Théorème. *Soient* $\mathbb{A}$ *et* $\mathbb{A}+\Delta\mathbb{A}$ *deux matrices inversibles. Soient* $\boldsymbol{x}$ *et* $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x}$ *les solutions respectives de*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \;\; et \;\; (\mathbb{A}+\Delta\mathbb{A})\,(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x})=\boldsymbol{b}.$$

Supposons $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$, *alors on a*

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x}\|}\leqslant \operatorname{cond}(\mathbb{A})\frac{\|\Delta\mathbb{A}\|}{\|\mathbb{A}\|}.$$

Proof. On a

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}=(\mathbb{A}+\Delta\mathbb{A})\,(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x})=\mathbb{A}\boldsymbol{x}+\mathbb{A}\boldsymbol{\Delta x}+\Delta\mathbb{A}\,(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x})$$

et donc

$$\mathbb{A}\boldsymbol{\Delta x}+\Delta\mathbb{A}\,(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x})=\mathbf{0}\iff \boldsymbol{\Delta x}=-\mathbb{A}^{-1}\Delta\mathbb{A}\,(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x})$$

On en déduit alors

$$\|\boldsymbol{\Delta x}\|=\left\|\mathbb{A}^{-1}\Delta\mathbb{A}\,(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x})\right\|\leqslant\left\|\mathbb{A}^{-1}\right\|\|\Delta\mathbb{A}\,(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x})\|\leqslant\left\|\mathbb{A}^{-1}\right\|\|\Delta\mathbb{A}\|\,\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x}\|$$

De plus, on a $\operatorname{cond}(\mathbb{A})\stackrel{\text{def}}{=}\|\mathbb{A}\|\left\|\mathbb{A}^{-1}\right\|$ et donc $\left\|\mathbb{A}^{-1}\right\|=\frac{\operatorname{cond}(\mathbb{A})}{\|\mathbb{A}\|}$ ce qui donne

$$\|\boldsymbol{\Delta x}\|\leqslant\operatorname{cond}(\mathbb{A})\frac{\|\Delta\mathbb{A}\|}{\|\mathbb{A}\|}\,\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x}\|\,.$$

Comme $\boldsymbol{b}\neq 0$, on a $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x}=(\mathbb{A}+\Delta\mathbb{A})^{-1}\boldsymbol{b}\neq 0$ et de l'inégalité précédente, on déduit alors

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x}\|}\leqslant\operatorname{cond}(\mathbb{A})\frac{\|\Delta\mathbb{A}\|}{\|\mathbb{A}\|}.$$

□