Exercice 10

Soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^n$ non nul et non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1$, premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
Montrer qu'il existe $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = -\left\|\boldsymbol{a}\right\|_2 e^{\imath \arg(a_1)}\boldsymbol{e}_1. \tag{P-1}$$

Correction Avec $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1$, on est sous les conditions du théorème 2.15. On défini alors $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

$$|\alpha| = \left\|\boldsymbol{a}\right\|_2 \quad \text{et} \quad \arg\alpha = -\arg\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle + \delta\pi, \quad \text{avec } \delta \in [\![0,1]\!].$$

On a donc

$$\arg\alpha = -\arg(\overline{a_1}) + \delta\pi = \arg(a_1) + \delta\pi.$$

le choix $\delta = 1$ étant numériquement préférable (voir Exercice ...) Le théorème permet alors d'affirmer que

$$\mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}}{\left\|\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}\right\|_2}\right)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}.$$

Or , on a

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b} &= \boldsymbol{a} - |\alpha| e^{\imath \arg(\alpha)}\boldsymbol{e}_1 \\ &= \boldsymbol{a} - \left\|\boldsymbol{a}\right\|_2 e^{\imath(\arg(a_1)+\delta\pi)}\boldsymbol{e}_1\end{aligned}$$

Avec le choix $\delta = 1$, on obtient

$$\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \left\|\boldsymbol{a}\right\|_2 e^{\imath \arg(a_1)}\boldsymbol{e}_1.$$

On obtient alors

$$\mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} + \left\|\boldsymbol{a}\right\|_2 e^{\imath \arg(a_1)}\boldsymbol{e}_1}{\left\|\boldsymbol{a} + \left\|\boldsymbol{a}\right\|_2 e^{\imath \arg(a_1)}\boldsymbol{e}_1\right\|_2}\right)\boldsymbol{a} = -\left\|\boldsymbol{a}\right\|_2 e^{\imath \arg(a_1)}\boldsymbol{e}_1$$

◇