# Analyse Numérique I

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 1ère année / L3 MIM

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2024/10/16



# Chapitre IV

## Résolution de systèmes linéaires



## Plan





Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$.

Résoudre

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Le calcul de la matrice inverse $\mathbb{A}^{-1}$ revient à résoudre $n$ systèmes linéaires.

⚠ Pour résoudre un système linéaire, on ne calcule pas la matrice inverse associée.

- **Méthodes directes :** On cherche $\mathbb{M}$ inversible tel que $\mathbb{MA}$ *facilement* inversible

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \mathbb{MA}\boldsymbol{x} = \mathbb{M}\boldsymbol{b}.$$

- **Méthodes itératives :** On cherche $\mathbb{B}$ et $\boldsymbol{c}$,

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{c}, \quad k \geqslant 0, \ \boldsymbol{x}^{[0]} \text{ donné}$$

en espérant $\lim_{k \to +\infty} \boldsymbol{x}^{[k]} = \boldsymbol{x}$.

## Conditionnement

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$.

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

De petites erreurs sur les données engendrent-elles de petites erreurs sur la solution?



## Exemple de R.S. Wilson

Soient

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad \Delta\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{25} & \frac{1}{25} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{50} & -\frac{11}{100} & 0 \\ -\frac{1}{100} & -\frac{1}{100} & 0 & -\frac{1}{50} \end{pmatrix}$$

et $\boldsymbol{b}^{\mathrm{t}} = (32,\, 23,\, 33,\, 31)$, $(\boldsymbol{\Delta b})^{\mathrm{t}} = \left(\frac{1}{100}, -\frac{1}{100}, \frac{1}{100}, -\frac{1}{100}\right)$. Des calculs exacts donnent

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad &\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} = (1,\, 1,\, 1,\, 1) \\
\mathbb{A}\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{\Delta b}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{u}^{\mathrm{t}} = \left(\frac{91}{50}, -\frac{9}{25}, \frac{27}{20}, \frac{79}{100}\right) \\
&\qquad\quad \approx (1.8,\, -0.36,\, 1.3,\, 0.79) \\
(\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} \quad &\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{v}^{\mathrm{t}} = (-81,\, 137,\, -34,\, 22) \\
(\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A})\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{\Delta b}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{y}^{\mathrm{t}} = \left(-\frac{18283543}{461600}, \frac{31504261}{461600}, -\frac{3741501}{230800}, \frac{5235241}{461600}\right) \\
&\qquad\quad \approx (-39.61,\, 68.25,\, -16.21,\, 11.34)
\end{aligned}$$



Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$.

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

De petites erreurs sur les données engendrent-elles de petites erreurs sur la solution?

Non, pas forcément!

Le système linéaire prédédent est **mal conditionné**.
On dit qu'un système linéaire est **bien conditionné** ou qu'il a un **bon conditionnement** si de petites perturbations des données n'entrainent qu'une variation *raisonnable* de la solution.

Est-il possible de "mesurer" le **conditionnement** d'une matrice?



**Definition**

Soit $\|.\|$ une norme matricielle subordonnée, le conditionnement d'une matrice régulière $\mathbb{A}$, associé à cette norme, est le nombre

$$\mathrm{cond}(\mathbb{A}) = \|\mathbb{A}\| \left\|\mathbb{A}^{-1}\right\|.$$

Nous noterons $\mathrm{cond}_p(\mathbb{A}) = \|\mathbb{A}\|_p \left\|\mathbb{A}^{-1}\right\|_p$.

**Proposition :**

Soit $\mathbb{A}$ une matrice régulière. On a les propriétés suivantes

1. $\forall \alpha \in \mathbb{K}^*$, $\mathrm{cond}(\alpha\mathbb{A}) = \mathrm{cond}(\mathbb{A})$.
2. $\mathrm{cond}_p(\mathbb{A}) \geqslant 1$, $\forall p \in [\![1, +\infty]\!]$.
3. $\mathrm{cond}_2(\mathbb{A}) = 1$ si et seulement si $\mathbb{A} = \alpha\mathbb{Q}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $\mathbb{Q}$ matrice unitaire



**Théorème :**

Soit $\mathbb{A}$ une matrice inversible. Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}$ les solutions respectives de

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \text{et} \quad \mathbb{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\Delta b}.$$

Supposons $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, alors l'inégalité

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leqslant \mathrm{cond}(\mathbb{A}) \frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

est satisfaite, et c'est la meilleure possible : pour une matrice $\mathbb{A}$ donnée, on peut trouver des vecteurs $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{\Delta b} \neq \boldsymbol{0}$ tels qu'elle devienne une égalité.



**Théorème :**

Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A}$ deux matrices inversibles. Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}$ les solutions respectives de

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ et } (\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A})(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}) = \boldsymbol{b}.$$

Supposons $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, alors on a

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}\|} \leqslant \mathrm{cond}(\mathbb{A}) \frac{\|\Delta\mathbb{A}\|}{\|\mathbb{A}\|}.$$

**Remarque 1.1**

Une matrice est donc **bien conditionnée** si son conditionnement est proche de 1.



## Plan

## Système diagonal

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$.

$$x_i = b_i / A_{i,i}, \quad \forall i \in [\![1, n]\!]. \tag{1}$$

**Algorithme** Fonction RSLMatDiag permettant de résoudre le système linéaire à matrice diagonale inversible

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

**Données :** $\mathbb{A}$ : matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.
$\boldsymbol{b}$ : vecteur de $\mathbb{R}^n$.
**Résultat :** $\boldsymbol{x}$ : vecteur de $\mathbb{R}^n$.

1: **Fonction** $\boldsymbol{x} \leftarrow$ RSLMatDiag( $\mathbb{A}, \boldsymbol{b}$ )
2: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n$ **faire**
3: $x(i) \leftarrow b(i)/A(i,i)$
4: **Fin Pour**
5: **Fin Fonction**



## Système triangulaire inférieur

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire inférieure inversible ($A_{i,j} = 0$ si $i < j$)

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ A_{n,1} & \dots & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{A}$ inversible $\iff$



## Système triangulaire inférieur

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire inférieure inversible ($A_{i,j} = 0$ si $i < j$)

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ A_{n,1} & \dots & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{A}$ inversible $\iff A_{i,i} \neq 0, \forall i \in [\![1, n]\!]$



## Système triangulaire inférieur

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire inférieure inversible ($A_{i,j} = 0$ si $i < j$)

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ A_{n,1} & \dots & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{A}$ inversible $\iff A_{i,i} \neq 0, \forall i \in [\![1, n]\!]$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$, $\left( (\mathbb{A}\boldsymbol{x})_i = b_i, \iff \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} x_j = b_i \right)$.

$$b_i = \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j + A_{i,i} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} \underbrace{A_{i,j}}_{=0} x_j = \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j + A_{i,i} x_i$$

$$x_i = \frac{1}{A_{i,i}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j \right), \ \forall i \in [\![1, n]\!]. \tag{2}$$

$$x_i = \frac{1}{A_{i,i}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j \right), \ \forall i \in [\![1, n]\!].$$

**Algorithme 2** $\mathcal{R}_0$

1: Résoudre $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en calculant successivement $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

**Algorithme 2** $\mathcal{R}_1$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n$ **faire**
2: $\quad x_i \leftarrow \frac{1}{A_{i,i}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j \right)$
3: **Fin Pour**



$$x_i = \frac{1}{A_{i,i}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j \right), \ \forall i \in [\![1, n]\!].$$

**Algorithme 2** $\mathcal{R}_1$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n$ **faire**
2: $\quad x_i \leftarrow \frac{1}{A_{i,i}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j \right)$
3: **Fin Pour**

**Algorithme 2** $\mathcal{R}_2$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n$ **faire**
2: $\quad S \leftarrow \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j$
3: $\quad x_i \leftarrow (b_i - S)/A_{i,i}$
4: **Fin Pour**



$$x_i = \frac{1}{A_{i,i}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j \right), \ \forall i \in [\![1, n]\!].$$

**Algorithme 2** $\mathcal{R}_2$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n$ **faire**
2: $\quad S \leftarrow \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j$
3: $\quad x_i \leftarrow (b_i - S)/A_{i,i}$
4: **Fin Pour**

**Algorithme 2** $\mathcal{R}_3$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n$ **faire**
2: $\quad S \leftarrow 0$
3: $\quad$ **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
4: $\quad\quad S \leftarrow S + A(i,j) * x(j)$
5: $\quad$ **Fin Pour**
6: $\quad x_i \leftarrow (b_i - S)/A_{i,i}$
7: **Fin Pour**



$$x_i = \frac{1}{A_{i,i}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j \right), \ \forall i \in [\![1, n]\!].$$

**Algorithme** Fonction RSLTriInf permettant de résoudre le système linéaire triangulaire inférieur inversible $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

**Données :** $\mathbb{A}$ : matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inférieure inversible.
$\boldsymbol{b}$ : vecteur de $\mathbb{K}^n$.
**Résultat :** $\boldsymbol{x}$ : vecteur de $\mathbb{K}^n$.

