

### EXERCICE 1

Soit  $\mathbb{A}$  une matrice inversible décomposée sous la forme  $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$  avec  $\mathbb{M}$  inversible. On pose

$$\mathbb{B} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N} \quad \text{et} \quad \mathbf{c} = \mathbb{M}^{-1}\mathbf{b}.$$

Montrer que la suite définie par

$$\mathbf{x}^{[0]} \in \mathbb{K}^n \quad \text{et} \quad \mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[k]} + \mathbf{c}$$

converge vers  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbb{A}^{-1}\mathbf{b}$  quelque soit  $\mathbf{x}^{[0]}$  si et seulement si  $\rho(\mathbb{B}) < 1$ .

**Correction** On rappelle tout d'abord le Théorème 2.60, page 17 de [?]:

**Théorème.** Soit  $\mathbb{B}$  une matrice carrée. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}^k = 0$ ,
- b.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}^k \mathbf{v} = 0$  pour tout vecteur  $\mathbf{v}$ ,
- c.  $\rho(\mathbb{B}) < 1$ ,
- d.  $\|\mathbb{B}\| < 1$  pour au moins une norme matricielle subordonnée  $\|\bullet\|$ .

Comme  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbb{A}^{-1}\mathbf{b}$  (sans présupposer de la convergence) on a

$$\mathbb{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \iff \mathbb{M}\bar{\mathbf{x}} = \mathbb{N}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b}$$

et, comme  $\mathbb{M}$  est inversible

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N}\bar{\mathbf{x}} + \mathbb{M}^{-1}\mathbf{b} = \mathbb{B}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c}$$

On obtient donc

$$\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{[k]})$$

Or la suite  $\mathbf{x}^{[k]}$  converge vers  $\bar{\mathbf{x}}$  si et seulement si la suite  $\mathbf{e}^{[k]} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{[k]}$  converge vers  $\mathbf{0}$ . On a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{e}^{[k]} = \mathbb{B}^k \mathbf{e}^{[0]}.$$

D'après le théorème cité, on a  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{B}^k \mathbf{e}^{[0]} = 0$ ,  $\forall \mathbf{e}^{[0]} \in \mathbb{K}^n$  si et seulement si  $\rho(\mathbb{B}) < 1$ .

◇

