

Théorème. Soit \mathbb{A} une matrice inversible. Soient \mathbf{x} et $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ les solutions respectives de

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{et} \quad \mathbb{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}.$$

Supposons $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, alors l'inégalité

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \text{cond}(\mathbb{A}) \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

est satisfaite, et c'est la meilleure possible : pour une matrice \mathbb{A} donnée, on peut trouver des vecteurs $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ et $\Delta\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ tels qu'elle devienne une égalité.

Proof. On a

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{et} \quad \mathbb{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$$

or $\mathbb{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbb{A}\mathbf{x} + \mathbb{A}\Delta\mathbf{x}$ et donc $\mathbb{A}\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{b}$ ou encore $\Delta\mathbf{x} = \mathbb{A}^{-1}\Delta\mathbf{b}$. Ceci donne

$$\|\Delta\mathbf{x}\| = \|\mathbb{A}^{-1}\Delta\mathbf{b}\| \leq \|\mathbb{A}^{-1}\| \|\Delta\mathbf{b}\|$$

et

$$\|\mathbf{b}\| = \|\mathbb{A}\mathbf{x}\| \leq \|\mathbb{A}\| \|\mathbf{x}\|.$$

On en déduit

$$\|\Delta\mathbf{x}\| \|\mathbf{b}\| \leq \|\mathbb{A}\| \|\mathbf{x}\| \|\mathbb{A}^{-1}\| \|\Delta\mathbf{b}\|.$$

Comme $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, on a $\mathbf{x} = \mathbb{A}^{-1}\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ et, les normes étant positives, on obtient

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \text{cond}(\mathbb{A}) \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

D'après la Proposition ??, pour toute norme matricielle subordonnée il existe au moins un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ et un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que

$$\|\mathbb{A}^{-1}\mathbf{u}\| = \|\mathbb{A}^{-1}\| \|\mathbf{u}\| \quad \text{et} \quad \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| = \|\mathbb{A}\| \|\mathbf{v}\|.$$

En posant $\mathbf{b} = \mathbb{A}\mathbf{v}$ et $\Delta\mathbf{b} = \mathbf{u}$ on a bien égalité. □