1: **Fonction** $\boldsymbol{x} \leftarrow$ RSLTriInf( $\mathbb{A}, \boldsymbol{b}$ )
2: $\quad$ **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n$ **faire**
3: $\quad\quad S \leftarrow 0$
4: $\quad\quad$ **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
5: $\quad\quad\quad S \leftarrow S + A(i,j) * x(j)$
6: $\quad\quad$ **Fin Pour**
7: $\quad\quad x(i) \leftarrow (b(i) - S)/A(i,i)$
8: $\quad$ **Fin Pour**
9: **Fin Fonction**

## Système triangulaire supérieur

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure inversible ($A_{i,j} = 0$ si $i > j$)

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & \dots & A_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

**Exercice 1** Travail à faire

Ecrire la fonction RSLTriSup permettant de résoudre le système triangulaire supérieur $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.



## Plan





**Exercice 2 :** Travail à faire ***Matrice de permutation***

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j$, on note $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identitée dont on a permuté les lignes $i$ et $j$.

**Q. 1**

*Représenter cette matrice et la définir proprement.*

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.On note $\boldsymbol{A}_{r,:}$ le $r$-ème vecteur ligne de $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{A}_{:,s}$ le $s$-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$.

**Q. 2**

1. *Déterminer les lignes de la matrice $\mathbb{D} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}\mathbb{A}$ en fonction des vecteurs lignes de $\mathbb{A}$.*
2. *Déterminer les colonnes de la matrice $\mathbb{E} = \mathbb{A}\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ en fonction des vecteurs colonnes de $\mathbb{A}$.*

**Q. 3**

1. *Calculer le déterminant de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.*
2. *Déterminer l'inverse de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.*



**Exercice 3 :** ***Matrice d'élimination***

Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ avec $v_1 \neq 0$. On note $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice triangulaire inférieure à diagonale unité définie par

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline -v_2/v_1 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -v_n/v_1 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \tag{1}$$

**Q. 1**

1. *Calculer le déterminant de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$.*
2. *Déterminer l'inverse de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$.*

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $A_{1,1} \neq 0$. On note $\boldsymbol{A}_{:,j}$ le $j$-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{A}_{i,:}$ son $i$-ème vecteur ligne. On pose $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_{:,1}$.

**Q. 2**

1. *Calculer $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}\mathbb{A}$ en fonction des vecteurs lignes de $\mathbb{A}$.*
2. *Montrer que la première colonne de $\tilde{\mathbb{A}}$ est le vecteur $(A_{1,1}, 0, \dots, 0)^t$ i.e.*

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = A_{1,1}\boldsymbol{e}_1 \tag{2}$$

*où $\boldsymbol{e}_1$ est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.*

**Lemme : *matrice de permutation***

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On note $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identitée dont on a permuté les lignes $i$ et $j$. Alors la matrice $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ est symétrique et orthogonale. Pour toute matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

1. la matrice $\mathbb{P}_n^{[i,j]}\mathbb{A}$ est matrice $\mathbb{A}$ dont on a permuté les **lignes** $i$ et $j$,
2. la matrice $\mathbb{A}\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ est matrice $\mathbb{A}$ dont on a permuté les **colonnes** $i$ et $j$,

**Lemme : *matrice d'élimination***

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $A_{1,1} \neq 0$. Il existe une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité telle que

$$\mathbb{E}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = A_{1,1}\boldsymbol{e}_1 \tag{3}$$

où $\boldsymbol{e}_1$ est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.



**Théorème : *décomposition de Schur*** ★★★★★

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe une matrice unitaire $\mathbb{U}$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{T}$ telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^* \tag{4}$$



## Plan





## Algorithme de Gauss-Jordan

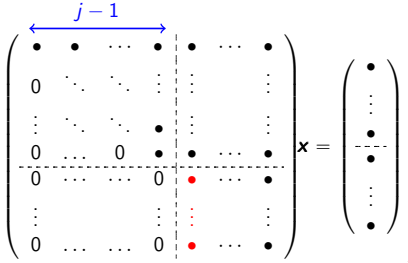
$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$$

où $\mathbb{U}$ matrice triangulaire supérieure.
Opérations élémentaires sur les matrices :

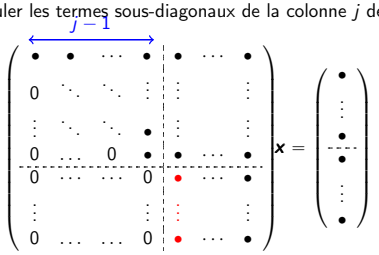
- $\mathcal{L}_i \leftrightarrow \mathcal{L}_j$ permutation lignes $i$ et $j$
- $\mathcal{L}_i \leftarrow \mathcal{L}_i + \alpha\mathcal{L}_j$ combinaison linéaire

A l'aide d'opérations élémentaires, on va transformer successivement en $n-1$ étapes le système.

- **Etape** $j$: on va *s'arranger* pour annuler les termes sous-diagonaux de la colonne $j$ de la matrice sans modifier les $j-1$ premières colonnes.



- **Etape** $j$: on va *s'arranger* pour annuler les termes sous-diagonaux de la colonne $j$ de la matrice sans modifier les $j-1$ premières colonnes.




**Algorithme** Algorithme de Gauss-Jordan formel pour la résolution de $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

1: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $n-1$ **faire**
2: Rechercher l'indice $k$ de la ligne du pivot (sur la colonne $j$, $k \in [\![j, n]\!]$)
3: Permuter les lignes $j$ ($\mathcal{L}_j$) et $k$ ($\mathcal{L}_k$) du système si besoin.
4: **Pour** $i \leftarrow j+1$ **à** $n$ **faire**
5: Eliminer en effectuant $\mathcal{L}_i \leftarrow \mathcal{L}_i - \frac{A_{i,j}}{A_{j,j}}\mathcal{L}_j$
6: **Fin Pour**
7: **Fin Pour**
8: Résoudre le système triangulaire supérieur par la méthode de la remontée.



**Algorithme** Algorithme de Gauss-Jordan avec fonctions pour la résolution de $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

**Données :** $\mathbb{A}$ : matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible.
$\boldsymbol{b}$ : vecteur de $\mathbb{K}^n$.
**Résultat :** $\boldsymbol{x}$ : vecteur de $\mathbb{R}^n$.

1: **Fonction** $\boldsymbol{x} \leftarrow$ RSLGauss( $\mathbb{A}, \boldsymbol{b}$ )
2: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $n-1$ **faire**
3: $k \leftarrow$ ChercheIndPivot$(\mathbb{A}, j)$ ▷ à écrire
4: $[\mathbb{A}, \boldsymbol{b}] \leftarrow$ PermLignesSys$(\mathbb{A}, \boldsymbol{b}, j, k)$ ▷ à écrire
5: **Pour** $i \leftarrow j+1$ **à** $n$ **faire**
6: $[\mathbb{A}, \boldsymbol{b}] \leftarrow$ CombLignesSys$(\mathbb{A}, \boldsymbol{b}, j, i, -A(i,j)/A(j,j))$ ▷ à écrire
7: **Fin Pour**
8: **Fin Pour**
9: $\boldsymbol{x} \leftarrow$ RSLTriSup$(\mathbb{A}, \boldsymbol{b})$ ▷ déjà écrite
10: **Fin Fonction**



**Algorithme** Recherche d'un pivot pour l'algorithme de Gauss-Jordan.

**Données :** $\mathbb{A}$ : matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$j$ : entier, $1 \leqslant j \leqslant n$.
**Résultat :** $k$ : dans $[\![j, n]\!]$, indice ligne pivot

1: **Fonction** $k \leftarrow$ ChercheIndPivot( $\mathbb{A}, j$ )
2: $k \leftarrow j$, pivot $\leftarrow |\mathbb{A}(j,j)|$
3: **Pour** $i \leftarrow j+1$ **à** $n$ **faire**
4: **Si** $|\mathbb{A}(i,j)| >$ pivot **alors**
5: $k \leftarrow i$
6: pivot $\leftarrow |\mathbb{A}(i,j)|$
7: **Fin Si**
8: **Fin Pour**
9: **Fin Fonction**

**Algorithme** Permutte deux lignes d'une matrice et d'un vecteur.

**Données :** $\mathbb{A}$ : matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$\boldsymbol{b}$ : vecteur de $\mathbb{K}^n$.
$j, k$ : entiers, $1 \leqslant j, k \leqslant n$.
**Résultat :** $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{b}$ modifiés.

1: **Fonction** $[\mathbb{A}, \boldsymbol{b}] \leftarrow$ PermLignesSys( $\mathbb{A}, \boldsymbol{b}, j, k$ )
2: **Pour** $l \leftarrow 1$ **à** $n$ **faire**
3: $t \leftarrow \mathbb{A}(j,l)$
4: $\mathbb{A}(j,l) \leftarrow \mathbb{A}(k,l)$
5: $\mathbb{A}(k,l) \leftarrow t$
6: **Fin Pour**
7: $t \leftarrow \boldsymbol{b}(j)$, $\boldsymbol{b}(j) \leftarrow \boldsymbol{b}(k)$, $\boldsymbol{b}(k) \leftarrow t$
8: **Fin Fonction**

**Algorithme** Combinaison linéaire $\mathcal{L}_i \leftarrow \mathcal{L}_i + \alpha\mathcal{L}_j$ appliqué à une matrice et à un vecteur.

