Exercice 9

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$. On va chercher $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$, vérifiant

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}. \tag{P-1}$$

Q. 1 *Montrer que si α et $\boldsymbol{u}$ vérifient* (P-1) *alors*

a. on a

$$|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2 \tag{P-2}$$

b. on a

$$\boldsymbol{a} - 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\rangle \boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{b} \tag{P-3}$$

c. on en déduit que

$$|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\rangle|^2 = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle}{2} \tag{P-4}$$

R. 1 Par la suite, on pose $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\boldsymbol{u})$ pour alléger les notations.

a. On a

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{a}\|_2^2 = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle &= \langle \mathbb{H}^*\mathbb{H}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle \quad \text{car } \mathbb{H} \text{ unitaire} \\
&= \langle \mathbb{H}\boldsymbol{a}, \mathbb{H}\boldsymbol{a}\rangle \quad \text{par définition du produit scalaire} \\
&= \|\mathbb{H}\boldsymbol{a}\|_2^2 = \|\alpha\boldsymbol{b}\|_2^2 = |\alpha|^2 \|\boldsymbol{b}\|_2^2 = |\alpha|^2.
\end{aligned}$$

b. Pour établir (P-3), on écrit

$$\begin{aligned}\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b} &\iff (\mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}\\ &\iff \boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{a}) = \alpha\boldsymbol{b}\\ &\iff \boldsymbol{a} - 2\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{a}\rangle\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

c. En effectuant le produit scalaire (à gauche) avec $\boldsymbol{a}$ de (P-3), on obtient

$$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle - 2\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{a}\rangle\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle = \alpha\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$$

ce qui prouve (P-4).

Nous allons maintenant établir une condition pour que (P-4) ait un sens.

Q. 2

On suppose que $\arg\alpha = -\arg(\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle)\ [\pi]$

a. *Montrer que* $\alpha\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \in \mathbb{R}$.

b. *Montrer que* $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \in \mathbb{R}^{*+}$.

R. 2

a. On a par définition de l'argument $\alpha = |\alpha|e^{\imath\arg\alpha}$ et $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = |\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle|e^{\imath\arg(\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle)}$ ce qui donne

$$\alpha\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = |\alpha||\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle|e^{\imath(\arg\alpha+\arg(\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle))} \tag{R9.1}$$

et donc $\alpha\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ est réel si $\arg\alpha + \arg(\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle) = 0\ [\pi]$.

b. On vient de demontrer que $\alpha\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \in \mathbb{R}$ et donc $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \in \mathbb{R}$. Il reste donc à montrer que $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle > 0$.

- Si $\arg\alpha = -\arg(\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle) + \pi\ [2\pi]$, alors de (R9.1) on obtient $\alpha\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \leqslant 0$ et donc $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \geqslant \|\boldsymbol{a}\|_2 > 0$ car $\boldsymbol{a} \neq 0$.

- Si $\arg\alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle)\ [2\pi]$, alors de (R9.1) on obtient $\alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \geqslant 0$.
  Comme les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ ne sont pas colinéaires, on a inégalité stricte dans Cauchy-Schwarz :

  $$|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle| < \|\boldsymbol{a}\|_2 \|\boldsymbol{b}\|_2 = \|\boldsymbol{a}\|_2\,.$$

  On obtient donc

  $$0 \leqslant \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \leqslant |\alpha||\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle| < |\alpha|\,\|\boldsymbol{a}\|_2 = \|\boldsymbol{a}\|_2^2$$

  Attention, dans ce cas $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ peut-être très petit.

Q. 3 *Soient α et $\boldsymbol{u}$ vérifiant* (P-1). *En déduire que si* $\arg\alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle)\ [\pi]$ *alors $\boldsymbol{u}$ est donné par*

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\rangle}(\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}). \tag{P-5}$$

et $\|u\|_2 = 1$.

R. 3 On peut noter que $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\rangle \neq 0$ car sinon, d'après (P-3), $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$ or par hypothèse $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont non colinéaires. On obtient alors immédiatement (P-5) à partir de (P-3)
Vérifions que $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$. On a

$$\|\boldsymbol{u}\|_2^2 = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle = \frac{1}{4|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\rangle|^2}\langle \boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}\rangle$$

En utilisant (P-4), on obtient

$$\begin{aligned} 4|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\rangle|^2 &= 2(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle) \\ &= 2\,\|\boldsymbol{a}\|_2^2 - 2\alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \end{aligned}$$

De plus, on a

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b} \rangle &= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle - \overline{\alpha} \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle - \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + |\alpha|^2 \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle = \|\boldsymbol{a}\|_2^2 - \overline{\alpha} \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle - \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + |\alpha|^2 \\
&= 2 \|\boldsymbol{a}\|_2^2 - \overline{\alpha} \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle - \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \\
&= 2 \|\boldsymbol{a}\|_2^2 - 2\alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \quad \text{car } \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \overline{(\alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle)} = \overline{\alpha} \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

On en déduit donc que $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$.