on a

$$\det(\mathbb{A}) = \det(\mathbb{Q})\det(\mathbb{R}) \neq 0.$$

On en déduit que $\det(\mathbb{R}) \neq 0$. De plus, $\mathbb{R}$ étant triangulaire supérieure, on obtient

$$\det(\mathbb{R}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{R}_{i,i} \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{R}_{i,i} \neq 0.$$

et donc, tous les coefficient diagonaux de $\mathbb{R}$ sont strictement positifs.

Pour montrer l'unicité d'une telle factorisation, on note $\mathbb{Q}_1$, $\mathbb{Q}_2$, deux matrices orthogonales et $\mathbb{R}_1$, $\mathbb{R}_2$, deux matrices triangulaires à coefficients diagonaux strictements positifs telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}_1\mathbb{R}_1 = \mathbb{Q}_2\mathbb{R}_2.$$

On a alors

$$\mathbb{I} = \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{Q}_1\mathbb{R}_1\left(\mathbb{Q}_2\mathbb{R}_2\right)^{-1} = \mathbb{Q}_1\mathbb{R}_1\mathbb{R}_2^{-1}\mathbb{Q}_2^{-1}$$

et donc

$$\mathbb{Q}_1^{-1}\mathbb{Q}_2 = \mathbb{R}_1\mathbb{R}_2^{-1} \stackrel{\mathsf{def}}{=} \mathbb{T}.$$

Comme $\mathbb{Q}_1$ est orthogonale on a $\mathbb{T} = \mathbb{Q}_1^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_2$ et

$$\mathbb{T}^{\mathsf{t}}\mathbb{T} = (\mathbb{Q}_1^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_2)^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_1^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_2 = \mathbb{Q}_2^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_1\mathbb{Q}_1^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_2 = \mathbb{I}.$$

La matrice $\mathbb{T}$ est donc orthogonal. De plus $\mathbb{T} = \mathbb{R}_1\mathbb{R}_2^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs puisque produit de triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. La matrice $\mathbb{I}$ étant symétrique définie positive, d'après le Théorème 3.15(factorisation positive de Cholesky) il existe une unique matrice $\mathbb{L}$ triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $\mathbb{L}\mathbb{L}^t = \mathbb{I}$. Cette matrice $\mathbb{L}$ est évidemment la matrice identité. On en déduit que $\mathbb{T} = \mathbb{L}^t = \mathbb{I}$ et donc $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q}_2$ et $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R}_2$.