**Données :** $\mathbb{A}$ : matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$\boldsymbol{b}$ : vecteur de $\mathbb{K}^n$.
$j, i$ : entiers, $1 \leqslant j, i \leqslant n$.
alpha : scalaire de $\mathbb{K}$
**Résultat :** $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{b}$ modifiés.

1: **Fonction** $[\mathbb{A}, \boldsymbol{b}] \leftarrow$ CombLignesSys( $\mathbb{A}, \boldsymbol{b}, j, i, \alpha$ )
2: **Pour** $k \leftarrow 1$ **à** $n$ **faire**
3: $\mathbb{A}(i,k) \leftarrow \mathbb{A}(i,k) + \alpha * \mathbb{A}(j,k)$
4: **Fin Pour**
5: $\boldsymbol{b}(i) \leftarrow \boldsymbol{b}(i) + \alpha\boldsymbol{b}(j)$
6: **Fin Fonction**



## Exercice 4 Méthode de Gauss, écriture algébrique

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible.

**Q. 1** *Montrer qu'il existe une matrice $\mathbb{G} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det(\mathbb{G})| = 1$ et $\mathbb{G}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = \alpha\boldsymbol{e}_1$ avec $\alpha \neq 0$ et $\boldsymbol{e}_1$ premier vecteur de la base canonique de $C^n$.*

**Q. 2**
1. *Montrer par récurrence sur l'ordre des matrices que pour toute matrice $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, il existe une matrice $\mathbb{S}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det \mathbb{S}_n| = 1$ et $\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n$ avec $\mathbb{U}_n$ matrice triangulaire supérieure inversible.*
2. *Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$. En supposant connue la décompostion précédente $\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n$, expliquer comment résoudre le système $\mathbb{A}_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*

**Q. 3** *Que peut-on dire si $\mathbb{A}$ est non inversible?*

**Indication :** utiliser les Lemmes 2.1 (matrice de permutation) et 2.2 (matrice d'élimination) du résumé de ce chapitre.

On a donc démontré la proposition suivante

**Proposition 2.1**

Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée, inversible ou non. Il existe (au moins) une matrice inversible $\mathbb{G}$ telle que $\mathbb{GA}$ soit triangulaire supérieure.



## Plan





**Exercice 5 Vers la factorisation $\mathbb{LU}$**

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les sous-matrices principales d'ordre $i$, notées $\Delta_i$, $i \in [\![1, n]\!]$. Montrer par récurrence sur l'ordre $n$ de la matrice $\mathbb{A}$ qu'il existe une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que la matrice $\mathbb{U}$ définie par

$$\mathbb{U} = \mathbb{EA}$$

soit triangulaire supérieure avec $U_{i,i} = \det \Delta_i / (U_{1,1} \times \cdots \times U_{i-1,i-1})$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.



**Théorème : *Factorisation* $\mathbb{LU}$** ★★★★★

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les sous-matrices principales sont inversibles alors il existe

- une unique matrice $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure (*lower triangular* en anglais) à diagonale unité,
- une unique matrice $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure (*upper triangular* en anglais) inversible

telles ques

$$\mathbb{A} = \mathbb{LU}.$$

**preuve :** Travail à faire

- **Existence :** exercice précédent $\mathbb{U} = \mathbb{EA}$ et $\mathbb{L} = \mathbb{E}^{-1}$
- **Unicité :** $\mathbb{A} = \mathbb{L}_1\mathbb{U}_1 = \mathbb{L}_2\mathbb{U}_2$ ...

**Exercice** Travail à faire

Montrer que si $\mathbb{A}$ inversible admet une factorisation $\mathbb{LU}$ alors toutes ses sous-matrices principales sont inversibles.

**Corollaire 2.1 :** ★★★★★

Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice hermitienne définie positive alors elle admet une unique factorisation $\mathbb{LU}$.

**preuve :** Travail à faire Montrer que si $\mathbb{A}$ hermitienne définie positive alors toutes ses sous-matrices principales sont hermitienne définies positives. Puis conclure.



**Remarque 2.1**

Si la matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est inversible mais que ses sous-matrices principales ne sont pas toutes inversibles, il est possible par des permutations préalables de lignes de la matrice de se ramener à une matrice telle que ses sous-matrices principales soient inversibles.

**Théorème 2.1 : *Factorisation $\mathbb{LU}$ avec permutations*** ★★★★★

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible. Il existe une matrice $\mathbb{P}$, produit de matrices de permutation, une matrice $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité et une matrice $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure inversible telles ques

$$\mathbb{PA} = \mathbb{LU}. \tag{5}$$



## Utilisation pratique de la factorisation $\mathbb{LU}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une factorisation $\mathbb{LU}$

Trouver $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \mathbb{LU}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{6}$$

est équivalent à



## Utilisation pratique de la factorisation $\mathbb{LU}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une factorisation $\mathbb{LU}$

Trouver $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \mathbb{LU}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{6}$$

est équivalent à

Trouver $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ solution de

$$\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \tag{7}$$

avec $\boldsymbol{y} \in \mathbb{K}^n$ solution de

$$\mathbb{L}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}. \tag{8}$$

## Algorithme de résolution de systèmes linéaire par $\mathbb{LU}$

**Algorithme** Fonction RSLFactLU permettant de résoudre, par une factorisation $\mathbb{LU}$, le système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ où $\mathbb{A}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dont toutes les sous-matrices principales sont inversibles, et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$.

, **Données :** $\mathbb{A}$ : matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les sous-matrices principales sont inversibles;
$\boldsymbol{b}$ : vecteur de $\mathbb{K}^n$.
**Résultat :** $\boldsymbol{x}$ : vecteur de $\mathbb{K}^n$.

1: **Fonction** $\boldsymbol{x} \leftarrow$ RSLFactLU( $\mathbb{A}, \boldsymbol{b}$ )
2: $[\mathbb{L}, \mathbb{U}] \leftarrow$ FactLU($\mathbb{A}$) ▷ Factorisation $\mathbb{LU}$
3: $\boldsymbol{y} \leftarrow$ RSLTriInf($\mathbb{L}, \boldsymbol{b}$) ▷ Résolution du système $\mathbb{L}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$
4: $\boldsymbol{x} \leftarrow$ RSLTriSup($\mathbb{U}, \boldsymbol{y}$) ▷ Résolution du système $\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$
5: **Fin Fonction**

Il nous faut donc écrire la fonction FactLU



Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une factorisation $\mathbb{LU}$.

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ L_{2,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ L_{n,1} & L_{n,2} & \dots & L_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & \dots & \dots & U_{1,n} \\ 0 & U_{2,2} & \dots & \dots & U_{2,n} \\ 0 & 0 & U_{3,3} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & U_{n,n} \end{pmatrix}$$

On connait $\mathbb{A}$, on cherche $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$



Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une factorisation $\mathbb{LU}$.

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ L_{2,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ L_{n,1} & L_{n,2} & \dots & L_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & \dots & \dots & U_{1,n} \\ 0 & U_{2,2} & \dots & \dots & U_{2,n} \\ 0 & 0 & U_{3,3} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & U_{n,n} \end{pmatrix}$$

- **Etape** 1 :
  - On connait la **première ligne** de $\mathbb{L}$ $\Longrightarrow$ on peut calculer la **première ligne** de $\mathbb{U}$



Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une factorisation $\mathbb{LU}$.

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ L_{2,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ L_{n,1} & L_{n,2} & \dots & L_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & \dots & \dots & U_{1,n} \\ 0 & U_{2,2} & \dots & \dots & U_{2,n} \\ 0 & 0 & U_{3,3} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & U_{n,n} \end{pmatrix}$$

- **Etape** 1 :
  - On connait la **première ligne** de $\mathbb{L}$ $\Longrightarrow$ on peut calculer la **première ligne** de $\mathbb{U}$
  - On connait la **première colonne** de $\mathbb{U}$ $\Longrightarrow$ on peut calculer la **première colonne** de $\mathbb{L}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une factorisation $\mathbb{LU}$.

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ L_{2,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ L_{n,1} & L_{n,2} & \dots & L_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & \dots & \dots & U_{1,n} \\ 0 & U_{2,2} & \dots & \dots & U_{2,n} \\ 0 & 0 & U_{3,3} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & U_{n,n} \end{pmatrix}$$

- **Etape** 1 :
  - On connait la **première ligne** de $\mathbb{L} \Longrightarrow$ on peut calculer la **première ligne** de $\mathbb{U}$
  - On connait la **première colonne** de $\mathbb{U} \Longrightarrow$ on peut calculer la **première colonne** de $\mathbb{L}$
- **Etape** 2 :
  - On connait la **deuxième ligne** de $\mathbb{L} \Longrightarrow$ on peut calculer la **deuxième ligne** de $\mathbb{U}$ car on connait la première ligne de $\mathbb{U}$



Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une factorisation $\mathbb{LU}$.

