Exercice 3

Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ avec $v_1 \neq 0$. On note $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice triangulaire inférieure à diagonale unité définie par

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} = \left(\begin{array}{c:cccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hdashline -v_2/v_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -v_n/v_1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{P-1}$$

Q. 1

a. Calculer le déterminant de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$.

b. Déterminer l'inverse de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$.

R. 1

a. La matrice $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$ est triangulaire : son déterminant est donc le produit de ses éléments diagonaux (Proposition 2.35 de [?]) On a alors $\det(\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}) = 1$.

b. Pour calculer son inverse qui existe puisque $\det(\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}) \neq 0$, on écrit $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$ sous forme bloc :

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} = \left(\begin{array}{c:ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline & & & \\ \boldsymbol{e} & & \mathbb{I}_{n-1} & \\ & & & \end{array}\right)$$

avec $\boldsymbol{e} = (-v_2/v_1, \dots, -v_n/v_1)^{\mathsf{t}} \in \mathbb{C}^{n-1}$ On note $\mathbb{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son inverse qui s'écrit avec la même structure bloc

$$\mathbb{X} = \left(\begin{array}{c:c} a & \boldsymbol{b}^* \\ \hdashline & \\ \boldsymbol{c} & \mathbb{D} \\ & \end{array}\right)$$

avec $a \in \mathbb{C}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^{n-1}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$.
La matrice $\mathbb{X}$ est donc solution de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\mathbb{X} = \mathbb{I}$. Grace à l'écriture bloc des matrices on en déduit rapidement la matrice $\mathbb{X}$. En effet, en utilisant les produits blocs des matrices, on obtient

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\mathbb{X} = \left(\begin{array}{c:c} 1 & \mathbf{0}^{\mathsf{t}}_{n-1} \\ \hdashline \boldsymbol{e} & \mathbb{I}_{n-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:c} a & \boldsymbol{b}^* \\ \hdashline \boldsymbol{c} & \mathbb{D} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} 1 \times a & 1 \times \boldsymbol{b}^* + \mathbf{0}^{\mathsf{t}}_{n-1} \times \mathbb{D} \\ \hdashline \boldsymbol{e} \times a + \mathbb{I}_{n-1} \times \boldsymbol{c} & \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{b}^* + \mathbb{I}_{n-1} \times \mathbb{D} \end{array}\right)$$
$$= \left(\begin{array}{c:c} a & \boldsymbol{b}^* \\ \hdashline a\boldsymbol{e} + \boldsymbol{c} & \boldsymbol{e}\boldsymbol{b}^* + \mathbb{D} \end{array}\right)$$

Comme $\mathbb{X}$ est l'inverse de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$, on a $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\mathbb{X} = \mathbb{I}$ et donc en écriture bloc

$$\left(\begin{array}{c:c} a & \boldsymbol{b}^* \\ \hdashline a\boldsymbol{e} + \boldsymbol{c} & \boldsymbol{e}\boldsymbol{b}^* + \mathbb{D} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} 1 & \mathbf{0}^{\mathsf{t}}_{n-1} \\ \hdashline \mathbf{0}_{n-1} & \mathbb{I}_{n-1} \end{array}\right).$$

Ceci revient à résoudre les 4 équations

$$a = 1, \quad \boldsymbol{b}^* = \mathbf{0}^{\mathsf{t}}_{n-1}, \quad a\boldsymbol{e} + \boldsymbol{c} = \mathbf{0}_{n-1} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{e}\boldsymbol{b}^* + \mathbb{D} = \mathbb{I}_{n-1}$$

qui donnent immédiatement $a = 1$, $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}_{n-1}$, $\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{e}$ et $\mathbb{D} = \mathbb{I}_{n-1}$. On obtient le résultat suivant

$$\left(\begin{array}{c:ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline -\boldsymbol{e} & & \mathbb{I}_{n-1} & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline \boldsymbol{e} & & \mathbb{I}_{n-1} & \end{array}\right) = \mathbb{I}_n.$$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $A_{1,1} \neq 0$. On note $\boldsymbol{A}_{:,j}$ le j-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{A}_{i,:}$ son i-ème vecteur ligne. On pose $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_{:,1}$.

Q. 2

a. Calculer $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}\mathbb{A}$ en fonction des vecteurs lignes de $\mathbb{A}$.

b. Montrer que la première colonne de $\tilde{\mathbb{A}}$ est le vecteur $(A_{1,1}, 0, \ldots, 0)^t$ i.e.

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = A_{1,1}\boldsymbol{e}_1 \tag{P-2}$$

où $\boldsymbol{e}_1$ est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

R. 2

a. Pour simplifier les notations, on note $\mathbb{E} = \mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}$. Par définition du produit de deux matrices on a

$$\tilde{A}_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} E_{i,k}A_{k,j}, \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2.$$

Quand $i = 1$, on a par construction $E_{1,k} = \delta_{1,k}$ et donc

$$\tilde{A}_{1,j} = A_{1,j}, \ \forall j \in [\![1,n]\!] \iff \tilde{\boldsymbol{A}}_{1,:} = \boldsymbol{A}_{1,:}. \tag{R3.1}$$

Pour $i \geqslant 2$, on a $E_{i,1} = -\frac{v_i}{v_1}$ et $E_{i,k} = \delta_{i,k}$, $\forall k \in [\![2,n]\!]$. On obtient alors pour tout $j \in [\![1,n]\!]$

$$\tilde{A}_{i,j} = E_{i,1}A_{1,j} + \sum_{k=2}^{n} E_{i,k}A_{k,j} = -\frac{v_i}{v_1}A_{1,j} + \sum_{k=2}^{n} \delta_{i,k}A_{k,j} = -\frac{v_i}{v_1}A_{1,j} + A_{i,j}$$

ce qui donne pour tout $i \in [\![2,n]\!]$

$$\tilde{A}_{i,j} = A_{i,j} - \frac{v_i}{v_1}A_{1,j}, \ \forall j \in [\![1,n]\!] \iff \tilde{\boldsymbol{A}}_{i,:} = -\frac{v_i}{v_1}\boldsymbol{A}_{1,:} + \boldsymbol{A}_{i,:} \tag{R3.2}$$

En conclusion, la matrice $\tilde{\mathbb{A}}$ s'écrit

$$\tilde{\mathbb{A}} = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{A}_{1,:} \\ \hdashline \boldsymbol{A}_{2,:} - (v_2/v_1)\boldsymbol{A}_{1,:} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \boldsymbol{A}_{n,:} - (v_n/v_1)\boldsymbol{A}_{1,:} \end{array}\right)$$

b. De (R3.1), on tire $\tilde{A}_{1,1} = A_{1,1}$. A partir de (R3.2) on obtient pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $\tilde{A}_{i,1} = A_{i,1} - \frac{v_i}{v_1} A_{1,1}$. Par construction $v_j = A_{j,1}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, ce qui donne $\tilde{A}_{i,1} = 0$.
La première colonne de $\tilde{\mathbb{A}}$ est $(1, 0, \ldots, 0)^{\mathtt{t}}$.