

Exercice 5

On note $\mathbb{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice tridiagonale

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix}. \quad (\text{P-1})$$

Q. 1

Soit $\mu \in \mathbb{C}^*$. On note $\mathbb{Q}(\mu) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice diagonale de diagonale $(\mu, \mu^2, \dots, \mu^n)$.

- Expliciter la matrice $\mathbb{T}(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}(\mu)\mathbb{T}\mathbb{Q}^{-1}(\mu)$ en fonction des coefficients tridiagonaux de la matrice \mathbb{T} et de μ .
- Déterminer $\det(\mathbb{T}(\mu))$ en fonction de $\det(\mathbb{T})$.

R. 1

- On peut noter que la matrice $\mathbb{Q}(\mu)$ est inversible car elle est diagonale et $\mu \in \mathbb{C}^*$. Son inverse est la matrice diagonale de diagonale $(\mu^{-1}, \mu^{-2}, \dots, \mu^{-n})$.

1ère démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}(\mu) &= \begin{pmatrix} \mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu^n \end{pmatrix} \mathbb{T} \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu^2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\mu^n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mu a_1 & \mu c_1 & 0 & \dots & 0 \\ \mu^2 b_2 & \mu^2 a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mu^{n-1} c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \mu^n b_n & \mu^n a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu^2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\mu^n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 & \mu^{-1} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ \mu b_2 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mu^{-1} c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \mu b_n & a_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2ème démonstration. Pour simplifier l'écriture, on pose $\mathbb{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}(\mu)$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a

$$(\mathbb{T}(\mu))_{i,j} = (\mathbb{Q}\mathbb{T}\mathbb{Q}^{-1})_{i,j} = \sum_{k=1}^n (\mathbb{Q}\mathbb{T})_{i,k} (\mathbb{Q}^{-1})_{k,j}$$

Or \mathbb{Q}^{-1} est diagonale, donc $(\mathbb{Q}^{-1})_{k,j} = 0$, si $k \neq j$. Ceci donne

$$\begin{aligned}
(\mathbb{T}(\mu))_{i,j} &= (\mathbb{Q}\mathbb{T})_{i,j} (\mathbb{Q}^{-1})_{j,j} = \mu^{-j} (\mathbb{Q}\mathbb{T})_{i,j} \\
&= \mu^{-j} \sum_{k=1}^n \mathbb{Q}_{i,k} \mathbb{T}_{k,j}.
\end{aligned}$$

De même, \mathbb{Q} est diagonale, donc $\mathbb{Q}_{i,k} = 0$, si $k \neq i$. Ceci donne

$$(\mathbb{T}(\mu))_{i,j} = \mu^{-j} \mathbb{Q}_{i,i} \mathbb{T}_{i,j} = \mu^{i-j} \mathbb{T}_{i,j}.$$

La matrice \mathbb{T} étant tridiagonale, $\mathbb{T}(\mu)$ l'est aussi et on a

$$\begin{aligned} (\mathbb{T}(\mu))_{i,i} &= \mathbb{T}_{i,i} = a_i, & \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket & \quad \text{(diagonale)} \\ (\mathbb{T}(\mu))_{i,i+1} &= \mu^{-1} \mathbb{T}_{i,i+1} = \mu^{-1} c_i, & \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket & \quad \text{(sur-diagonale)} \\ (\mathbb{T}(\mu))_{i-1,i} &= \mu \mathbb{T}_{i-1,i} = \mu^{-1} b_i, & \forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket & \quad \text{(sous-diagonale)} \end{aligned}$$

b. On a

$$\det(\mathbb{T}(\mu)) = \det(\mathbb{Q}(\mu) \mathbb{T} \mathbb{Q}^{-1}(\mu)) = \det(\mathbb{Q}(\mu)) \det(\mathbb{T}) \det(\mathbb{Q}^{-1}(\mu)) = \det(\mathbb{T}),$$

$$\text{car } \det(\mathbb{Q}(\mu)) \det(\mathbb{Q}^{-1}(\mu)) = 1.$$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible dont les éléments diagonaux sont non nuls. On note $\mathbb{A}_{i,j}$ la composante (i, j) de la matrice \mathbb{A} . On décompose la matrice \mathbb{A} sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$, où \mathbb{D} représente la diagonale de \mathbb{A} , $-\mathbb{E}$ la partie triangulaire inférieure stricte et $-\mathbb{F}$ la partie triangulaire supérieure stricte.

On note respectivement $\mathbb{J} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{D}^{-1}(\mathbb{E} + \mathbb{F})$ et $\mathcal{L}_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} \mathbb{F}$ les matrices d'itérations des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.

Soit $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. On souhaite résoudre le système $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ par la méthode de Gauss-Seidel ou par la méthode de Jacobi.

On suppose dans la suite que la matrice inversible $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \nu_1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \nu_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix} \quad (\text{P-2})$$

et que ses éléments diagonaux sont non nuls.

Q. 2

a. Montrer que les valeurs propres de \mathbb{J} sont les racines du polynôme

$$q_{\mathbb{J}}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\lambda\mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}).$$

b. En utilisant la question 1, montrer que $q_{\mathbb{J}}(\lambda) = \det(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F})$.

c. En déduire que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de \mathbb{J} alors $-\lambda$ l'est aussi.