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ L_{2,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ L_{n,1} & L_{n,2} & \dots & L_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & \dots & \dots & U_{1,n} \\ 0 & U_{2,2} & \dots & \dots & U_{2,n} \\ 0 & 0 & U_{3,3} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & U_{n,n} \end{pmatrix}$$

- **Etape** 1 :
  - On connait la **première ligne** de $\mathbb{L} \Longrightarrow$ on peut calculer la **première ligne** de $\mathbb{U}$
  - On connait la **première colonne** de $\mathbb{U} \Longrightarrow$ on peut calculer la **première colonne** de $\mathbb{L}$
- **Etape** 2 :
  - On connait la **deuxième ligne** de $\mathbb{L} \Longrightarrow$ on peut calculer la **deuxième ligne** de $\mathbb{U}$ car on connait la première ligne de $\mathbb{U}$
  - On connait la **deuxième colonne** de $\mathbb{U} \Longrightarrow$ on peut calculer la **deuxième colonne** de $\mathbb{L}$ car on connait la première colonne de $\mathbb{L}$



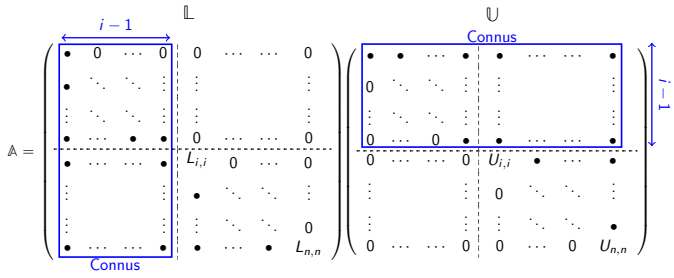
Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une factorisation $\mathbb{LU}$.

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ L_{2,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ L_{n,1} & L_{n,2} & \dots & L_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & \dots & \dots & U_{1,n} \\ 0 & U_{2,2} & \dots & \dots & U_{2,n} \\ 0 & 0 & U_{3,3} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & U_{n,n} \end{pmatrix}$$

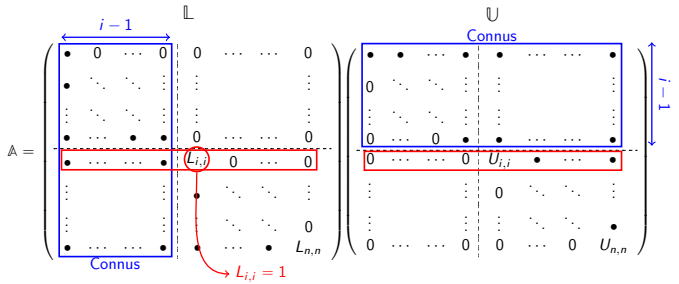
- **Etape** 1 :
  - On connait la **première ligne** de $\mathbb{L} \Longrightarrow$ on peut calculer la **première ligne** de $\mathbb{U}$
  - On connait la **première colonne** de $\mathbb{U} \Longrightarrow$ on peut calculer la **première colonne** de $\mathbb{L}$
- **Etape** 2 :
  - On connait la **deuxième ligne** de $\mathbb{L} \Longrightarrow$ on peut calculer la **deuxième ligne** de $\mathbb{U}$ car on connait la première ligne de $\mathbb{U}$
  - On connait la **deuxième colonne** de $\mathbb{U} \Longrightarrow$ on peut calculer la **deuxième colonne** de $\mathbb{L}$ car on connait la première colonne de $\mathbb{L}$
- ...



Par récurrence, en supposant connues les $(i-1)$ premières colonnes de $\mathbb{L}$ et les $(i-1)$ premières lignes de $\mathbb{U}$.



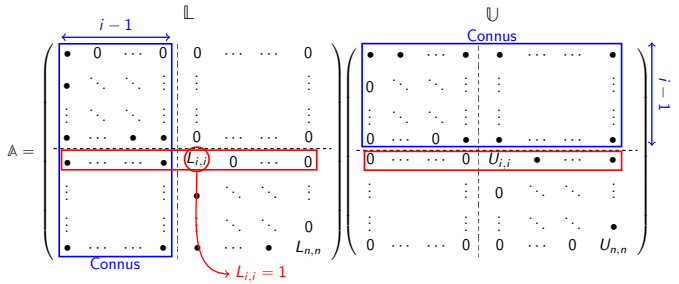
Par récurrence, en supposant connues les $(i-1)$ premières colonnes de $\mathbb{L}$ et les $(i-1)$ premières lignes de $\mathbb{U}$.




$\Rightarrow$ ligne $i$ de $\mathbb{L}$ connue : on peut calculer la ligne $i$ de $\mathbb{U}$!



Par récurrence, en supposant connues les $(i-1)$ premières colonnes de $\mathbb{L}$ et les $(i-1)$ premières lignes de $\mathbb{U}$.




$\Rightarrow$ ligne $i$ de $\mathbb{L}$ connue : on peut calculer la ligne $i$ de $\mathbb{U}$!

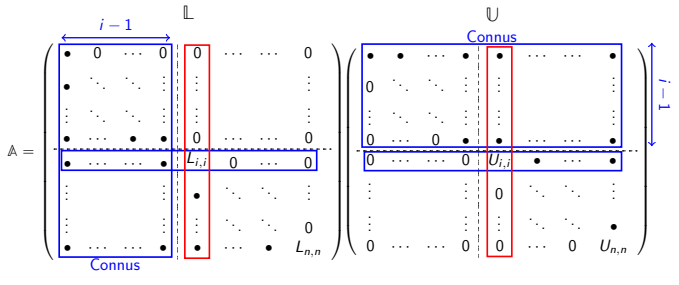
On cherche $U_{i,j}$ $\forall j \in [\![i, n]\!]$.

$$A_{i,j} \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} L_{i,k} U_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} \overbrace{L_{i,k} U_{k,j}}^{\text{connus}} + \overbrace{L_{i,i}}^{=1} U_{i,j} + \sum_{k=i+1}^{n} \overbrace{L_{i,k}}^{=0} U_{k,j}$$

$$U_{i,j} = A_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k} U_{k,j}, \quad \forall j \in [\![i, n]\!].$$



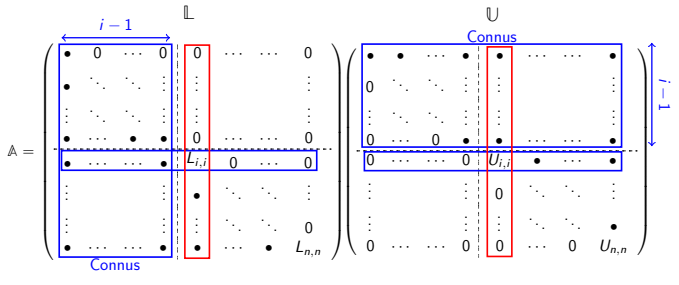
Par récurrence, en supposant connues les $(i-1)$ premières colonnes de $\mathbb{L}$ et les $(i-1)$ premières lignes de $\mathbb{U}$.




$\Rightarrow$ colonne $i$ de $\mathbb{U}$ connue : on peut calculer la colonne $i$ de $\mathbb{L}$!



Par récurrence, en supposant connues les $(i-1)$ premières colonnes de $\mathbb{L}$ et les $(i-1)$ premières lignes de $\mathbb{U}$.




$\Rightarrow$ colonne $i$ de $\mathbb{U}$ connue : on peut calculer la colonne $i$ de $\mathbb{L}$!

On cherche $L_{j,i}$ $\forall j \in [\![i+1, n]\!]$, $(L_{i,i} = 1)$

$$A_{j,i} \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} L_{j,k} U_{k,i} = \sum_{k=1}^{i-1} \overbrace{L_{j,k} U_{k,i}}^{\text{connus}} + L_{j,i} \overbrace{U_{i,i}}^{\text{connu}} + \sum_{k=i+1}^{n} L_{j,k} \overbrace{U_{k,i}}^{=0}$$

$$L_{j,i} = \left( A_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{j,k} U_{k,i} \right) / U_{i,i}, \quad \forall j \in [\![i+1, n]\!].$$

En résumé, à l'étape $i$:

- Calcul de la ligne $i$ de $\mathbb{U}$

$$\begin{aligned} U_{i,j} &= 0, && \forall j \in [\![1, i-1]\!], \\ U_{i,j} &= A_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k} U_{k,j}, && \forall j \in [\![i, n]\!]. \end{aligned}$$

- Calcul de la colonne $i$ de $\mathbb{L}$

$$\begin{aligned} L_{j,i} &= 0, && \forall j \in [\![1, i-1]\!], \\ L_{i,i} &= 1, \\ L_{j,i} &= \left( A_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{j,k} U_{k,i} \right) / U_{i,i}, && \forall j \in [\![i+1, n]\!]. \end{aligned}$$

**Algorithme 9** $\mathcal{R}_0$

1: Calculer les matrices $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$

**Algorithme 9** $\mathcal{R}_1$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n$ **faire**
2: Calculer la ligne $i$ de $\mathbb{U}$.
3: Calculer la colonne $i$ de $\mathbb{L}$.
4: **Fin Pour**



En résumé, à l'étape $i$:

- Calcul de la ligne $i$ de $\mathbb{U}$

$$\begin{aligned} U_{i,j} &= 0, && \forall j \in [\![1, i-1]\!], \\ U_{i,j} &= A_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k} U_{k,j}, && \forall j \in [\![i, n]\!]. \end{aligned}$$

- Calcul de la colonne $i$ de $\mathbb{L}$

$$\begin{aligned} L_{j,i} &= 0, && \forall j \in [\![1, i-1]\!], \\ L_{i,i} &= 1, \\ L_{j,i} &= \left( A_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{j,k} U_{k,i} \right) / U_{i,i}, && \forall j \in [\![i+1, n]\!]. \end{aligned}$$

**Algorithme 9** $\mathcal{R}_1$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n$ **faire**
2: Calculer la ligne $i$ de $\mathbb{U}$.
3: Calculer la colonne $i$ de $\mathbb{L}$.
4: **Fin Pour**

**Algorithme 9** $\mathcal{R}_2$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n$ **faire**
2: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
3: $U(i,j) \leftarrow 0$
4: **Fin Pour**
5: **Pour** $j \leftarrow i$ **à** $n$ **faire**
6: $U_{i,j} \leftarrow A_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k} U_{k,j}$
7: **Fin Pour**
8: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
9: $L_{j,i} \leftarrow 0$
10: **Fin Pour**
11: $L_{i,i} \leftarrow 1$
12: **Pour** $j \leftarrow i+1$ **à** $n$ **faire**
13: $L_{j,i} \leftarrow \frac{1}{U_{i,i}} \left( A_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{j,k} U_{k,i} \right)$
14: **Fin Pour**
15: **Fin Pour**



**Algorithme 9** $\mathcal{R}_2$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n$ **faire**
2: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
3: $U(i,j) \leftarrow 0$
4: **Fin Pour**
5: **Pour** $j \leftarrow i$ **à** $n$ **faire**
6: $U_{i,j} \leftarrow A_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k} U_{k,j}$
7: **Fin Pour**
8: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
9: $L_{j,i} \leftarrow 0$
10: **Fin Pour**
11: $L_{i,i} \leftarrow 1$
12: **Pour** $j \leftarrow i+1$ **à** $n$ **faire**
13: $L_{j,i} \leftarrow \frac{1}{U_{i,i}} \left( A_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{j,k} U_{k,i} \right)$
14: **Fin Pour**
15: **Fin Pour**

**Algorithme 9** $\mathcal{R}_3$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n$ **faire**
2: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
3: $U(i,j) \leftarrow 0$
4: **Fin Pour**
5: **Pour** $j \leftarrow i$ **à** $n$ **faire**
6: $S_1 \leftarrow \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k} U_{k,j}$
7: $U_{i,j} \leftarrow A_{i,j} - S_1$
8: **Fin Pour**
9: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
10: $L_{j,i} \leftarrow 0$
11: **Fin Pour**
12: $L_{i,i} \leftarrow 1$
13: **Pour** $j \leftarrow i+1$ **à** $n$ **faire**
14: $S_2 \leftarrow \sum_{k=1}^{i-1} L_{j,k} U_{k,i}$
15: $L_{j,i} \leftarrow \frac{1}{U_{i,i}} (A_{j,i} - S_2)$.
16: **Fin Pour**
17: **Fin Pour**



**Algorithme 9** $\mathcal{R}_3$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n$ **faire**
2: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
3: $U(i,j) \leftarrow 0$
4: **Fin Pour**
5: **Pour** $j \leftarrow i$ **à** $n$ **faire**
6: $S_1 \leftarrow \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k} U_{k,j}$
7: $U_{i,j} \leftarrow A_{i,j} - S_1$
8: **Fin Pour**
9: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
10: $L_{j,i} \leftarrow 0$
11: **Fin Pour**
12: $L_{i,i} \leftarrow 1$
13: **Pour** $j \leftarrow i+1$ **à** $n$ **faire**
14: $S_2 \leftarrow \sum_{k=1}^{i-1} L_{j,k} U_{k,i}$
15: $L_{j,i} \leftarrow \frac{1}{U_{i,i}} (A_{j,i} - S_2)$.
16: **Fin Pour**
17: **Fin Pour**

**Algorithme 9** $\mathcal{R}_4$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n$ **faire**
2: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
3: $U(i,j) \leftarrow 0$
4: **Fin Pour**
5: **Pour** $j \leftarrow i$ **à** $n$ **faire**
6: $S_1 \leftarrow 0$
7: **Pour** $k \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
8: $S_1 \leftarrow S_1 + L_{i,k} * U_{k,j}$
9: **Fin Pour**
10: $U_{i,j} \leftarrow A_{i,j} - S_1$
11: **Fin Pour**
12: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
13: $L_{j,i} \leftarrow 0$
14: **Fin Pour**
15: $L_{i,i} \leftarrow 1$
16: **Pour** $j \leftarrow i+1$ **à** $n$ **faire**
17: $S_2 \leftarrow 0$
18: **Pour** $k \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
19: $S_2 \leftarrow S_2 + L_{j,k} * U_{k,i}$
20: **Fin Pour**
21: $L_{j,i} \leftarrow \frac{1}{U_{i,i}} (A_{j,i} - S_2)$.
22: **Fin Pour**
23: **Fin Pour**

**Algorithme** Fonction FactLU permet de calculer les matrices $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$ dites matrice de factorisation $\mathbb{LU}$ associée à la matrice $\mathbb{A}$, telle que

$$\mathbb{A} = \mathbb{LU}$$

**Données :** $\mathbb{A}$ : matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les sous-matrices principales sont inversibles.

**Résultat :** $\mathbb{L}$ : matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire inférieure avec $L_{i,i} = 1,\ \forall i \in [\![1, n]\!]$

$\mathbb{U}$ : matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure.

**Fonction** $[\mathbb{L}, \mathbb{U}] \leftarrow$ FactLU( $\mathbb{A}$ )
  $\mathbb{U} \leftarrow \mathbb{0}_n$ ▷ $\mathbb{0}_n$ matrice nulle $n \times n$
  $\mathbb{L} \leftarrow \mathbb{I}_n$ ▷ $\mathbb{I}_n$ matrice identitée $n \times n$
  **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n$ **faire**
    **Pour** $j \leftarrow i$ **à** $n$ **faire** ▷ Calcul de la ligne $i$ de $\mathbb{U}$
      $S_1 \leftarrow 0$
      **Pour** $k \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
        $S_1 \leftarrow S_1 + L(i,k) * U(k,j)$
      **Fin Pour**
      $U(i,j) \leftarrow A(i,j) - S_1$
    **Fin Pour**
    **Pour** $j \leftarrow i+1$ **à** $n$ **faire** ▷ Calcul de la colonne $i$ de $\mathbb{L}$
      $S_2 \leftarrow 0$
      **Pour** $k \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
        $S_2 \leftarrow S_2 + L(j,k) * U(k,i)$
      **Fin Pour**
      $L(j,i) \leftarrow (A_{j,i} - S_2)/U(i,i)$.
    **Fin Pour**
  **Fin Pour**
**Fin Fonction**



# Plan





Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **hermitienne inversible** admettant une factorisation $\mathbb{LU}$. On pose

$$\mathbb{D} = \operatorname{diag} \mathbb{U} \text{ et } \mathbb{R} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{U}.$$

$\mathbb{R}$ est alors triangulaire supérieure à diagonale unité. On a alors

$$\mathbb{A} = \mathbb{LU} = \mathbb{LDD}^{-1}\mathbb{U} = \mathbb{LDR}.$$

$$\mathbb{A} \text{ hermitienne } \mathbb{A}^* = \mathbb{A} \implies \mathbb{A} = \mathbb{R}^*(\mathbb{D}^*\mathbb{L}^*) = \mathbb{L}(\mathbb{DR})$$

Par unicité de la factorisation $\mathbb{LU}$ :

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{L} \text{ et } \mathbb{D}^*\mathbb{L}^* = \mathbb{DR} \implies \mathbb{R}^* = \mathbb{L} \text{ et } \mathbb{D}^* = \mathbb{D}$$



**Théorème 2.2 : *Factorisation* $\mathbb{LDL}^*$** ★★☆☆☆

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne inversible admettant une factorisation $\mathbb{LU}$. Alors $\mathbb{A}$ s'écrit sous la forme

$$\mathbb{A} = \mathbb{LDL}^* \tag{9}$$

où $\mathbb{D} = \operatorname{diag} \mathbb{U}$ est une matrice à coefficients réels.

**Corollaire 2.2 : *Exercice 6,*** ★★☆☆☆

Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une factorisation $\mathbb{LDL}^*$ avec $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs **si et seulement si** la matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive.

## Plan





**Definition 2.1**

Une **factorisation régulière de Cholesky** d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une factorisation $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$ où $\mathbb{B}$ est une matrice triangulaire inférieure inversible.
Si les coefficients diagonaux de $\mathbb{B}$ sont positifs, on parle alors d'une **factorisation positive de Cholesky**.