R. 2

a. Les valeurs propres de \mathbb{J} sont les racines de son polynôme caractéristique

$$P_{\mathbb{J}}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{J}).$$

Or on a

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{J}}(\lambda) &= \det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{D}^{-1}(\mathbb{E} + \mathbb{F})) \\ &= \det(\mathbb{D}^{-1}(\lambda\mathbb{D} - (\mathbb{E} + \mathbb{F}))) \\ &= \det(\mathbb{D}^{-1}) \det(\lambda\mathbb{D} - (\mathbb{E} + \mathbb{F})) \\ &= \det(\mathbb{D}^{-1}) q_{\mathbb{J}}(\lambda). \end{aligned}$$

Comme $\det(\mathbb{D}^{-1}) \neq 0$, les valeurs propres de \mathbb{J} sont aussi les racines de $q_{\mathbb{J}}(\lambda)$.

b. En reprenant les notations de la question 1, et en notant \mathbb{T} la matrice

$$\mathbb{T} = \lambda\mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 & \nu_1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_2 & \lambda\alpha_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \nu_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \beta_n & \lambda\alpha_n \end{pmatrix}$$

la matrice $\mathbb{T}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}(\lambda)\mathbb{T}\mathbb{Q}^{-1}(\lambda)$ correspond alors à

$$\mathbb{T}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 & \frac{1}{\lambda}\nu_1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda\beta_2 & \lambda\alpha_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{\lambda}\nu_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda\beta_n & \lambda\alpha_n \end{pmatrix} = \lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F}.$$

D'après la question 1, on a $\det(\mathbb{T}(\lambda)) = \det(\mathbb{T})$ ce qui donne

$$\det\left(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F}\right) = \det\left(\lambda\mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}\right) = q_{\mathbb{J}}(\lambda).$$

c. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de \mathbb{J} . On a donc $P_{\mathbb{J}}(\lambda) = 0$. Or on a

$$P_{\mathbb{J}}(\lambda) = \det(\mathbb{D}^{-1})q_{\mathbb{J}}(\lambda) = \det(\mathbb{D}^{-1})\det\left(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F}\right)$$

et donc

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{J}}(-\lambda) &= \det(\mathbb{D}^{-1})\det\left(-\lambda\mathbb{D} + \lambda\mathbb{E} + \frac{1}{\lambda}\mathbb{F}\right) \\ &= (-1)^n \det(\mathbb{D}^{-1})\det\left(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F}\right) \\ &= (-1)^n P_{\mathbb{J}}(\lambda) \\ &= 0 \end{aligned}$$

c'est à dire $-\lambda$ est aussi une valeur propre de \mathbb{J} .

Q. 3

a. Montrer que les valeurs propres de \mathcal{L}_1 sont les racines du polynôme

$$q_{\mathcal{L}_1}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \mathbb{F}).$$

b. En déduire que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^*, \quad q_{\mathcal{L}_1}(\lambda^2) = \lambda^n q_{\mathbb{J}}(\lambda). \quad (\text{P-3})$$

R. 3

a. Les valeurs propres de \mathcal{L}_1 sont les racines de son polynôme caractéristique

$$P_{\mathcal{L}_1}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\lambda \mathbb{I} - \mathcal{L}_1).$$

Or on a

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{L}_1}(\lambda) &= \det(\lambda \mathbb{I} - (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} \mathbb{F}) \\ &= \det((\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} (\lambda(\mathbb{D} - \mathbb{E}) - \mathbb{F})) \\ &= \det((\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}) \det(\lambda(\mathbb{D} - \mathbb{E}) - \mathbb{F}) \\ &= \det((\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}) q_{\mathcal{L}_1}(\lambda). \end{aligned}$$

Comme $\det((\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}) = \det(\mathbb{D}^{-1}) \neq 0$, les valeurs propres de \mathcal{L}_1 sont aussi les racines de $q_{\mathcal{L}_1}(\lambda)$.

b. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On a

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{L}_1}(\lambda^2) &= \det(\lambda^2(\mathbb{D} - \mathbb{E}) - \mathbb{F}) \\ &= \det\left(\lambda\left(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F}\right)\right) \\ &= \lambda^n \det\left(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F}\right). \end{aligned}$$

Et donc on obtient bien (P-3).

Q. 4

a. Comparer les valeurs propres de \mathbb{J} à celles de \mathcal{L}_1 .

b. Une des deux méthodes est-elle à privilégier dans ce cas?

- a. Si λ est une valeur propre de \mathbb{J} alors λ^2 est une valeur propre de \mathcal{L}_1 . Si $\mu \neq 0$ est une valeur propre de \mathcal{L}_1 alors ses racines carrées complexes $\sqrt{\mu}$ et $-\sqrt{\mu}$ sont valeurs propres de \mathbb{J} .
- b. On a $\rho(\mathcal{L}_1) = \rho(\mathbb{J})^2$, et donc $\rho(\mathcal{L}_1) < 1 \Leftrightarrow \rho(\mathbb{J}) < 1$. Les deux méthodes convergent donc simultanément. Toutefois, lorsqu'il y a convergence, on a

$$\rho(\mathcal{L}_1) = \rho(\mathbb{J})^2 < \rho(\mathbb{J}) < 1$$

et donc, Il faut privilégier la méthode de Gauss-Seidel car une méthode itérative converge d'autant plus vite que le rayon spectral de sa matrice d'itération est petit.