**Théorème 2.3 : *Factorisation de Cholesky, Exercice 7*** ★★★★☆

La matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une factorisation régulière de Cholesky **si et seulement si** la matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive. Dans ce cas, elle admet une unique factorisation positive.



Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne définie positive et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$. On note $\mathbb{B}$ la matrice de factorisation positive de Cholesky de $\mathbb{A}$.

Trouver $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad (\Longleftrightarrow \quad \mathbb{B}\mathbb{B}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}) \tag{10}$$

est équivalent à



Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne définie positive et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$. On note $\mathbb{B}$ la matrice de factorisation positive de Cholesky de $\mathbb{A}$.

Trouver $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad (\Longleftrightarrow \quad \mathbb{B}\mathbb{B}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}) \tag{10}$$

est équivalent à

Trouver $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ solution de

$$\mathbb{B}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \tag{11}$$

avec $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ solution de

$$\mathbb{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}. \tag{12}$$

## Algorithme de résolution de systèmes linéaire par Cholesky

**Algorithme** Fonction RSLCholesky permettant de résoudre, par une factorisation de Cholesky positive, le système linéaire

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

où $\mathbb{A}$ une matrice hermitienne de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie positive et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$.

**Données :** $\mathbb{A}$ : matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne définie positive,
$\boldsymbol{b}$ : vecteur de $\mathbb{C}^n$.
**Résultat :** $\boldsymbol{x}$ : vecteur de $\mathbb{C}^n$.

1: **Fonction** $\boldsymbol{x} \leftarrow$ RSLCholesky( $\mathbb{A}, \boldsymbol{b}$ )
2: $\mathbb{B} \leftarrow$ Cholesky($\mathbb{A}$) ▷ Factorisation positive de Cholesky
3: $\boldsymbol{y} \leftarrow$ RSLTriInf($\mathbb{B}, \boldsymbol{b}$) ▷ Résolution du système $\mathbb{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$
4: $\mathbb{U} \leftarrow$ MatAdjointe($\mathbb{B}$) ▷ Calcul de la matrice adjointe de $\mathbb{B}$
5: $\boldsymbol{x} \leftarrow$ RSLTriSup($\mathbb{U}, \boldsymbol{y}$) ▷ Résolution du système $\mathbb{B}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$
6: **Fin Fonction**

Il nous faut donc écrire la fonction Cholesky



Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne définie positive. il existe une unique matrice $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure avec $\mathrm{B}_{i,i} \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, telle que

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$$

c'est à dire

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}_{1,1} & \dots & \mathrm{A}_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \dots \\ \mathrm{A}_{n,1} & \dots & \mathrm{A}_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{B}_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \mathrm{B}_{n,1} & \dots & \dots & \mathrm{B}_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\mathrm{B}_{1,1}} & \dots & \dots & \overline{\mathrm{B}_{n,1}} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \overline{\mathrm{B}_{n,n}} \end{pmatrix}.$$



Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne définie positive. il existe une unique matrice $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure avec $\mathrm{B}_{i,i} \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, telle que

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$$

c'est à dire

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}_{1,1} & \dots & \mathrm{A}_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \dots \\ \mathrm{A}_{n,1} & \dots & \mathrm{A}_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{B}_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \mathrm{B}_{n,1} & \dots & \dots & \mathrm{B}_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\mathrm{B}_{1,1}} & \dots & \dots & \overline{\mathrm{B}_{n,1}} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \overline{\mathrm{B}_{n,n}} \end{pmatrix}.$$

- Calcul de $\mathrm{B}_{1,1}$ (la 1ère ligne de $\mathbb{B}$ est donc déterminée)
  $\Longrightarrow$ calcul 1ère colonne de $\mathbb{B}$.



Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne définie positive. il existe une unique matrice $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure avec $\mathrm{B}_{i,i} \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, telle que

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$$

c'est à dire

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}_{1,1} & \dots & \mathrm{A}_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \dots \\ \mathrm{A}_{n,1} & \dots & \mathrm{A}_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{B}_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \mathrm{B}_{n,1} & \dots & \dots & \mathrm{B}_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\mathrm{B}_{1,1}} & \dots & \dots & \overline{\mathrm{B}_{n,1}} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \overline{\mathrm{B}_{n,n}} \end{pmatrix}.$$

- Calcul de $\mathrm{B}_{1,1}$ (la 1ère ligne de $\mathbb{B}$ est donc déterminée)
  $\Longrightarrow$ calcul 1ère colonne de $\mathbb{B}$.
- Puis calcul de $\mathrm{B}_{2,2}$ (la 2ème ligne de $\mathbb{B}$ est donc déterminée)
  $\Longrightarrow$ calcul 2ème colonne de $\mathbb{B}$.
- Etc...

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On suppose connues les $i-1$ premières colonnes de $\mathbb{B}$.

Peut-on calculer la colonne $i$ de $\mathbb{B}$?

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^* \implies \mathrm{A}_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{B}_{i,k}(\mathbb{B}^*)_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{B}_{i,k}\overline{\mathrm{B}_{i,k}}$$

Or $\mathbb{B}$ triangulaire inférieure (i.e. $\mathrm{B}_{i,j} = 0$ si $j > i$)

$$\mathrm{A}_{i,i} = \sum_{k=1}^{i-1} |\mathrm{B}_{i,k}|^2 + |\mathrm{B}_{i,i}|^2$$

et donc

$$\mathrm{B}_{i,i} = \left(\mathrm{A}_{i,i} - \sum_{j=1}^{i-1} |\mathrm{B}_{i,j}|^2\right)^{1/2}.$$



Il reste à déterminer $\mathrm{B}_{j,i},\ \forall j \in [\![i+1, n]\!]$.

$$\mathrm{A}_{j,i} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{B}_{j,k}(\mathbb{B}^*)_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{B}_{j,k}\overline{\mathrm{B}_{i,k}},\ \forall j \in [\![i+1, n]\!]$$

Comme $\mathbb{L}$ est triangulaire inférieure on obtient

$$\mathrm{A}_{j,i} = \sum_{k=1}^{i} \mathrm{B}_{j,k}\overline{\mathrm{B}_{i,k}} = \sum_{k=1}^{i-1} \mathrm{B}_{j,k}\overline{\mathrm{B}_{i,k}} + \mathrm{B}_{j,i}\overline{\mathrm{B}_{i,i}},\ \forall j \in [\![i+1, n]\!]$$

Or $\mathrm{B}_{i,i} > 0$ connu et les $i-1$ premières colonnes de $\mathbb{B}$ aussi.

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_{j,i} &= \frac{1}{\mathrm{B}_{i,i}}\left(\mathrm{A}_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} \mathrm{B}_{j,k}\overline{\mathrm{B}_{i,k}}\right),\ \forall j \in [\![i+1, n]\!] \\ \mathrm{B}_{j,i} &= 0,\ \forall j \in [\![1, i-1]\!]. \end{aligned}$$



**Algorithme 11** $\mathcal{R}_0$

1: Calculer la matrice $\mathbb{B}$

**Algorithme 11** $\mathcal{R}_1$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n$ **faire**
2: Calculer $\mathrm{B}_{i,i}$, connaissant les $i-1$ premières colonnes de $\mathbb{B}$.
3: Calculer la $i^{\text{ème}}$ colonne de $\mathbb{B}$.
4: **Fin Pour**



**Algorithme 11** $\mathcal{R}_1$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n$ **faire**
2: Calculer $\mathrm{B}_{i,i}$, connaissant les $i-1$ premières colonnes de $\mathbb{B}$.
3: Calculer la $i^{\text{ème}}$ colonne de $\mathbb{B}$.
4: **Fin Pour**

**Etape** $i$**:** les $i-1$ premières colonnes de $\mathbb{B}$ étant connues, on peut calculer la $i$-ème colonne:

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_{i,i} &= \left(\mathrm{A}_{i,i} - \sum_{j=1}^{i-1} |\mathrm{B}_{i,j}|^2\right)^{1/2} > 0 \\ \mathrm{B}_{j,i} &= \frac{1}{\mathrm{B}_{i,i}}\left(\mathrm{A}_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} \mathrm{B}_{j,k}\overline{\mathrm{B}_{i,k}}\right),\ \forall j \in [\![i+1, n]\!] \\ \mathrm{B}_{j,i} &= 0,\ \forall j \in [\![1, i-1]\!]. \end{aligned}$$

**Algorithme 11** $\mathcal{R}_2$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n$ **faire**
2: $\mathrm{B}_{i,i} \leftarrow \left(\mathrm{A}_{i,i} - \sum_{j=1}^{i-1} |\mathrm{B}_{i,j}|^2\right)^{1/2}$
3: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
4: $\mathrm{B}_{j,i} \leftarrow 0$
5: **Fin Pour**
6: **Pour** $j \leftarrow i+1$ **à** $n$ **faire**
7: $\mathrm{B}_{j,i} \leftarrow \frac{1}{\mathrm{B}_{i,i}}\left(\mathrm{A}_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} \mathrm{B}_{j,k}\overline{\mathrm{B}_{i,k}}\right)$.
8: **Fin Pour**
9: **Fin Pour**

**Algorithme 11** $\mathcal{R}_2$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n$ **faire**
2: $\quad \mathrm{B}_{i,i} \leftarrow \left( \mathrm{A}_{i,i} - \sum_{j=1}^{i-1} |\mathrm{B}_{i,j}|^2 \right)^{1/2}$
3: $\quad$ **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
4: $\quad\quad \mathrm{B}_{j,i} \leftarrow 0$
5: $\quad$ **Fin Pour**
6: $\quad$ **Pour** $j \leftarrow i+1$ **à** $n$ **faire**
7: $\quad\quad \mathrm{B}_{j,i} \leftarrow \frac{1}{\mathrm{B}_{i,i}} \left( \mathrm{A}_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} \mathrm{B}_{j,k}\overline{\mathrm{B}_{i,k}} \right).$
8: $\quad$ **Fin Pour**
9: **Fin Pour**

**Algorithme 11** $\mathcal{R}_3$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n$ **faire**
2: $\quad S_1 \leftarrow \sum_{j=1}^{i-1} |\mathrm{B}_{i,j}|^2$
3: $\quad \mathrm{B}_{i,i} \leftarrow (\mathrm{A}_{i,i} - S_1)^{1/2}$
4: $\quad$ **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
5: $\quad\quad \mathrm{B}_{j,i} \leftarrow 0$
6: $\quad$ **Fin Pour**
7: $\quad$ **Pour** $j \leftarrow i+1$ **à** $n$ **faire**
8: $\quad\quad S_2 \leftarrow \sum_{k=1}^{i-1} \mathrm{B}_{j,k}\overline{\mathrm{B}_{i,k}}$
9: $\quad\quad \mathrm{B}_{j,i} \leftarrow \frac{1}{\mathrm{B}_{i,i}} (\mathrm{A}_{j,i} - S_2).$
10: $\quad$ **Fin Pour**
11: **Fin Pour**



**Algorithme 11** $\mathcal{R}_3$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n$ **faire**
2: $\quad S_1 \leftarrow \sum_{j=1}^{i-1} |\mathrm{B}_{i,j}|^2$
3: $\quad \mathrm{B}_{i,i} \leftarrow (\mathrm{A}_{i,i} - S_1)^{1/2}$
4: $\quad$ **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
5: $\quad\quad \mathrm{B}_{j,i} \leftarrow 0$
6: $\quad$ **Fin Pour**
7: $\quad$ **Pour** $j \leftarrow i+1$ **à** $n$ **faire**
8: $\quad\quad S_2 \leftarrow \sum_{k=1}^{i-1} \mathrm{B}_{j,k}\overline{\mathrm{B}_{i,k}}$
9: $\quad\quad \mathrm{B}_{j,i} \leftarrow \frac{1}{\mathrm{B}_{i,i}} (\mathrm{A}_{j,i} - S_2).$
10: $\quad$ **Fin Pour**
11: **Fin Pour**

**Algorithme 11** $\mathcal{R}_4$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n$ **faire**
2: $\quad S_1 \leftarrow 0$
3: $\quad$ **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
4: $\quad\quad S_1 \leftarrow S_1 + |\mathrm{B}_{i,j}|^2$
5: $\quad$ **Fin Pour**
6: $\quad \mathrm{B}_{i,i} \leftarrow (\mathrm{A}_{i,i} - S_1)^{1/2}$
7: $\quad$ **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
8: $\quad\quad \mathrm{B}_{j,i} \leftarrow 0$
9: $\quad$ **Fin Pour**
10: $\quad$ **Pour** $j \leftarrow i+1$ **à** $n$ **faire**
11: $\quad\quad S_2 \leftarrow 0$
12: $\quad\quad$ **Pour** $k \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
13: $\quad\quad\quad S_2 \leftarrow S_2 + \mathrm{B}_{j,k}\overline{\mathrm{B}_{i,k}}$
14: $\quad\quad$ **Fin Pour**
15: $\quad\quad \mathrm{B}_{j,i} \leftarrow \frac{1}{\mathrm{B}_{i,i}} (\mathrm{A}_{j,i} - S_2).$
16: $\quad$ **Fin Pour**
17: **Fin Pour**



**Algorithme** Fonction Cholesky permettant de calculer la matrice $\mathbb{B}$, dites matrice de factorisation positive de Cholesky associée à la matrice $\mathbb{A}$, telle que $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$.

**Données :** A : matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne définie positive.
**Résultat :** B : matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure avec $\mathrm{B}(i,i) > 0,\ \forall i \in [\![1,n]\!]$

```
1: Fonction B ← Cholesky( A )
2:   Pour i ← 1 à n faire
3:     S1 ← 0
4:     Pour j ← 1 à i − 1 faire
5:       S1 ← S1 + |B(i, j)|^2
6:     Fin Pour
7:     B(i, i) ← sqrt(A(i, i) − S1)
8:     Pour j ← 1 à i − 1 faire
9:       B(j, i) ← 0
10:    Fin Pour
11:    Pour j ← i + 1 à n faire
12:      S2 ← 0
13:      Pour k ← 1 à i − 1 faire
14:        S2 ← S2 + B(j, k) ∗ B(i, k)
15:      Fin Pour
16:      B(j, i) ← (A(j, i) − S2)/B(i, i).
17:    Fin Pour
18:  Fin Pour
19: Fin Fonction
```



**Exercice** Travail à faire

Proposer une méthode permettant de tester la fonction Cholesky.

# Plan





**Definition : *Matrice élémentaire de Householder***

Soit $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$. On appelle **matrice élémentaire de Householder** la matrice $\mathbb{H}(\boldsymbol{u}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u}) = \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*. \tag{13}$$

**Exercice 8**

Soit $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$. On note $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\mathbb{H} = \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*.$$

Q. 1

1. *Montrer que* $\mathbb{H}$ *est hermitienne.*
2. *Montrer que* $\mathbb{H}$ *est unitaire.*

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$. On note $\boldsymbol{x}_{\|} = \mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) \overset{\text{def}}{=} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{x}_{\perp} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\|}$.

Q. 2

*Montrer que*

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{x}_{\perp} + \boldsymbol{x}_{\|}) = \boldsymbol{x}_{\perp} - \boldsymbol{x}_{\|}.$$

*et*

$$\mathbb{H}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \quad si \ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle = 0.$$



On vient de démontrer:

**Propriété 2.1**

Toute matrice élémentaire de Householder est hermitienne et unitaire.

**Propriété 2.2**

Soient $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ et $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n$, $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$. On note $\boldsymbol{x}_{\|} = \mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) \overset{\text{def}}{=} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{x}_{\perp} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\|}$. On a alors

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x}_{\perp} + \boldsymbol{x}_{\|}) = \boldsymbol{x}_{\perp} - \boldsymbol{x}_{\|}. \tag{14}$$

et

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \quad \text{si } \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle = 0. \tag{15}$$



**Exercice 9**

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$. On va chercher $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$, vérifiant

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{b}. \tag{1}$$

Q. 1

*Montrer que si* $\alpha$ *et* $\boldsymbol{u}$ *vérifient* (1) *alors*

1. *on a*
$$|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2 \tag{2}$$
2. *on a*
$$\boldsymbol{a} - 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \rangle \boldsymbol{u} = \alpha \boldsymbol{b} \tag{3}$$
3. *on en déduit que*
$$|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \rangle|^2 = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle - \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}{2} \tag{4}$$

Nous allons maintenant établir une condition pour que (4) ait un sens.

Q. 2

*On suppose que* $\arg \alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle)$ $[\pi]$

1. *Montrer que* $\alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in \mathbb{R}$.
2. *Montrer que* $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle - \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in \mathbb{R}^{*+}$.

Q. 3

*Soient* $\alpha$ *et* $\boldsymbol{u}$ *vérifiant* (1). *En déduire que si* $\arg \alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle)$ $[\pi]$ *alors* $\boldsymbol{u}$ *est donné par*

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \rangle}(\boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b}). \tag{5}$$

*et* $\|u\|_2 = 1$.

On vient de démontrer le résultat suivant.

**Théorème 2.4**

Soient $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2$ et $\arg\alpha = -\arg\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \ [\pi]$. On a alors

$$\mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}\|_2}\right)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}. \tag{16}$$

**Corollaire 2.3**

Soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^n\backslash\{\boldsymbol{0}\}$ non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1$, premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$. En notant

$$\boldsymbol{u}_\pm \overset{\text{def}}{=} \frac{\boldsymbol{a} \pm \|\boldsymbol{a}\|_2\, e^{\imath\theta}\boldsymbol{e}_1}{\|\boldsymbol{a} \pm \|\boldsymbol{a}\|_2\, e^{\imath\theta}\boldsymbol{e}_1\|} \in \mathbb{C}^n, \quad \theta = \arg(a_1),$$

on a

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u}_\pm)\boldsymbol{a} = \mp\|\boldsymbol{a}\|_2\, e^{\imath\theta}\boldsymbol{e}_1. \tag{17}$$

**Preuve :** Travail à faire



**Exercice 10**

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$.

**Q. 1** *Ecrire la fonction algorithmique* Householder *permettant de retourner une matrice de Householder* $\mathbb{H}$ *et* $\alpha \in \mathbb{C}$ *tels que* $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$. *Le choix du* $\alpha$ *est fait par le paramètre* $\delta$ *(0 ou 1) de telle sorte que* $\arg\alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle) + \delta\pi$ *avec* $|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2$ .
*Des fonctions comme* dot$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *(produit scalaire de deux vecteurs),* norm$(\boldsymbol{a})$ *(norme 2 d'un vecteur),* arg$(z)$ *(argument d'un nombre complexe),* matprod$(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ *(produit de deux matrices),* ctranspose$(\mathbb{A})$ *(adjoint d'une matrice), ... pourront être utilisées*

**Q. 2** *Proposer un programme permettant de tester cette fonction. On pourra utiliser la fonction* vecrand$(n)$ *retournant un vecteur aléatoire de* $\mathbb{C}^n$, *les parties réelles et imaginaires de chacune de ses composantes étant dans* $]0, 1[$ *(loi uniforme).*

**Q. 3** *Proposer un programme permettant de vérifier que* $\delta = 1$ *est le "meilleur" choix.*



**Objectif :** fonction algorithmique Householder retournant une matrice de Householder $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}.$$

Si $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ dans $\mathbb{C}^n$, non nuls et non colinéaires, on a

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}\|_2} \text{ avec } \alpha = \|\boldsymbol{a}\|_2\, e^{\imath(\delta\pi - \arg\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle)},\ \delta \in \{0, 1\}.$$

fonctions disponibles: dot, norm, arg, eye, matprod, ctranspose

**Algorithme** Calcul du $\alpha$ et de la matrice de Householder $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})$ telle que $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$.

**Données :** $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ : deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$ non nuls et non colinéaires.
$\delta$ : 0 ou 1, permet de déterminer $\alpha$.
**Résultat :** $\mathbb{H}$ : matrice de Householder dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
$\alpha$ : nombre complexe, de module $\|\boldsymbol{a}\|_2$ et d'argument $-\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle) + \delta\pi$.

1: **Fonction** $[\mathbb{H}, \alpha] \leftarrow$ Householder( $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \delta$ )
2: ab $\leftarrow$ dot$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ ▷ dot$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^n \overline{a_i} b_i$
3: $\alpha \leftarrow$ norm$(\boldsymbol{a}) * exp(i * (\delta * \pi - \arg(ab)))$
4: $\boldsymbol{u} \leftarrow \boldsymbol{a} - \alpha * \boldsymbol{b}$
5: $\boldsymbol{u} \leftarrow \boldsymbol{u}$/norm$(\boldsymbol{u})$
6: $\mathbb{H} \leftarrow$ eye$(n) - 2 *$ matprod$(\boldsymbol{u}$, ctranspose$(\boldsymbol{u}))$
7: **Fin Fonction**



Programme algorithmique vérifiant la fonction Householder:

1: $n \leftarrow 100$
2: $\boldsymbol{a} \leftarrow$ vecrand$(n)$
3: $\boldsymbol{b} \leftarrow$ vecrand$(n)$
4: $\boldsymbol{b} \leftarrow \boldsymbol{b}$/norm$(\boldsymbol{b}, 2)$
5: $[\mathbb{H}, \alpha] \leftarrow$ Householder$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, 0)$
6: error $\leftarrow$ norm$(\mathbb{H} * \boldsymbol{a} - \alpha * \boldsymbol{b}, 2)$

vecrand$(n)$ retourne un vecteur aléatoire de $\mathbb{C}^n$ (loi uniforme $[0, 1]$ sur parties réelles et imaginaires)

1: $n \leftarrow 100$
2: $\boldsymbol{a} \leftarrow \text{vecrand}(n)$
3: $\boldsymbol{b} \leftarrow \boldsymbol{a} + 1e-6 * \text{vecrand}(n)$
4: $\boldsymbol{b} \leftarrow \boldsymbol{b}/\text{norm}(\boldsymbol{b}, 2)$
5: $[\mathbb{H}_1, \alpha_1] \leftarrow \text{Householder}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, 1)$
6: $[\mathbb{H}_0, \alpha_0] \leftarrow \text{Householder}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, 0)$
7: $\text{error0} \leftarrow \text{norm}(\mathbb{H}_0 * \boldsymbol{a} - \alpha_0 * \boldsymbol{b}, 2)/(1 + \text{abs}(\alpha_0))$
8: $\text{error1} \leftarrow \text{norm}(\mathbb{H}_1 * \boldsymbol{a} - \alpha_1 * \boldsymbol{b}, 2)/(1 + \text{abs}(\alpha_1))$

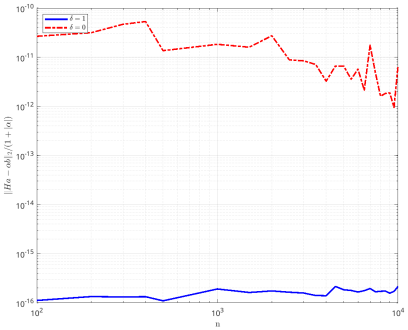



Figure: Choix de $\delta$ dans Householder : erreur relative en norme $L_2$

⚠ Meilleur choix: $\delta = 1$.



**Exercice 11**

Soit $n \geqslant 2$.

$(\mathcal{P}_n)$

Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice. Il existe une matrice unitaire $\mathbb{U}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\mathbb{U}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{R}_n. \tag{1}$$

Q. 1 *Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $(\mathcal{P}_n)$ est vraie.*

Q. 2 *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice unitaire $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que*

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

$(\mathcal{Q}_n)$

Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. Il existe une matrice orthogonale $\mathbb{U}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathbb{U}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{R}_n. \tag{2}$$

Q. 3 *La proposition $(\mathcal{Q}_n)$ est-elle vérifiée pour tout $n \geqslant 2$? Justifier.*

Q. 4 *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

1. *Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que*
$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$
2. *Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficient diagonaux positifs ou nuls telles que*
$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$
3. *On suppose $\mathbb{A}$ inversible. Montrer qu'il existe une unique matrice orthogonale $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une unique matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficient diagonaux strictement positifs telles que*
$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$



**Théorème :**

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice. Il existe une matrice unitaire $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}. \tag{18}$$

Si $\mathbb{A}$ est réelle alors $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont aussi réelles et l'on peut choisir $\mathbb{Q}$ de telle sorte que les coefficients diagonaux de $\mathbb{R}$ soient positifs. De plus, si $\mathbb{A}$ est inversible alors la factorisation est unique.



**Exercice 12**

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{C})$ la matrice bloc

$$\mathbb{A} = \begin{array}{c} \\ m \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array}\right) \end{array}.$$

On note $\boldsymbol{v} = \mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^n$ le premier vecteur colonne de $\mathbb{V}$ et on suppose que $\boldsymbol{v}$ est non nul et non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^n$ (premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$).

Q. 1 *Expliciter, en fonction de $\boldsymbol{v}$, le vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ tel que*

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{e}_1^n, \quad \text{avec } \mathbb{H}(\boldsymbol{u}) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*.$$

Q. 2 *Soient $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$ et $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$. On pose $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m+n}$. Déterminer $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})$ en fonction de $\mathbb{H}(\boldsymbol{x})$ et de $\mathbb{H}(\boldsymbol{y})$.*

Q. 3 *On pose $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0}_m \\ \boldsymbol{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m+n}$.*

1. *Déterminer $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A}$ en fonction de $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})$.*
2. *Que peut-on dire de particulier sur le bloc $(2,2)$ de $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A}$?*

**Lemme**

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{C})$ une matrice bloc

$$\mathbb{A} = \begin{matrix} \\ m \\ n \end{matrix} \begin{pmatrix} \overset{m}{\mathbb{U}} & \overset{n}{\mathbb{F}} \\ \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{pmatrix}.$$

On pose $\boldsymbol{v} = \mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^n$ le premier vecteur colonne de $\mathbb{V}$, et on suppose qu'il existe $i \in [\![2, n]\!]$ tel que $v_i = \mathbb{V}_{i,1} \neq 0$. Soit $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ le vecteur défini par

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v} - \alpha \boldsymbol{e}_1}{\|\boldsymbol{v} - \alpha \boldsymbol{e}_1^n\|} \text{ avec } \alpha = -\|\boldsymbol{v}\|_2 \, e^{\imath \arg(v_1)}$$

où $\boldsymbol{e}_1$ est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

En notant $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0}_m \\ \boldsymbol{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m+n}$, on a alors

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{V} \end{array}\right) \quad \text{avec} \quad \mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{V} = \left[\begin{array}{c|c} \alpha & \bullet \cdots \bullet \\ \hline 0 & \bullet \cdots \bullet \\ \vdots & \vdots \quad \ddots \\ 0 & \bullet \cdots \bullet \end{array}\right].$$



## Exercice 13

**Q. 1** *Ecrire une fonction* FactQR *permettant de calculer la factorisation $\mathbb{QR}$ d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*
*On pourra utiliser la fonction* Householder *(voir Exercice 10, page 4).*

**Q. 2** *Ecrire un programme permettant de tester cette fonction.*